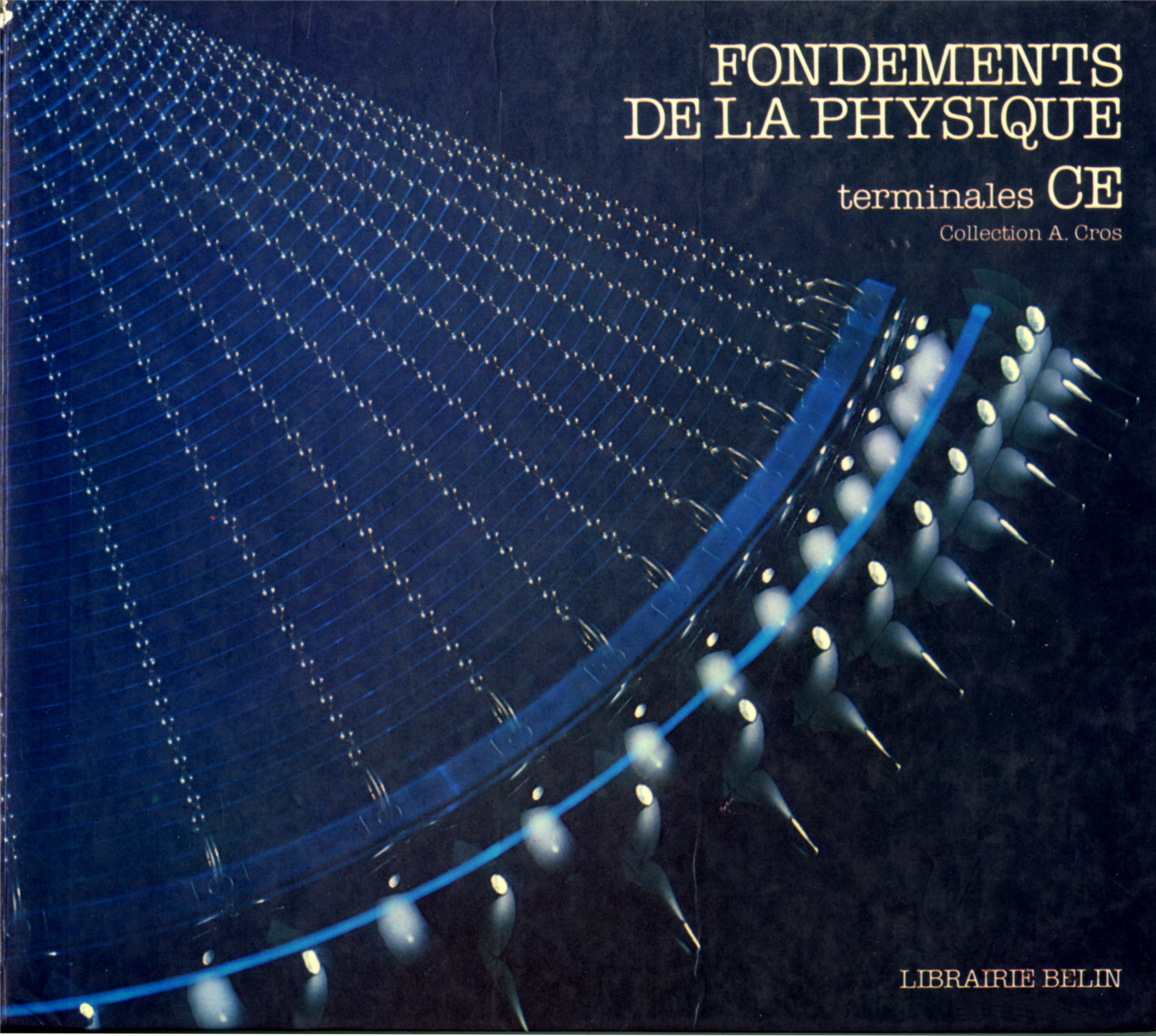


FONDEMENTS
DE LA PHYSIQUE
terminales CE
Collection A. Cros
LIBRAIRIE BELIN

INSTITUT INTERNATIONAL DE PHYSIQUE SOLVAY

CINQUIÈME CONSEIL DE PHYSIQUE — BRUXELLES, 1927



R. H. FOWLER

A. PICCARD E. HENRIOT ED. HERZEN TH. DE DONDER E. SCHROEDINGER W. PAULI W. HEISENBERG L. BRILLOUIN

P. EHRENFEST E. VERSCHAFFELT

P. DEBYE M. KNUDSEN W. L. BRAGG H. A. KRAMERS P. A. M. DIRAC A. H. COMPTON L. V. DE BROGLIE M. BORN N. BOHR

I. LANGMEIR M. PLANCK MADAME CURIE H. A. LORENTZ A. EINSTEIN P. LANGEVIN CH. E. GUYE C. T. R. WILSON

O. W. RICHARDSON

Système international d'unités

Unités fondamentales

• **Mètre (m).** Le mètre est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde, dans le vide, de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux de l'atome de krypton 86.

• **Kilogramme (kg).** Masse du prototype international, conservé au pavillon de Breteuil, à Sèvres près de Paris.

• **Seconde (s).** Durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

• **Ampère (A).** Intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2×10^{-7} newton par mètre de longueur.

• **Kelvin (K).** Fraction 1/273,16 de la température thermodynamique à laquelle l'eau peut subsister en équilibre sous trois états simultanés (solide, liquide et gaz).

• **Mole (mol).** Quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.

• **Candela (cd).** Intensité lumineuse dans la direction perpendiculaire, d'une surface de 1/600 000 mètre carré d'un corps noir à la température de congélation du platine sous la pression de 101 325 pascals.

Unités dérivées

Grandeur physique	Unité	Symbole	Formule de définition
force	newton	N	$F = ma$
travail, énergie	joule	J	$W = F . l$
puissance	watt	W	$\mathcal{P} = \frac{W}{t}$
pression	pascal	Pa	$p = \frac{F}{S}$
fréquence	hertz	Hz	$\gamma = \frac{1}{T}$
tension, d.d.p.	volt	V	$U = \frac{\mathcal{P}}{I}$
charge électrique	coulomb	C	$Q = It$
résistance	ohm	Ω	$R = \frac{U}{I}$
flux	weber	Wb	$d\Phi = - edt$
champ magnétique	tesla	T	$B = \frac{\Phi}{}$
inductance propre	henry	H	$e = - L \frac{di}{dt}$
capacité	farad	F	$C = \frac{Q}{U}$

Unités particulières autorisées

Grandeur	Unité	symbole	valeur en SI
longueur	angström	Å	10^{-10} m
pression	bar	bar	10^{5} Pa
masse	unité de masse atomique	u	$1{,}660\,56 . 10^{-27}$ kg
charge	électronvolt	eV	$1{,}602\,189 . 10^{-19}$ J

Table des matières

Programme de Sciences Physiques

arrêté du 30 janvier 1979

Programme

A) MÉCANIQUE

1. Vecteurs vitesse et accélération d'un point dans un repère donné. Cas du mouvement circulaire uniforme.

2. Mouvement du centre d'inertie d'un solide. Relation $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{f}$.

3. L'interaction gravitationnelle. Mouvements rectiligne et parabolique dans un champ de pesanteur uniforme ; mouvement circulaire des satellites.

4. Équilibre relatif dans un repère en translation rectiligne ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe. Impesanteur.

B) ÉLECTROMAGNÉTISME

1. Le champ électrostatique

1.1 Condensateur plan. Capacité. Énergie emmagasinée dans un condensateur.
1.2 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.

2. Le champ magnétique

2.1 Mise en évidence du champ magnétique par son action sur un faisceau d'électrons, sur un conducteur parcouru par un courant, sur un aimant. Visualisation des lignes de champ (spectres magnétiques).
2.2 Étude expérimentale de la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme ; force subie ; vecteur $\vec{B}$ représentatif du champ magnétique : relation $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.
2.3 *a*) Action d'un champ magnétique sur un élément de circuit parcouru par un courant : loi de Laplace ; vérifications expérimentales. Applications. Principe de l'effet Hall.
b) Action d'un champ magnétique uniforme sur un circuit indéformable parcouru par un courant : cadre rectangulaire dans un champ magnétique uniforme ; circuit plan dans un champ magnétique uniforme : moment magnétique associé ; expression du moment du couple.
2.4 Les courants, sources de champ magnétique : proportionnalité du champ magnétique à l'intensité du courant qui le crée ; expressions du champ magnétique créé par un fil rectiligne et un solénoïde infiniment longs.

3. Induction électromagnétique

3.1 *a*) Induction par déplacement d'un conducteur dans un champ magnétique indépendant du temps ; champ électromoteur d'induction ; force électromotrice induite ; sa relation avec le flux magnétique coupé.
b) Mise en évidence expérimentale de l'induction électromagnétique dans un circuit fixe placé dans un champ magnétique variable au cours du temps ; expression de la force électromotrice induite en fonction du flux magnétique à travers le circuit.
3.2 Auto-induction ; mise en évidence expérimentale ; force électromotrice d'auto-induction ; auto-inductance. Énergie emmagasinée dans une bobine.

C) VIBRATIONS ET PROPAGATION

1. Oscillateurs mécaniques et électriques
1.1 Exemples d'oscillateurs mécaniques : pendule élastique et pendule de torsion. Équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti ; solutions de cette équation, fréquence propre. Conservation de l'énergie. Amortissement d'un oscillateur.
1.2 Circuits oscillants : équation différentielle d'un circuit LC. Solutions de cette équation, fréquence propre. Conservation de l'énergie.
1.3 Circuits en régime sinusoïdal forcé :
a) Oscillations forcées en régime sinusoïdal d'un circuit RLC série. Impédance. Résonance d'intensité, bande passante, facteur de qualité.
b) Intensité et tension efficaces. Puissance, facteur de puissance.
1.4 Présentation qualitative d'exemples d'oscillations forcées et de résonance.

2. Ondes sinusoïdales
2.1 Onde plane progressive sinusoïdale.
2.2 Ondes stationnaires.
2.3 Phénomènes de résonance associés aux ondes stationnaires. Expérience de Melde. Exemples de résonateurs acoustiques.

D) PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLÉAIRE

1. Les particules de grande énergie : expressions de leur quantité de mouvement, de leur énergie totale et de leur énergie cinétique. Relation entre quantité de mouvement et énergie totale. Masse et énergie. Vérifications expérimentales.
2. Le photon. Aspect corpusculaire de la lumière : effet photo-électrique ; existence de l'effet Compton. Énergie et quantité de mouvement du photon.
3. Existence de niveaux d'énergie discrets dans un atome : spectres de raies, transitions avec absorption ou émission d'un photon.
4. Le noyau atomique et les réactions nucléaires.
4.1 Composition du noyau ; les nucléons ; énergie de liaison.
4.2 Réactions nucléaires spontanées : loi de décroissance d'un nucléide radioactif ; radioactivité α ; radioactivité β^- et β^+ ; rayonnement γ.
4.3 Réactions nucléaires provoquées : transmutation, fission, fusion.
5. Association onde-particule : justification de l'existence de niveaux d'énergie ; particule dans une « boîte à une dimension ».

Horaire hebdomadaire

TERMINALES C ET E :

Cinq heures (cours : trois heures et demie ; travaux pratiques : une heure et demie). La répartition de l'horaire total (cours et travaux pratiques) sera de l'ordre de : physique, 70 % ; chimie, 30 %.

TERMINALE D :

Quatre heures (cours : trois heures ; travaux pratiques : une heure). La répartition de l'horaire total (cours et travaux pratiques) sera de l'ordre de : physique, 67 % ; chimie, 33 %.

Avant-propos

Le livre de Physique correspond, pour les élèves des sections C et E, à la dernière étape de la rénovation de l'enseignement des Sciences Physiques dans les lycées : il conclut ainsi une profonde réforme. L'esprit de cette réforme a constamment animé les auteurs qui ont donc conçu leur enseignement de la Physique de façon résolument moderne. Ceci apparaît, bien évidemment, dans les questions nouvelles du programme, mais aussi dans celles qui étaient traitées traditionnellement dans les anciens programmes et qui le sont ici sous un jour nouveau, comme le souhaitent les instructions qui accompagnent le programme officiel pour en préciser l'esprit.
Tout enseignement de la Physique doit être expérimental, et les auteurs s'y sont attachés. Mais, en classe Terminale C ou E, l'enseignement doit aussi présenter un aspect théorique ; la formalisation mathématique est souvent nécessaire. La mathématisation apparaît notamment lors d'une deuxième étude de phénomènes physiques abordés déjà au cours des années précédentes ; elle apparaît également pour jouer un rôle synthétique en rapprochant des phénomènes apparemment différents mais dont la formulation est semblable. Ainsi, en accordant à la Physique la place fondamentale qui est la sienne dans cet ouvrage, les auteurs ont fait plus largement appel aux mathématiques que dans les classes précédentes.
Comme le programme, et dans le même ordre, le livre est divisé en quatre grandes parties. Les développements consacrés à chacune d'elles ne sont pas strictement proportionnels au temps que l'on devra y consacrer en classe, mais ils n'en sont pas très différents.

• 1. Mécanique

C'est la partie qui, jusqu'à présent, a toujours été traitée en classe de Terminale. En fait, elle est ici beaucoup moins importante que par le passé : si l'on tient compte des exercices résolus, jugés indispensables, on remarquera que le cours proprement dit ne représente guère que 15 % environ de l'ensemble, ce qui témoigne du profond renouveau. On notera, en particulier, que la rotation d'un solide autour d'un axe est absente : seul, est étudié le mouvement du centre d'inertie d'un corps solide.
La présentation nouvelle de l'équilibre relatif et des forces d'inertie est la suite logique des programmes de Seconde et de Première : elle permettra, nous l'espérons, de clarifier des questions qui ont toujours été considérées comme délicates, tant par les élèves que par les professeurs.

• 2. Électromagnétisme

Le passage de l'électromagnétisme en Terminale en permet une nouvelle présentation : les élèves disposent alors, particulièrement en mécanique, de notions qu'ils ne possédaient pas autrefois en classe de Première. Par exemple, l'étude du mouvement d'une particule chargée rend possible une meilleure présentation du champ magnétique. Toute cette partie du cours est profondément modernisée. L'induction électromagnétique fait largement appel à l'expérience ; le champ électromoteur en permet une étude théorique, logique et simple qui se prête à la généralisation, aussi a-t-il été fréquemment utilisé.
Pour l'élève, il est indispensable de prolonger le cours par la résolution de nombreux exercices, afin d'assimiler ces questions délicates.

• 3. Oscillateurs et ondes

Ici, la formalisation mathématique permet une étude approfondie des notions acquises en Première, grâce à l'utilisation des fonctions sinusoïdales ; elle permet surtout une présentation synthétique des différents systèmes oscillants, en exploitant systématiquement leurs analogies. On a bien insisté sur l'aspect énergétique, ce qui constitue une utilisation logique de la première partie du programme de la classe précédente.
Enfin, conformément au programme, les ondes stationnaires ont été traitées en accordant une large place aux phénomènes de résonance ainsi qu'aux applications en acoustique.

• 4. Physique atomique et nucléaire

C'est cette dernière partie qui présente le plus d'innovations ; en particulier, les élèves de Terminale seront initiés, pour la première fois, à la Relativité. La méthode utilisée dans le livre est celle qu'a préconisée la Commission Lagarrigue et qui a été mise au point par M. Duboc : exploitation de clichés de collisions de particules et vérification des formules de la mécanique relativiste. Ainsi, sont établies les lois générales de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Celles-ci sont, par la suite, utilisées de façon systématique, ce qui permet de voir sous un jour nouveau toute la Physique moderne :

— le photon est caractérisé par sa quantité de mouvement et son énergie ; son « existence » est étayée par une étude succincte de l'effet Compton ;
— les lois de conservation sont très utilisées pour l'interprétation des spectres d'émission et d'absorption à partir des niveaux d'énergie ;
— l'étude des réactions nucléaires est complétée par l'utilisation des lois de conservation, ce qui fait apparaître une particule jusqu'alors ignorée des programmes des lycées : le neutrino.

Toute cette étude se termine par l'introduction des idées de base de la mécanique quantique grâce à l'association ondes-particules.

LES EXERCICES

On ne saurait parler de l'enseignement des Sciences Physiques en classe de Terminale sans évoquer la question du contrôle des connaissances et du baccalauréat. Selon toute vraisemblance, l'épreuve de Physique au baccalauréat ne comprendra plus les questions de cours et le problème traditionnels, mais plusieurs exercices ; les sujets du baccalauréat expérimental permettent de penser quel en sera l'esprit : c'est celui de nos ouvrages de Seconde et de Première. Plus encore que les autres, ce livre se devait d'être très riche en exercices pour soutenir les élèves dans leur effort. Ces exercices sont d'abord indispensables pour l'assimilation du cours ; leur classement facilitera le travail ; quelques uns, plus difficiles, ont été particulièrement signalés.
Ainsi concu, ce livre de Physique dont les intentions scientifiques et pédagogiques se renforcent mutuellement, devrait rendre un service efficace aux élèves et à leurs professeurs.
Les auteurs accueilleront, avec le plus grand intérêt, les remarques et suggestions qui permettraient de l'améliorer ; par avance, ils en remercient leurs Collègues.

André Cros

1 Cinématique des mouvements rectilignes.

I. Étude générale.

1. Vecteur vitesse.
2. Vecteur accélération.
3. Étude expérimentale.
4. Relation entre vecteur vitesse et vecteur accélération.
5. Conclusion : étude cinématique d'un mouvement rectiligne.

II. Applications : quelques mouvements rectilignes.

1 Mouvement rectiligne uniforme.
2. Mouvement rectiligne uniformément varié.
3. Exemple d'étude expérimentale.



Début d'un mouvement rectiligne : formation d'une goutte, avec un liquide visqueux.

Lorsque la vitesse d'un mobile augmente (ou diminue), on dit couramment qu'il est accéléré (ou freiné). Nous allons préciser ici la notion d'accélération d'un mobile dans le cas d'une trajectoire rectiligne, puis nous l'utiliserons sur des exemples simples.

I. Étude générale.

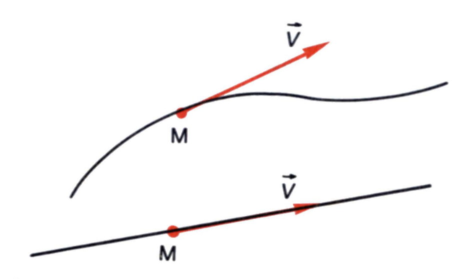
1. Vecteur vitesse.

a) Rappel de la définition (cas d'une trajectoire quelconque).

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point mobile est défini par son module, sa direction et son sens :

— Son module $\|\vec{v}\|$ est la valeur de la vitesse instantanée, que nous notons simplement v.
— Sa direction est tangente à la trajectoire. Dans le cas d'un mouvement rectiligne, la direction de $\vec{v}$ est parallèle à la trajectoire.
— Son sens est celui du mouvement.

On convient de représenter le vecteur vitesse par une flèche dont l'origine est sur le point mobile (figure 1).



1. Lorsque la trajectoire est curviligne, le vecteur vitesse au point M est porté par la tangente. Quand la trajectoire est rectiligne, la direction du vecteur vitesse se confond avec la trajectoire.

b) Mesure algébrique (cas d'une trajectoire rectiligne).

Orientons la trajectoire du mobile et choisissons une origine O : nous définissons ainsi un axe Ox, de vecteur unitaire $\vec{i}$. La position du mobile est repérée par son abscisse x, qui est aussi la mesure algébrique du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}.$$

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$ a pour mesure algébrique v_x :

$$\vec{v} = v_x\vec{i}.$$

Le module de la vitesse est égal à la valeur absolue de v_x :

$$v = |v_x|.$$



2. La trajectoire étant orientée, on peut définir la mesure algébrique V_x du vecteur vitesse :

$\vec{V} = V_x\vec{i}$. Ici, $V_x > 0$.

Pendant un intervalle de temps δt très court ($\delta t > 0$), l'abscisse varie de δx et le déplacement est $|\delta x|$. Le module de la vitesse est donc :

$$|v_x| = \frac{|\delta x|}{\delta t}.$$

Le vecteur vitesse étant orienté dans le sens du mouvement, δx et v_x ont toujours même signe. On peut donc écrire :

$$v_x = \frac{\delta x}{\delta t}.$$

Or, l'abscisse x est une fonction du temps t. Lorsque δt tend vers zéro, le rapport $\frac{\delta x}{\delta t}$ tend vers la dérivée de x par rapport au temps. Nous pouvons donc écrire :

La mesure algébrique de la vitesse est égale à la dérivée de l'abscisse par rapport au temps (pour un mobile sur un axe).

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}}.$$

En multipliant les deux membres de cette expression par le vecteur unitaire constant $\vec{i}$, nous obtenons :

$$v_x \vec{i} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = \frac{d}{dt}(x\vec{i}).$$

ou

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}.$$

Remarque : dans la suite, une petite variation d'une fonction f sera le plus souvent notée df. Notamment, un intervalle de temps δt peut être noté dt : petite variation de la date t. Nous interprèterons directement comme une dérivée un rapport du type $\frac{df}{dt}$.

En revanche, nous continuerons de représenter par le symbole δ une petite quantité qui n'est pas la variation d'une fonction. Par exemple, s'il s'agit d'écrire le théorème de l'énergie cinétique, appliqué à un solide dans un intervalle de temps très court, nous écrivons :

$$dE_C = \delta W.$$

La variation (petite) de l'énergie cinétique est égale au travail (petit) des forces appliquées.

2. Vecteur accélération.

a) Exemples.

• **Démarrage d'une voiture.** Considérons une voiture qui se déplace sur une route rectiligne. On dit **qu'elle accélère** lorsque sa vitesse augmente. Il est naturel d'appeler **accélération** l'augmentation de vitesse en une seconde. Par exemple, quand la vitesse passe de 20 m/s à 21 m/s dans un intervalle de temps de 2 s, l'accélération vaut :

$$a = \frac{21 - 20}{2} = 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{(0,5 mètre par seconde carrée).}$$

• **Freinage d'une voiture.** Lors du freinage, la vitesse d'une voiture diminue : on dit parfois qu'elle « décélère ». Nous pourrions définir une « décélération » comme la diminution de vitesse en une seconde. En réalité, lors d'un mouvement complexe, on serait amené à considérer des accélérations et décélérations, mais l'usage simultané de ces deux notions se prêterait mal à des calculs algébriques. Nous allons voir que la notion de vecteur accélération permet de décrire un freinage aussi bien qu'un démarrage.

b) Vecteur accélération d'un mouvement rectiligne.

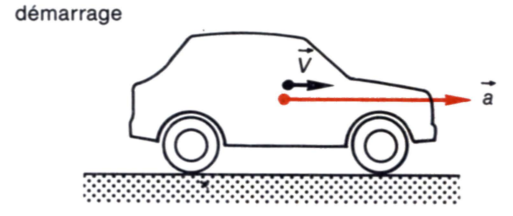
• Soit $\vec{a}$ ce vecteur accélération, nous le définissons par son module, sa direction et son sens.

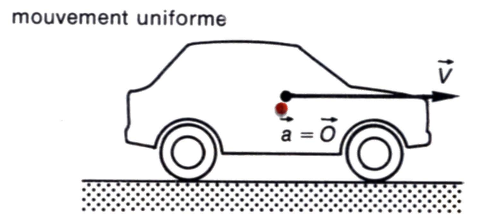
— **Son module** est $a = \left|\frac{dv}{dt}\right|$. La dérivée $\frac{dv}{dt}$ représente la valeur instantanée du taux de variation de la vitesse ; elle est positive si le mobile est accéléré, négative s'il est freiné. Le module du vecteur accélération est la valeur absolue de $\frac{dv}{dt}$: il est toujours positif. Dans le système SI, il s'exprime en mètre par seconde carrée ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).

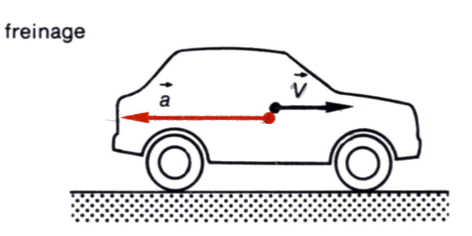
— **Sa direction** est celle de la trajectoire, pour tout mouvement rectiligne.

— **Son sens** dépend à la fois du sens du mouvement et du sens de variation de la vitesse : **lorsque $\vec{v}$ augmente, $\vec{a}$ est de même sens que $\vec{v}$; lorsque $\vec{v}$ diminue, $\vec{a}$ est en sens contraire de $\vec{v}$.**

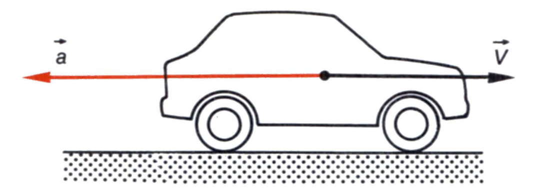
• **Représentation du vecteur accélération.** Pour représenter le vecteur accélération, on trace une flèche de même direction et de même sens que $\vec{a}$ et de longueur proportionnelle au module $\|\vec{a}\| = a$. Il est commode, pour visualiser le mouvement, de placer l'origine de la flèche au point où se trouve le mobile considéré, mais ce n'est pas obligatoire.







3. Le vecteur accélération et le vecteur vitesse sont de même sens au démarrage, et de sens contraires lors du freinage. Nous avons représenté les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en plaçant l'origine au centre de masse.



4. Tracé d'un vecteur vitesse et d'un vecteur accélération, avec une échelle fixée.

Exercice : La vitesse d'une voiture passe de 90 km/h à 60 km/h en 2,1 secondes, lors d'une phase de freinage au cours de laquelle le vecteur accélération est constant. Représenter le vecteur accélération à l'échelle 1 cm ≙ 1 m . s^{-2}, ainsi que le vecteur vitesse au début du freinage, à l'échelle 1 cm ≙ 10 m . s^{-1}.

Solution : Une vitesse de 1 m/s correspond à 3 600 m en 1 heure, soit 3,6 km/h : la vitesse de la voiture passe donc de $\frac{90}{3,6}$ à $\frac{60}{3,6}$ m . s^{-1}

Le module du vecteur accélération s'obtient en divisant la valeur absolue de la variation de vitesse par l'intervalle de temps nécessaire :

$$a = \frac{|\Delta V|}{\Delta t} = \frac{90 - 60}{3,6 \times 2,1} = 3,97 \text{ m . s}^{-2}.$$

Remarquons que $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$, du fait que l'accélération est constante. La longueur de la flèche représentative est voisine de 4 cm. Elle est orientée en sens contraire du mouvement, puisqu'il y a freinage. Le vecteur vitesse au début du freinage a pour module $v_1 = \frac{90}{3,6} = 25$ m . s^{-1}. Il est orienté dans le sens du mouvement. Son représentant a une longueur de 2,5 cm (figure 4).

3. Étude expérimentale.

Considérons un document sur lequel sont enregistrées les positions d'un mobile à des instants régulièrement espacés. Soient M_1, M_2, M_3 les positions aux instants $t - \tau$, t et $t + \tau$.

• La vitesse à l'instant t, au point M_2, est assimilable à la vitesse moyenne entre M_1 et M_3 (figure 5) :

$$v_{M_2} \approx \frac{M_1 M_3}{2\,\tau} \quad .$$

Remarquons que l'on écrit ainsi que v_{M_2} est la moyenne arithmétique des vitesses moyennes avant et après l'instant t :

$$\frac{v_{M_1 M_2} + v_{M_2 M_3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1 M_2}{\tau} + \frac{M_2 M_3}{\tau}\right) = \frac{M_1 M_3}{2\,\tau}.$$

• Le module de l'accélération à l'instant t est pratiquement :

$$a_{M_2} = \frac{1}{\tau}\left|\left(v_{t+\frac{\tau}{2}} - v_{t-\frac{\tau}{2}}\right)\right|.$$

La vitesse instantanée $v_{t+\frac{\tau}{2}}$ est voisine de la vitesse moyenne entre M_2 et M_3, soit $\frac{M_2 M_3}{\tau}$. De même, $v_{t-\frac{\tau}{2}}$ est voisine de $\frac{M_1 M_2}{\tau}$.

Par suite :

$$a_{M_2} \simeq \frac{1}{\tau} \left| \left(\frac{M_2 M_3}{\tau} - \frac{M_1 M_2}{\tau} \right) \right|. \quad \text{Soit : } \boxed{a_{M_2} = \frac{|M_2 M_3 - M_1 M_2|}{\tau^2}}.$$

4. Relation entre vecteur vitesse et vecteur accélération.

Considérons un axe Ox, de vecteur unitaire $\vec{i}$, parallèle à la trajectoire du mobile. Sur cet axe, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ont pour mesures algébriques v_x et a_x :

$$\vec{v} = v_x \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{a} = a_x \vec{i}.$$

Les modules des vecteurs sont :

$$v = |v_x| \quad \text{et} \quad a = |a_x|.$$

Comme $a = \left| \frac{dv}{dt} \right|$, on a aussi $\left| a_x \right| = \left| \frac{dv_x}{dt} \right|$. De plus, il est facile de s'assurer que a_x et $\frac{dv_x}{dt}$ sont toujours de même signe. Par exemple, supposons que $v_x > 0$ (mobile allant dans le sens des x croissants) et $\frac{dv_x}{dt} < 0$: il y a freinage car pour $dt > 0$, on a $dv_x < 0$. Le vecteur $\vec{a}$ est donc dirigé dans le sens des x décroissants, par suite $a_x < 0$.

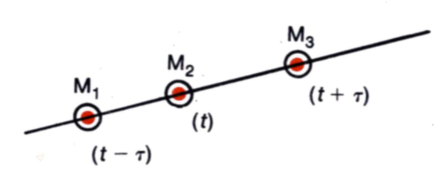
Nous pouvons donc écrire : $\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt}}$.

En mesures algébriques, l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps (pour un mouvement rectiligne).

Il est possible d'écrire vectoriellement cette relation, en multipliant les deux membres par $\vec{i}$:

$$a_x \vec{i} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} = \frac{d}{dt}(v_x \vec{i}) \quad \text{ou :} \quad \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}.$$

Nous dirons que le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps.



5. Obtention de la vitesse et de l'accélération à partir d'un enregistrement du mouvement :

en M_2, $v \simeq \frac{M_1 M_3}{2\tau}$ et $a \simeq \frac{|M_2 M_3 - M_1 M_2|}{\tau^2}$

5. Conclusion : étude cinématique d'un mouvement rectiligne.

• Lorsque le mouvement d'un mobile sur un axe est connu, on en déduit la vitesse et l'accélération par **deux dérivations successives :**

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{ou} \quad a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

On dit aussi que a_x est la dérivée seconde de x.

• Inversement, les lois de la mécanique permettent parfois de connaître le vecteur accélération $\vec{a}$, donc sa mesure algébrique a_x. On en déduit le mouvement par les opérations inverses des dérivations, c'est-à-dire **deux intégrations successives :**

$$v_x = \int a_x \, dt \quad \text{et} \quad x = \int v_x \, dt.$$

Cependant, on sait que la primitive d'une fonction est définie à une constante additive près, dite « constante d'intégration ».
Ainsi, la connaissance de l'accélération ne suffit pas pour décrire un mouvement.
Il y a indétermination : par exemple, tous les mouvements verticaux dans le champ de pesanteur, en l'absence de résistance de l'air, sont caractérisés par la même accélération. Le mouvement n'est parfaitement défini que si l'on connaît la position de départ et la vitesse initiale communiquée au mobile.
Sur le plan mathématique, nous dirons que la connaissance de a_x à tout instant ne détermine le mouvement que si l'on se donne les conditions initiales : les valeurs x_0 et v_0 de x et de v_x à l'instant $t = 0$. Celles-ci déterminent sans ambiguïté les constantes d'intégration.

• **Remarque :** Lorsqu'on dérive par rapport au temps une coordonnée ou une vitesse, on utilise parfois une notation particulière : on convient de noter la dérivée par un point sur la lettre qui représente ce qu'on dérive ; de même, une dérivée seconde est notée par deux points. Ainsi :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{et} \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \dot{v}_x = \ddot{x}.$$

II. Applications : quelques mouvements rectilignes.

1. Mouvement rectiligne uniforme.

a) Définition : c'est un mouvement qui a lieu sur une droite, à **vitesse constante** (ce qui signifie aussi : **accélération nulle**). Par exemple, le centre de masse d'un solide soumis à aucune action a un mouvement rectiligne et uniforme (principe de l'inertie).

b) Loi horaire du mouvement.

Orientons la trajectoire et choisissons une origine O. Soit x l'abscisse du mobile sur l'axe ainsi défini, et soit v_x la mesure algébrique du vecteur vitesse. Par définition : v_x = cte.

Intégrons : $x = \int v_x \, dt = v_x t + A$.

La constante d'intégration A s'obtient en portant les conditions initiales dans l'équation obtenue :

Pour $t = 0$, on a $x = x_0$, d'où $x_0 = 0 + A$, ou : $A = x_0$. Par suite,

pour t quelconque : $\boxed{x = v_x t + x_0}$.

Dans un mouvement rectiligne uniforme, l'abscisse du mobile est fonction affine du temps.

On obtient ainsi la relation entre le temps et l'abscisse, dite **loi horaire** du mouvement.

2. Mouvement rectiligne uniformément varié.

a) Définition : nous étudions ici un mouvement rectiligne dont le vecteur accélération est constant. Par exemple, le mouvement vertical d'un corps dans le champ de pesanteur terrestre est uniformément varié, à condition que la résistance de l'air soit négligeable. Le vecteur accélération est alors $\vec{g}$: on l'appelle accélération de la pesanteur.

b) Loi horaire. Introduisons un axe Ox parallèle à la trajectoire. Par définition a_x = cte. Notons γ cette constante : $a_x = \gamma$.

Intégrons : $v_x = \int \gamma dt = \gamma t + A$.

La constante A s'obtient en écrivant la condition initiale : pour $t = 0$, $v_x = v_{0x}$, d'où $A = v_{0x}$.
Par suite : $v_x = \gamma t + v_{0x}$. Intégrons une seconde fois :

$$x = \int v_x \, dt = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_{0x} t + B .$$

La constante B s'obtient en introduisant la position initiale : pour $t = 0$, $x = x_0$, d'où $B = x_0$. Par suite :

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_{0x} t + x_0} .$$

Il faut se rappeler que dans cette formule, γ représente la **mesure algébrique** de l'accélération.

c) Quelques propriétés.

• On trouve **la relation entre la vitesse et l'espace parcouru** en éliminant le temps t entre les expressions de x et de v_x : $t = \dfrac{v_x - v_{0x}}{\gamma}$.

$$\text{d'où : } x - x_0 = t\left(\frac{1}{2}\gamma t + v_{0x}\right) = \frac{v_x - v_{0x}}{\gamma}\left[\frac{1}{2}\left(v_x - v_{0x}\right) + v_{0x}\right]$$

$$= \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2\,\gamma}.$$

Par suite : $$\boxed{v_x^2 - v_{0x}^2 = 2\,\gamma\,(x - x_0)} .$$

Au cours d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, les espaces parcourus en des intervalles de temps égaux sont en progression arithmétique.

• Une propriété caractéristique : **les espaces parcourus en des intervalles de temps égaux sont en progression arithmétique.** Pour démontrer cela, considérons la loi horaire écrite sous la forme la plus simple, obtenue en choisissant convenablement les origines des temps et des abscisses ($x_0 = 0$ et $v_0 = 0$) :

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 .$$

Considérons des dates en progression arithmétique, à partir d'une date origine t_0 quelconque :

$$t_1 = t_0 + \tau, \quad t_2 = t_0 + 2\,\tau, \; \dots, \; t_n = t_0 + n\tau, \; \dots$$

Comparons les espaces parcourus dans les intervalles de temps (t_{n-1}, t_n) et (t_n, t_{n+1}) :

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\gamma[(t_0 + n\tau)^2 - (t_0 + (n-1)\tau)^2]$$
$$= \frac{1}{2}\gamma\tau[2t_0 + 2n\tau - \tau]$$

Δx_{n+1} s'obtient en remplaçant n par $n+1$ dans le résultat précédent :

$$\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\gamma\tau[2t_0 + 2(n+1)\tau - \tau].$$

Par suite : $\Delta x_{n+1} - \Delta x_n = \gamma\tau^2$.

Les espaces parcourus sont bien en progression arithmétique :

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \gamma\tau^2$$
$$\Delta x_3 = \Delta x_2 + \gamma\tau^2 = \Delta x_1 + 2\gamma\tau^2, \ldots,$$
$$\Delta x_n = \Delta x_{n-1} + \gamma\tau^2 = \Delta x_1 + (n-1)\gamma\tau^2$$

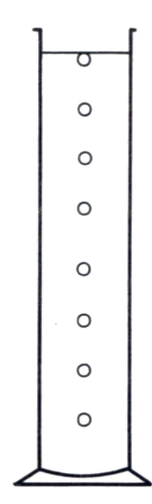
La raison de cette progression est $\gamma\tau^2$.

3. Exemple d'étude expérimentale.

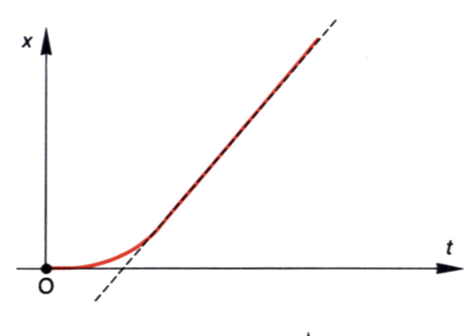
Nous pouvons étudier un mouvement qui n'est ni uniforme, ni uniformément varié, dans les conditions suivantes :

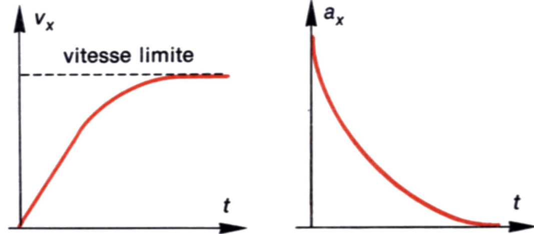
• **Expérience.** Lâchons une bille d'acier dans une éprouvette remplie d'eau. La vitesse de la bille augmente d'abord sous l'effet de la pesanteur mais la résistance opposée par l'eau au mouvement augmente en même temps : finalement, le poids et la résistance de l'eau se compensent et la vitesse ne varie plus.
Il est possible d'étudier en détail le mouvement par la méthode d'enregistrement stroboscopique.

• **Courbes représentatives du mouvement.** Il est possible de prévoir l'allure de ces courbes avant toute mesure (figure 7).
— Le chemin parcouru x s'accroît de plus en plus rapidement à mesure que la vitesse augmente, puis il devient fonction affine du temps quand la vitesse limite est atteinte (mouvement rectiligne uniforme).
— La vitesse v est d'abord croissante, puis constante.
— L'accélération est la plus grande au début. Elle est nulle en fin de mouvement.



6. Un dispositif pour étudier la chute d'un corps, avec résistance d'un fluide.





7. Variations des paramètres cinématiques (position, vitesse, accélération) dans l'expérience schématisée à la figure 6.

Exercice : Un enfant lance une pierre verticalement vers le haut, à partir d'une hauteur de 1 m par rapport au sol, et avec une vitesse initiale $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Calculer :
a) la hauteur maximale de la pierre par rapport au sol ;
b) le temps au bout duquel la pierre tombe au sol.
On prendra $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Solution : a) Cette question peut être résolue par la conservation de l'énergie. Mais utilisons plutôt ici les résultats que nous venons d'établir.
Introduisons un axe vertical Ox orienté vers le haut, l'origine étant au niveau du sol, d'où : $x_0 = 1$ m et $v_0 = +10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ($\vec{v}_0$ vers le haut). La mesure algébrique du vecteur accélération est :

$$a_x = -g. \quad (1)$$

Intégrons deux fois :

$$v_x = -gt + v_0 \quad (2)$$

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0. \quad (3)$$

Au point le plus élevé de la trajectoire, $v_x = 0$ et l'équation (2) fournit $t = -\frac{v_0}{g}$.

Portons dans (3) : $x = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0^2}{g} + x_0 = \frac{v_0^2}{2g} + x_0$.

Numériquement : $x = \frac{100}{19{,}6} + 1$, d'où $\boxed{x \approx 6{,}10 \text{ m}}$.

Calculons également le temps au bout duquel la pierre tombe au sol ($x = 0$).

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0.$$

Nous avons à résoudre une équation du second degré, qu'on peut encore écrire :

$$gt^2 - 2v_0 t - 2x_0 = 0.$$

L'équation admet deux racines de signes contraires. Seule la racine positive convient (la pierre tombe après avoir été lancée !) :

$$t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gx_0}}{g}.$$

En portant les valeurs numériques, on obtient :

$$t = \frac{10 + \sqrt{100 + 19{,}6}}{9{,}8}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{t \approx 2{,}14 \text{ s}}.$$

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- La mesure algébrique de la vitesse d'un mobile sur un axe est la dérivée de ______ du mobile par rapport au temps.
- La valeur absolue de la dérivée de la vitesse par rapport au temps représente le ______ du vecteur accélération.
- Le vecteur accélération est en sens contraire du vecteur vitesse lorsque la vitesse ______ .
- Dans un mouvement rectiligne quelconque sur un axe, la mesure algébrique de la vitesse est l' ______ de la mesure algébrique de l'accélération. La connaissance des conditions ______ permet de déterminer les constantes d'intégration.
- Un mouvement ______ est un mouvement qui a lieu sur une droite à vitesse constante. Dans un tel mouvement, l'abscisse du mobile est fonction ______ du temps.
- Dans un mouvement uniformément varié, la ______ est fonction affine du temps. Les espaces parcourus en des intervalles de temps égaux sont en progression ______ .

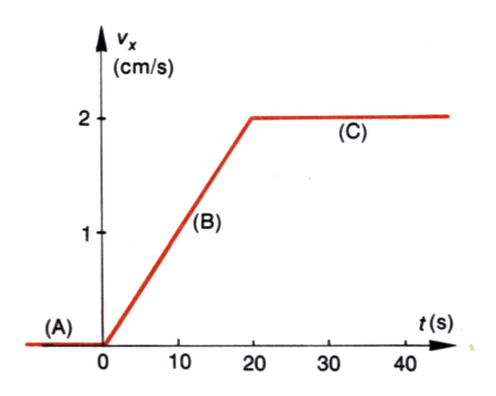
Applications immédiates.

1. Le courant d'une rivière a une vitesse de $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Une truite se déplace parallèlement aux berges à la vitesse de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ par rapport à l'eau. On introduit un axe Ox dirigé parallèlement au courant et orienté vers l'aval.
Déterminez la mesure algébrique de la vitesse par rapport à la berge, lorsque la truite descend le courant et lorsqu'elle le remonte.

2. En accélérant uniformément, une automobile passe d'une vitesse de 70 à 80 km/h en 5 secondes.
Quelle est son accélération en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ et en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$?

3. Un camion, en cours de freinage sur route rectiligne, a une vitesse de 50 km/h à l'instant t et aura une vitesse de 48 km/h au bout de 0,5 s.
Représentez le vecteur vitesse et le vecteur accélération à l'instant t, en prenant pour échelles :
$1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \triangleq 0{,}2 \text{ cm}$ et $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \triangleq 2 \text{ cm}$.

4. Décrivez le mouvement représenté par la courbe ci-dessous. Formez l'équation horaire $x = f(t)$ pour les phases (B) et (C) du mouvement.



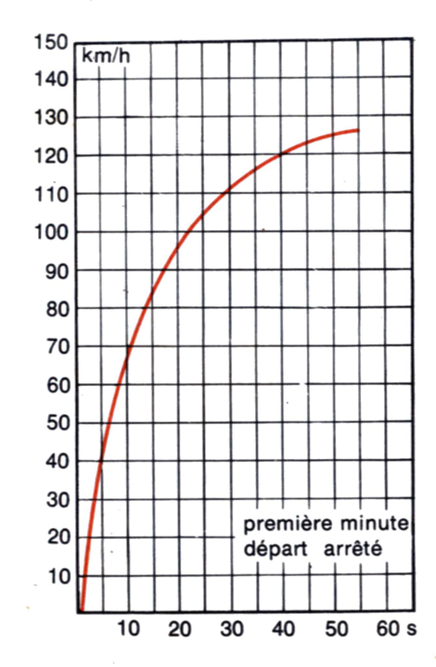
5. Une particule mobile sur une droite parcourt 2 cm pendant la milliseconde qui précède l'instant t et 2,3 cm pendant la milliseconde suivante. Calculez la vitesse et l'accélération à l'instant t, en unités SI.

6. Formez l'équation horaire $x = f(t)$ d'un mouvement rectiligne uniforme sur un axe Ox, à la vitesse de $2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, vers les x décroissants, en partant de l'abscisse 10 cm lorsque $t = 0$.

Exploitation de documents.

7. La courbe ci-dessous représente la vitesse en fonction du temps, obtenue au cours des essais d'une automobile.

a) En déduire la courbe représentative de l'accélération en fonction du temps (on déterminera l'accélération toutes les 10 secondes, depuis $t = 5$ s jusqu'à $t = 55$ s).



Interprétez la courbe obtenue, en évoquant notamment la puissance du moteur et la résistance de l'air.

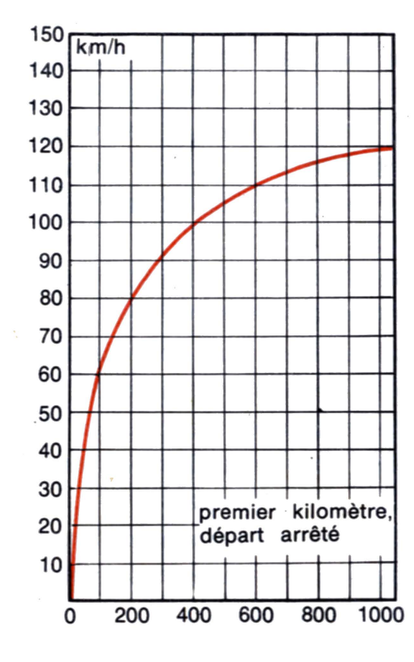
b) Déterminez l'espace parcouru entre $t = 0$ et $t = 60$ s, par intégration graphique (en déterminant approximativement l'aire comprise entre la courbe et l'axe des temps).

Réponse : **b)** espace parcouru $\approx$ 1,6 km.

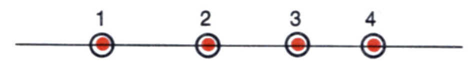
8. La courbe ci-dessous représente la vitesse v d'une automobile.
Cette courbe est établie en fonction de l'espace parcouru x, au cours d'un essai à puissance maximale.

a) Montrez que la pente de la courbe en un point est égale au quotient de l'accélération par la vitesse.

b) En déduire l'accélération lorsque la vitesse est de 100 km/h. (On l'exprimera en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ et en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).



9. La figure représente à l'échelle $\frac{1}{10}$ quatre positions successives d'un mobile, décalquées sur un document stroboscopique. La fréquence des éclairs à la prise de vue était de 10 par seconde. En orientant la trajectoire dans le sens du mouvement, calculez les mesures algébriques de la vitesse et de l'accélération dans les positions 2 et 3.

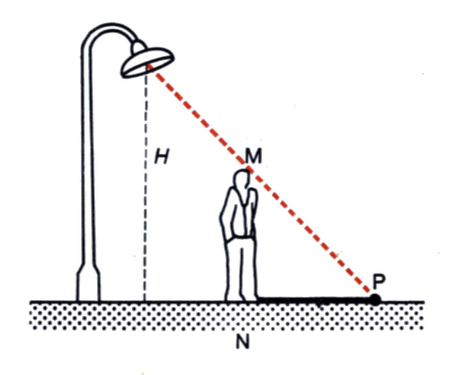


Approfondissement.

Les exercices signalés par un carré rouge présentent une plus grande difficulté que les autres.

10. Dans l'exercice traité en fin de chapitre (pierre lancée vers le haut), reprendre la première question en exprimant la conservation de l'énergie. A la deuxième question, on a résolu une équation du second degré dont on n'a retenu que la racine positive : interprétez la racine négative.

11. Un homme de taille $MN = h = 180$ cm se déplace à la vitesse $v = 1$ m . s^{-1} en s'éloignant d'un lampadaire (figure ci-dessous). La lampe se trouve a une hauteur $H = 4$ m au-dessus du sol.
Calculez la vitesse v' de P, extrémité de l'ombre de l'homme sur le sol.



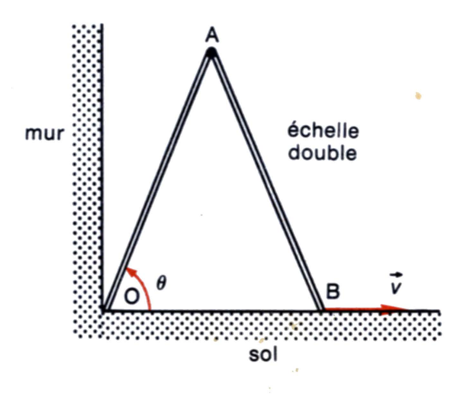
12. Bernard et Francesco roulent côte à côte à bicyclette à la vitesse constante de 36 km/h. Subitement, Bernard accélère et prend 4,5 mètres d'avance au bout de 3 secondes. La vitesse de Francesco n'a pas varié.

a) Calculez l'accélération de Bernard en supposant que son mouvement est uniformément varié.

b) Calculez la vitesse de Bernard au bout des 3 secondes.

c) L'accélération de Bernard est-elle la même suivant qu'on prend comme référentiel la Terre ou Francesco ?

13. Une échelle double OAB est appuyée au bas d'un mur en O et le deuxième point d'appui B glisse sur le sol à la vitesse v (figure ci-dessous). Sachant que $OA = AB = 2{,}5$ m, calculez v lorsque l'angle $\widehat{AOB}$ vaut 60° et que la vitesse angulaire de OA est de 10 degrés par seconde.



14. Un athlète parcourt 100 m en 10,8 s. On admet que son mouvement est uniformément accéléré pendant les 20 premiers mètres, puis sa vitesse est constante sur le reste du parcours.
Calculez la vitesse moyenne et la vitesse en fin de parcours, en m . s^{-1} et en km/h.

15. On a enregistré une partie du mouvement d'un cylindre sur un plan incliné. Prenons pour origine des espaces parcourus x la première position enregistrée ; l'instant correspondant est considéré comme origine des dates t. On obtient ainsi le tableau de mesures suivant (les distances sont mesurées à un demi centimètre près) :

t (s)	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25
x (cm)	17	40	69	103,5	144

a) Vérifiez que les espaces parcourus sont en progression arithmétique, aux erreurs de mesure près. En déduire une valeur approchée de l'accélération.

b) Quel est l'espace parcouru depuis le début du mouvement, en admettant que le cylindre a été lâché sans vitesse initiale ?

16. Dans l'expérience dite « de la machine de Morin », on enregistre la chute libre d'un corps de la façon suivante : un corps tombe le long d'un cylindre d'axe vertical qui tourne à vitesse angulaire constante. Un stylet solidaire du mobile inscrit une trace sur une feuille de papier enroulée sur le cylindre. On obtient ainsi l'espace parcouru en fonction du temps, connaissant la vitesse angulaire du cylindre. Toutefois, l'origine du mouvement est bien précisée dans l'espace, mais pas dans le temps.
On a calculé que sur l'enregistrement, le déplacement horizontal x est de 11 cm pour un temps écoulé de 0,1 s. On détermine les valeurs de x pour des déplacements verticaux y en progression géométrique.

y (cm)	1	4	9	16	25
x (cm)	8,0	13,0	17,9	23,0	27,9

a) Représentez graphiquement sur papier millimétré la variation de $\sqrt{y}$ en fonction de x. Vous obtenez une droite : pourquoi ne passe-t-elle pas par l'origine ? Déterminez son coefficient angulaire.

b) En déduire la valeur de l'accélération de la pesanteur.

17. Une pierre est lancée verticalement vers le haut à la vitesse de 10 m . s^{-1}, puis une deuxième pierre est lancée dans les mêmes conditions, une seconde plus tard. Au bout de combien de temps se rencontrent-elles, et à quelle hauteur ?

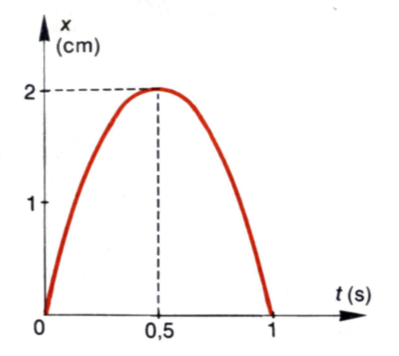
18. Deux projectiles A et B sont lancés verticalement avec la même vitesse initiale V_0, l'un vers le haut, l'autre vers le bas. Déterminez la loi de variation de la distance *AB* en fonction du temps. Application numérique : calculez V_0, sachant que $AB = 10$ m au bout d'une seconde.

19 Sur la figure ci-dessous, *x* représente l'abscisse d'un mobile sur une trajectoire rectiligne et *t* la date. La courbe est une arche de sinusoïde. Déterminez :

a) l'équation horaire du mouvement $x = f(t)$;

b) la vitesse initiale ;

c) l'accélération maximale.



20 **a)** La loi horaire générale d'un mouvement sinusoïdal s'exprime sous la forme :

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C .$$

A, *B*, *C* et ω sont des constantes. En quelles unités s'expriment-elles ?

b) En prenant convenablement l'origine des abscisses, on peut s'arranger pour que $C = 0$.

En outre, on suppose connues les valeurs x_0 et v_0 de l'abscisse *x* et de la vitesse $\frac{dx}{dt}$ à l'instant $t = 0$. Déterminez *A* et *B*.

c) Montrez que l'on peut écrire *x* sous la forme $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$.
Déterminez x_m et φ, connaissant x_0 et v_0.

21 On lâche une petite bille de verre sans vitesse initiale dans un liquide visqueux. On constate que sa vitesse varie suivant la loi :

$$v = V(1 - e^{-t/\tau}) .$$

τ est une constante qui a la dimension d'un temps ; on l'appelle constante de temps du mouvement.

a) Interprétez en complétant les phrases suivantes : *V* est la vitesse... de la bille ; τ est le temps au bout duquel l'écart $(V - v)$ est divisé par...

b) Représentez graphiquement *v* en fonction du temps.

c) Exprimez l'accélération en fonction du temps. Quelle est l'accélération initiale ?

d) Exprimez l'espace parcouru *x* en fonction du temps.

22 Deux voitures A_1 et A_2 roulant à la vitesse de 90 km/h se suivent à 50 m de distance. Le passage de A_1 devant le panneau d'entrée d'une agglomération sera pris comme origine des abscisses *x* et des temps *t*. A l'instant $t = 0$, le conducteur de la voiture A_1 freine et ajuste sa vitesse à 60 km/h en 5 secondes, suivant un mouvement uniformément varié.

a) Quelle est la distance parcourue pendant la phase de freinage ? Représentez graphiquement son abscisse x_1 en fonction de *t*, pour *t* variant de − 5 s à + 10 s.

b) Deux secondes après le début du freinage de A_1, le conducteur de A_2 freine à son tour, de la même façon que A_1. Représentez x_2 en fonction du temps sur le même graphique que le précédent après avoir déterminé numériquement la valeur de x_2 en début de freinage, ainsi que la distance finale entre les deux véhicules.

c) Si d'autres autos A_3, A_4, ..., A_n suivent, régulièrement espacées, le freinage se répercute de proche en proche, à la manière d'une onde *x* se propageant dans un milieu. Calculez la vitesse de propagation de « l'onde de freinage ».
(A présent, vous êtes en mesure de comprendre aussi le comportement des véhicules sur une autoroute, un jour d'embouteillages).

23 **Freinage progressif.** Dans certains véhicules de transport en commun (métro, par exemple) on met en œuvre un freinage progressif, pour assurer un bon confort.
A cet effet, la valeur algébrique a_x de l'accélération n'est pas constante au cours du freinage.
On définit son taux de variation : $b_x = \frac{da_x}{dt}$, et on prend comme origine des dates *t* le début du freinage.

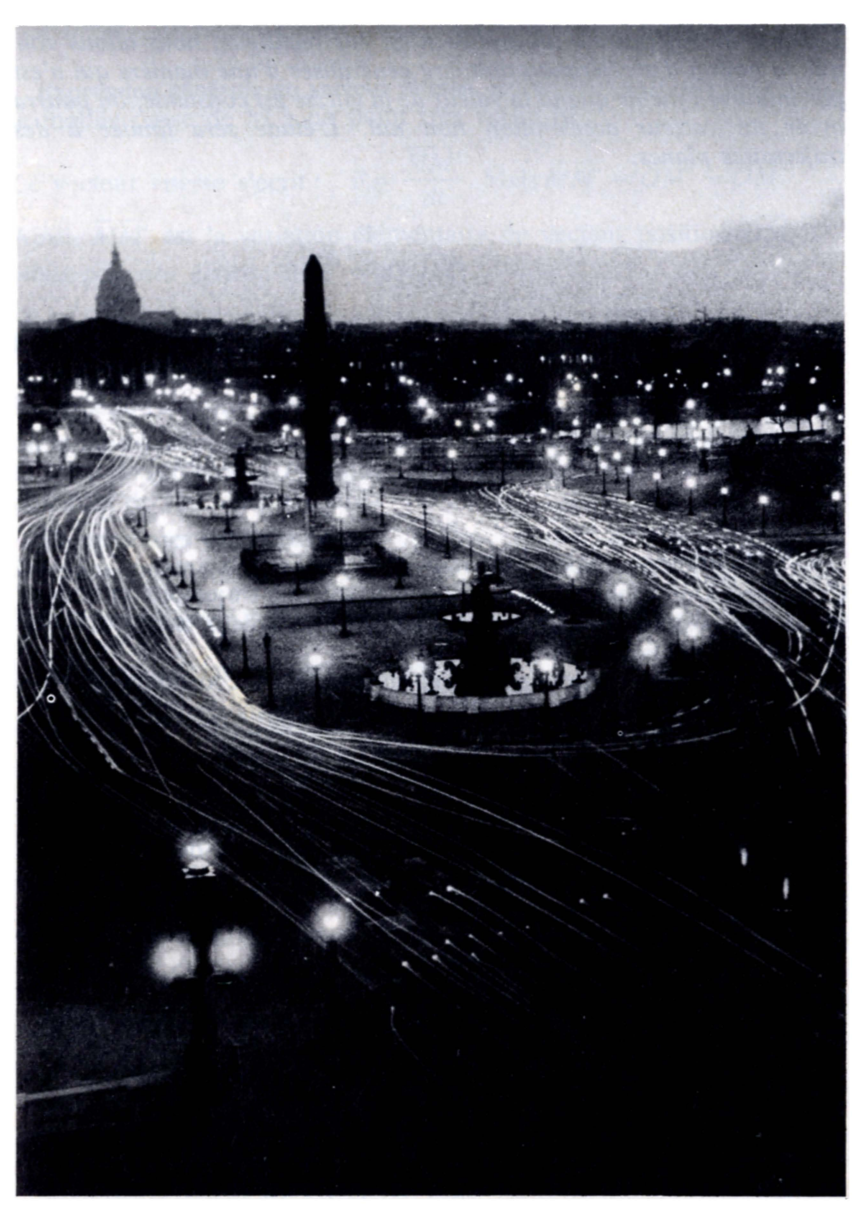
a) Partant d'une vitesse constante *V*, on applique $b_x = -B$ (avec *B* constant et positif) entre $t = 0$ et $t = \tau$.
Exprimez les mesures algébriques a_x et v_x de l'accélération et de la vitesse en fonction du temps *t* pour *t* compris entre 0 et τ.

b) Le freinage se poursuit avec $b_x = 0$ (accélération constante $= -B\tau$) pour $\tau < t < 4\tau$.
On posera $t' = t - \tau$, ce qui revient à prendre l'origine des temps au début de cette phase de freinage.
Exprimez v_x en fonction de t', puis calculer v_x lorsque $t' = 3\tau$ (soit $t = 4\tau$).

c) Au cours de la dernière phase de freinage $b_x = +B$. On posera $t'' = t - 4\tau$. Exprimez a_x et v_x en fonction de t'', puis calculer v_x lorsque $t'' = \tau$ (soit $t = 5\tau$). On cesse alors de freiner.

d) La vitesse initiale est $V = 20$ m . s^{-1} (ou 72 km/h) et $\tau = 3$ s. Quelle doit être la valeur de *B* pour que $v_x = 0$ lorsque $t = 5\tau$ (freinage complet) ?

e) Avec les valeurs numériques de la question précédente, représentez graphiquement v_x en fonction du temps, avec l'échelle 1 s ≙ 1 cm et 2 m . s^{-1} ≙ 1 cm.
En déduire, par intégration graphique, la distance parcourue au cours du freinage.



Photographie de nuit, en pose. Les phares des voitures inscrivent leurs trajectoires ; les clignotants s'observent en pointillés.

2 Cinématique des mouvements curvilignes.

I. Étude générale.

1. Repérages.
2. Vecteur vitesse.
3. Vecteur accélération.
4. Exercices pratiques.

II. Étude de cas particuliers.

1. Mouvement à vecteur accélération constant.
2. Mouvement circulaire uniforme.

Récapitulation.

Lorsque la trajectoire d'un mobile n'est pas rectiligne, nous allons voir que la notion d'accélération doit être généralisée d'une manière qui n'est pas intuitive : même quand la valeur de la vitesse est constante, on pourra avoir un vecteur accélération non nul. L'étude sera limitée à des trajectoires planes.

I. Étude générale.

1. Repérages.

• **Coordonnées :**

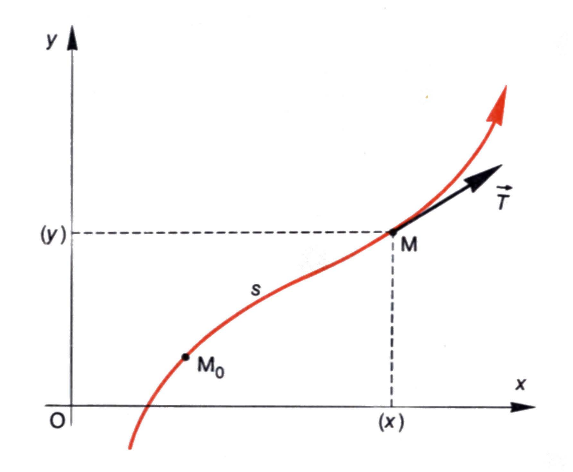
Considérons un mobile M qui se déplace sur une trajectoire curviligne plane. La position de M peut se repérer grâce à deux axes Ox et Oy situés dans le plan de la trajectoire.
Le mouvement est déterminé quand on connaît les coordonnées x et y de M en fonction du temps ; la loi horaire du mouvement est ainsi traduite par 2 équations :

$$x = f(t) \quad \text{et} \quad y = g(t) .$$

Remarque. En éliminant t entre les expressions de x et de y, on obtient une relation entre x et y vérifiée à tout instant par le mobile : c'est l'équation cartésienne de la trajectoire.

• **Abscisse curviligne.**

Orientons arbitrairement la trajectoire et faisons le choix d'une origine M_0. L'abscisse curviligne du mobile M sur la trajectoire est un nombre réel s défini de la façon suivante :
— La valeur absolue de s est égale à la longueur de trajectoire située entre M_0 et M.
— Le signe est (+) si l'on va de M_0 à M en se déplaçant dans le sens où la trajectoire est orientée. Le signe est (−) dans le cas contraire.
Lorsqu'on connaît l'abscisse curviligne du mobile en fonction du temps, le mouvement est complètement déterminé.



1. La trajectoire étant orientée, et étant donnée une origine M_0, la mesure algébrique $s = \widehat{M_0 M}$ est l'abscisse curviligne du point M. Le vecteur unitaire $\vec{T}$ de la tangente en M est orienté dans le même sens que la courbe.

2. Vecteur vitesse.

- **Expression générale du vecteur vitesse.** Entre deux instants t et $t + dt$, le mobile passe de M à un point très voisin M′.

Le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{MM'}}{dt}$. Mais $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$.

Ainsi, $\overrightarrow{MM'}$ est la variation élémentaire du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
Nous pouvons écrire : $\overrightarrow{MM'} = d(\overrightarrow{OM})$.

Par suite :
$$\boxed{\vec{v} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}}.$$

Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

Dans cette relation, O est un point quelconque, fixe dans le référentiel où le mouvement est étudié. Le vecteur $\vec{v}$ est défini quand on s'est fixé le corps de référence (référentiel), il n'est pas nécessaire d'avoir précisé des axes de référence (repère).

- **Composantes cartésiennes.**

Dans un système d'axes Oxy, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour composantes x et y.

Le vecteur vitesse a donc pour composantes : $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ et $v_y = \dfrac{dy}{dt}$.

- **Autre expression du vecteur vitesse.**

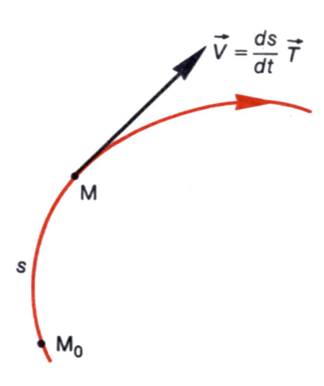
Introduisons un vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire en M, et orienté dans le sens des abscisses curvilignes croissantes. Le vecteur vitesse est colinéaire à $\vec{T}$.

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire.

D'où, en fonction de l'abscisse curviligne :
$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{T}}.$$

En effet, on vérifie que les modules des deux membres sont égaux, car $\left|\dfrac{ds}{dt}\right|$ représente l'espace parcouru par unité de temps. D'autre part, $\vec{v}$ est dans le sens de $\vec{T}$ quand le mouvement a lieu dans le sens des abscisses curvilignes croissantes $\left(\dfrac{ds}{dt} > 0\right)$, et $\vec{v}$ est en sens contraire de $\vec{T}$ quand le mobile se déplace vers les s décroissants.

Remarque. La dérivée $\dfrac{ds}{dt}$ est algébrique : elle peut être positive ou négative. Elle ne doit donc pas être confondue avec le module v de la vitesse. Nous l'appellerons **vitesse tangentielle :** $v_T = \dfrac{ds}{dt}$.



2. Le vecteur vitesse, exprimé en fonction de l'abscisse curviligne s : $\vec{V} = \dot{s}\vec{T}$, où $\vec{T}$ est le vecteur unitaire de la tangente.

3. Vecteur accélération.

a) Définition.

Il y a accélération non seulement quand la vitesse varie, mais aussi quand il y a changement de direction du vecteur vitesse, même si son module reste constant. Le vecteur accélération est le taux de variation du vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

En remplaçant $\vec{v}$ par $\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$, on peut aussi écrire :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2}}.$$

Le vecteur accélération est la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps.

b) Composantes.

• **Composantes cartésiennes.** Dans un repère cartésien Oxy, situé dans le plan de la trajectoire, les composantes du vecteur accélération sont :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{ou} \quad \dot{v}_x, \quad \text{et} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \text{ou} \quad \dot{v}_y.$$

En remplaçant v_x et v_y par leurs expressions $\dot{x}$ et $\dot{y}$, nous pouvons aussi écrire :

$$a_x = \ddot{x} \quad \text{et} \quad a_y = \ddot{y}.$$

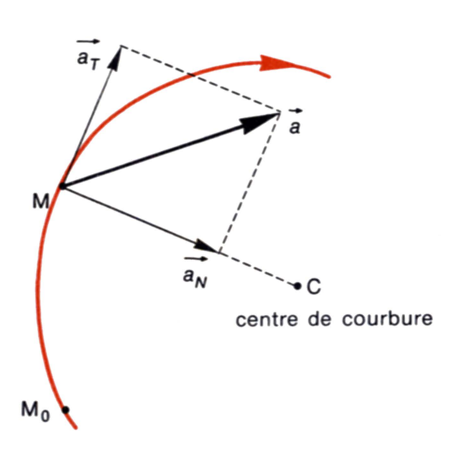
• **Composante tangentielle et composante normale.**

Après avoir orienté la trajectoire, introduisons le vecteur unitaire tangent $\vec{T}$, et un vecteur unitaire $\vec{N}$, perpendiculaire à $\vec{T}$, orienté vers la concavité de la trajectoire. Au voisinage du point M, la courbe est assimilable à une petite portion de cercle dont le centre C est dans la direction et le sens indiqués par $\vec{N}$: on dit que C est **le centre de courbure** de la trajectoire au point M et que la longueur CM en est **le rayon de courbure.**

Posons $CM = R$.

L'accélération $\vec{a}$ au point M peut être décomposée sur les vecteurs unitaires $\vec{T}$ et $\vec{N}$:

$$\vec{a} = a_T\,\vec{T} + a_N\,\vec{N}.$$



3. Composante tangentielle et composante normale du vecteur accélération. L'accélération normale est dirigée vers le centre de courbure.

On dit que a_T et a_N sont les composantes tangentielle et normale de l'accélération. On dit aussi que $a_T \vec{T}$ est le vecteur **accélération tangentielle** et que $a_N \vec{N}$ est le vecteur **accélération normale.**
Nous admettrons sans démonstration les expressions des composantes a_T et a_N :

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} \text{ ou } \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{et} \quad a_N = \frac{v^2}{R}}.$$

Le vecteur accélération possède une composante tangentielle et une composante normale.

Lorsque la trajectoire est rectiligne, le centre de courbure est rejeté à l'infini, de sorte que $\frac{1}{R} = 0$. L'accélération normale est alors nulle et il reste seulement $a_T = \frac{d^2 s}{dt^2}$. Nous retrouvons l'expression écrite au chapitre précédent avec d'autres notations : $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$.

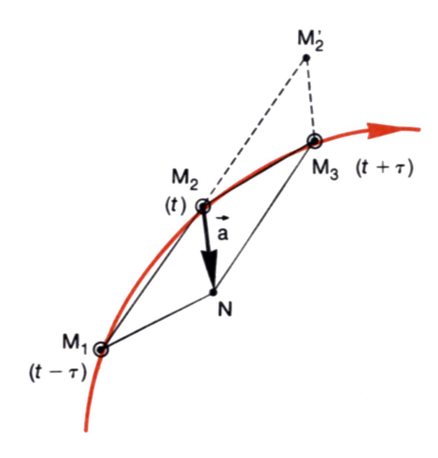
4. Exercices pratiques.

a) Détermination expérimentale du vecteur accélération.

Nous partons d'un enregistrement des positions à des instants régulièrement espacés (intervalles de temps τ). Considérons trois points consécutifs M_1, M_2, M_3 (figure 4).
Aux instants $t - \frac{\tau}{2}$ et $t + \frac{\tau}{2}$ la vitesse est pratiquement égale à $\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\tau}$ et $\frac{\overrightarrow{M_2 M_3}}{\tau}$. La variation de vitesse dans l'intervalle de temps $\left(t - \frac{\tau}{2}, t + \frac{\tau}{2}\right)$, de durée τ, est $\frac{1}{\tau}(\overrightarrow{M_2 M_3} - \overrightarrow{M_1 M_2})$.
Le vecteur accélération est donc :

$$\vec{a}_{M_2} \approx \frac{\overrightarrow{M_2 M_3} - \overrightarrow{M_1 M_2}}{\tau^2}.$$

Construisons le parallélogramme $M_1 M_2 M_3 N$ qui s'appuie sur les vecteurs $\overrightarrow{M_1 M_2}$ et $\overrightarrow{M_2 M_3}$.



4. Construction graphique du vecteur accélération en un point, à partir d'un document stroboscopique.

Au point M_2, l'accélération est $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{M_2 N}}{\tau^2}$.

Si l'on construit M'_2 tel que $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_2 M'_2}$, l'accélération en M_2 s'écrit aussi : $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{M'_2 M_3}}{\tau^2}$.

On a : $\overrightarrow{M_2M_3} - \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_2M_3} + \overrightarrow{M_3N} = \overrightarrow{M_2N}$.

Par suite :

$$\boxed{a_{M_2} \approx \frac{\overrightarrow{M_2N}}{\tau^2}}.$$

b) Détermination graphique d'une trajectoire.

Exercice : Un mobile A quasi ponctuel est lancé dans un plan avec une vitesse initiale de 1 cm.s^{-1}. Le vecteur accélération $\vec{a}$ est dirigé constamment vers un point fixe O du plan, et sa valeur reste égale à 0,5 cm.s^{-2}. Initialement ($t = 0$), le mobile est en A_0, à une distance de O égale à 5 cm, et le vecteur vitesse initiale v_0 est perpendiculaire à OA_0. En déduire un tracé de la trajectoire en déterminant graphiquement les positions approximatives, toutes les secondes, jusqu'à ce que le mobile atteigne le point O.

Solution : Considérons des instants $t_0 = 0$, $t_1 = \tau$, $t_2 = 2\tau, \ldots, t_n = n\tau\ldots$ Les vitesses y sont $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\ldots$
Entre t_n et $(t_n + \tau)$, le déplacement est voisin de $\vec{v}_n\,\tau$

$$\overrightarrow{A_nA_{n+1}} \approx \vec{v}_n\,\tau.$$

A l'instant $t_n + \tau$ la vitesse est $\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \vec{a}\tau$; entre $(t_n + \tau)$ et $(t_n + 2\tau)$, le déplacement est :

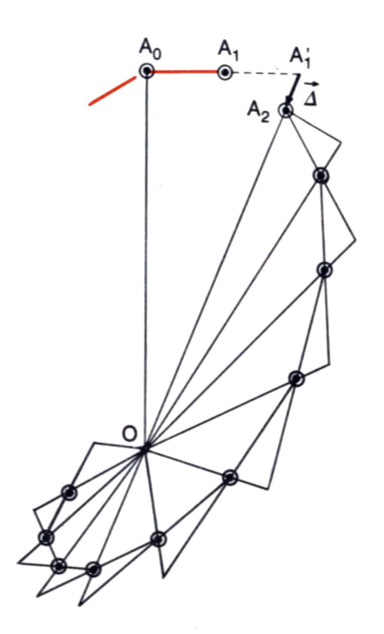
$$\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}} \approx \vec{v}_{n+1}\,\tau = \vec{v}_n\,\tau + \vec{a}\tau^2$$
$$\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}} \approx \overrightarrow{A_nA_{n+1}} + \vec{a}\tau^2.$$

Ainsi, un déplacement s'obtient en ajoutant $\vec{a}\tau^2$ au déplacement précédent. Notons $\vec{\Delta}$ cet incrément. Pour la détermination graphique demandée (figure 5) prenons $\tau = 1$ s. Alors, le premier déplacement $\overrightarrow{A_0A_1}$, parallèle à $\vec{v}_0$ a pour longueur $A_0A_1 = v_0\,\tau = 1$ cm. L'incrément $\vec{\Delta} = \vec{a}\tau^2$ a pour longueur $0{,}5 \times (1)^2 = 0{,}5$ cm.
Ainsi :

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_0A_1} + \vec{\Delta} = \overrightarrow{A_1A_1'} + \vec{\Delta}$$
$$\overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} + \vec{\Delta} = \overrightarrow{A_2A_2'} + \vec{\Delta}.$$

On détermine ainsi de proche en proche les points A_3, A_4, A_5, etc...

Remarque : Deux causes d'erreurs se présentent : d'une part la méthode est approximative dans son principe, d'autre part les tracés graphiques, aussi soigneux soient-ils, ne sont jamais rigoureux. L'incertitude sur la position de A_n est d'autant plus importante que n est plus grand, car une erreur se répercute sur toute la suite du tracé.
Chaque fois que cela est possible, on préférera une détermination précise de la trajectoire par le calcul.



5. Construction point par point d'une trajectoire.

II. Étude de cas particuliers.

1. Mouvement à vecteur accélération constant.

- Considérons une particule lancée avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ et dont le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant, dans un référentiel donné. Introduisons un repère cartésien Oxyz tel que $\vec{a}$ soit porté par Oy et que $\vec{v_0}$ soit dans le plan xOy (figure 6). Les composantes de $\vec{a}$ et de $\vec{v_0}$ sont :

$$\vec{a}(0, a_y, 0) \quad \text{et} \quad \vec{v_0}(v_{ox}, v_{oy}, 0)\,.$$

Exprimons les composantes de $\vec{a}$ à partir des dérivées secondes des coordonnées :

$$\ddot{x} = 0\,; \quad \ddot{y} = a_y\,; \quad \ddot{z} = 0\,.$$

Intégrons, compte tenu des conditions initiales :

$$\dot{x} = v_{ox}\,; \quad \dot{y} = a_y\,t + v_{oy}\,; \quad \dot{z} = 0\,.$$

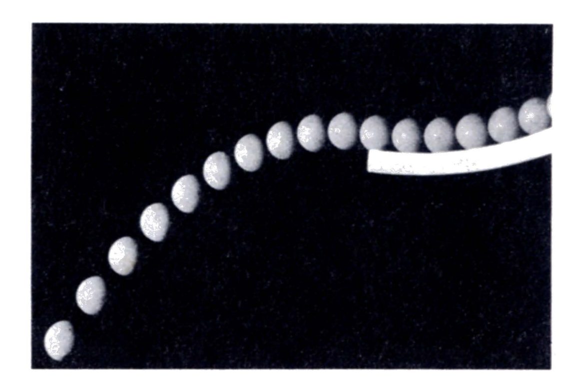
Intégrons encore, en notant que les trois coordonnées sont nulles à l'instant origine :

$$x = v_{ox}\,t\,; \quad y = \frac{1}{2}a_y\,t^2 + v_{oy}\,t\,; \quad z = 0\,.$$

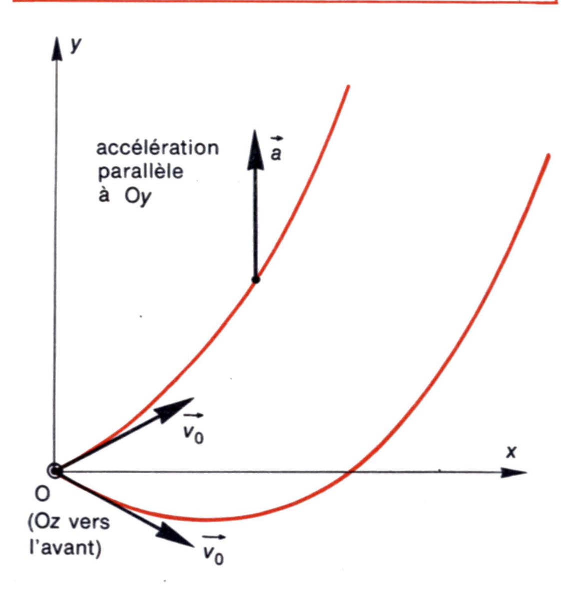
- Les équations obtenues indiquent les variations des coordonnées en fonction du temps : ce sont **les équations paramétriques** de la trajectoire. On note, en particulier, que z reste nul ; le mouvement a donc lieu dans le plan xOy, défini par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{v_0}$. Pour obtenir **l'équation cartésienne** de la trajectoire dans xOy, éliminons le temps (ce qui est possible car $v_{ox} \neq 0$) :

$$t = \frac{x}{v_{ox}}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{1}{2}\frac{a_y}{v_{ox}^2}x^2 + \frac{v_{oy}}{v_{ox}}x\,.$$

Cette équation, de la forme $y = Ax^2 + Bx$, montre que la trajectoire est une portion de **parabole** dont l'axe est parallèle à Oy.
La figure montre deux trajectoires obtenues avec un même vecteur accélération, mais des vitesses initiales orientées différemment. Nous



Lorsque le vecteur accélération est constant, la trajectoire est une parabole.



6. Mouvement à vecteur accélération constant. Choix des axes et tracé de deux trajectoires (paraboles).

étudierons plus loin deux cas de mouvements de ce type : particule pesante dans le champ de pesanteur, particule chargée dans un champ électrique uniforme.

• **Remarque :** Au cours du calcul, nous avons éliminé le cas particulier où v_{ox} serait nul, au moment de passer à l'équation cartésienne. Dans ce cas particulier, x reste constamment nul et la trajectoire se confond avec l'axe Oy : nous sommes ramenés à un mouvement rectiligne uniformément varié.

2. Mouvement circulaire uniforme.

a) Rappels.

Énonçons rapidement des résultats déjà établis en classe de Première.

• Un mobile ponctuel se déplaçant sur un cercle, à vitesse constante, a un **mouvement circulaire uniforme.**

• Soit M_0 la position du mobile M à l'instant choisi comme origine des temps. Il est commode d'orienter la trajectoire dans le sens du mouvement. **L'abscisse curviligne** est ainsi la mesure algébrique de l'arc décrit par le mobile :

$$s = \widehat{M_0 M}.$$

Le rayon qui joint M au centre du cercle a tourné d'un angle θ, appelé **abscisse angulaire** du mobile

$$\theta = (\overrightarrow{OM}_0, \overrightarrow{OM}).$$

Soit R le rayon du cercle. La valeur de θ, en radian, est reliée à l'abscisse curviligne par

$$\boxed{s = R\theta}.$$

• **La vitesse angulaire** ω du mobile représente l'angle balayé par le rayon OM pendant l'unité de temps. Les grandeurs ω, θ et t sont reliées par la relation : $\theta = \omega t$.

D'autre part, la vitesse étant v, l'abscisse curviligne est :

$$s = vt.$$

Formons le rapport s/θ : $\dfrac{s}{\theta} = R = \dfrac{v}{\omega}.$

Les grandeurs ω et v sont donc reliées par :

$$\boxed{v = R\omega}.$$

En vue d'applications numériques, il faudra se rappeler que ω s'exprime en rad . s^{-1}, si R est en mètre, et v en m . s^{-1}.

• A partir de la relation $\theta = \omega t$, nous pouvons calculer l'intervalle de temps T nécessaire pour parcourir un tour ($\theta = 2\pi$) :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}.$$

Le mouvement se répète périodiquement : T est la **période.** En une seconde, le nombre de tours parcourus est :

$$\boxed{N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}.$$

On l'appelle **fréquence** du mouvement.

b) Vecteur accélération.

• **Application des relations générales.** La composante tangentielle de l'accélération est :

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} = 0\,.$$

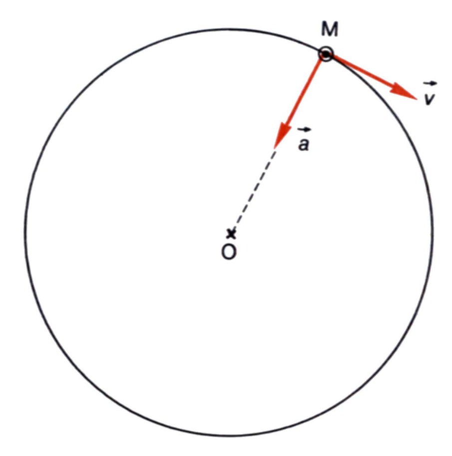
Dans la vie courante, nous dirions que l'accélération est nulle, puisque la vitesse est constante. En réalité, le vecteur accélération a une composante normale :

$$a_N = \frac{v^2}{R}.$$

Nous pouvons donc écrire vectoriellement l'accélération :

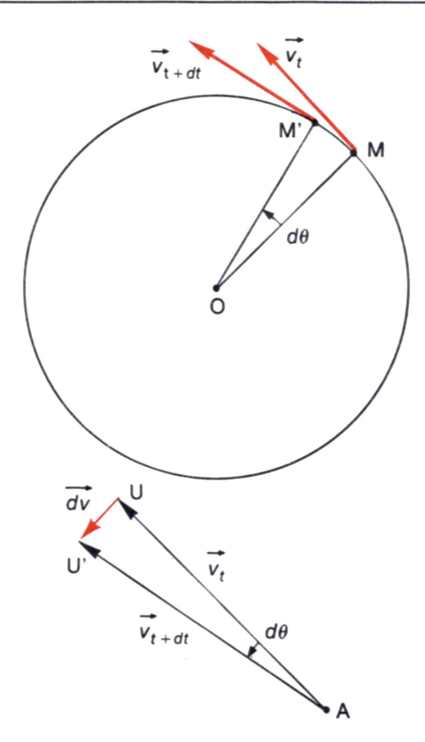
$$\boxed{\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N}}.$$

Elle est dirigée vers la concavité de la trajectoire, c'est-à-dire vers le centre du cercle. On dit que **l'accélération est centripète.**



7. Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète.

Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète.



8. Construction de la variation $d\vec{v}$ de la vitesse entre deux instants voisins.

• **Justification.** Pour un mouvement quelconque nous avions admis l'expression $a_N = \dfrac{v^2}{R}$ sans démonstration. Il est possible de la démontrer dans le cas présent.
A cette fin, considérons deux positions voisines M et M′ d'abscisses angulaires θ et $\theta + d\theta$, aux instants t et $t + dt$ (figure 7). Le vecteur vitesse a même module dans les deux positions, mais sa direction a tourné de $d\theta$.
Représentons les deux vecteurs vitesses à partir d'un même point A, les extrémités étant respectivement U et U′ aux instants t et $t + dt$. La variation $d\vec{v}$ du vecteur vitesse est représentée par :

$$\overrightarrow{AU'} - \overrightarrow{AU} = \overrightarrow{UU'}\,.$$

L'angle $d\theta$ étant très petit, la longueur UU' vaut sensiblement :

$$UU' \approx AU\,.\,d\theta\,.$$

Cette égalité peut se transcrire suivant : $\|\overrightarrow{dv}\| = v d\theta$.

Par suite, $$\|\vec{a}\| = \frac{\|\overrightarrow{dv}\|}{dt} = v\frac{d\theta}{dt} = v\omega = \frac{v^2}{R}.$$

On a ainsi démontré que l'accélération vaut, en module, $\dfrac{v^2}{R}$. D'autre part, la direction et le sens du vecteur accélération sont donnés par $\overrightarrow{UU'}$. L'angle $d\theta$ étant très petit, $\overrightarrow{UU'}$ est pratiquement perpendiculaire à AU c'est-à-dire au vecteur vitesse à l'instant t : il est donc dirigé suivant le rayon du cercle et orienté vers le centre : ceci démontre que le vecteur accélération est centripète.

• **Ordres de grandeurs.**

Exercice : Calculer le module du vecteur accélération, et comparer à l'accélération de la pesanteur, dans les deux cas suivants :
a) mouvement de rotation de la Terre sur elle-même, accélération d'un point situé sur l'Équateur ;
b) mouvement de rotation d'un moteur électrique à la vitesse angulaire de 3 000 tours/min, accélération d'un point situé à 5 cm de l'axe de rotation.
Solution : Dans les deux cas, nous connaissons la vitesse angulaire ω et le rayon de la trajectoire R. L'accélération est : $a = \dfrac{v^2}{R}$ avec $v = \omega R$, par suite $a = \omega^2 R$.

a) Le rayon de la Terre mesure environ 6 400 km, soit $6{,}4 \cdot 10^6$ m. La vitesse angulaire est de un tour en 24 heures environ ; en rad . s^{-1} : $\omega = \dfrac{2\pi}{24 \times 3\,600}$.

Par suite : $$a = \left(\frac{2\pi}{24 \times 3\,600}\right) \times 6{,}4 \cdot 10^6 \simeq 3{,}38 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Cette accélération est beaucoup plus petite que l'accélération de la pesanteur. Formons le rapport :

$$\frac{g}{a} = \frac{10}{3{,}38 \cdot 10^{-2}} \simeq 300 .$$

b) La vitesse angulaire, en rad . s^{-1}, vaut : $\omega = \dfrac{2\pi \times 3\,000}{60} = 100\,\pi$. Par suite $a = (100\,\pi)^2 \times 0{,}05 = 4{,}93 \cdot 10^3$ m . s^{-2}. Ici, l'accélération est beaucoup plus grande que g.

$$\frac{a}{g} = \frac{4{,}93 \cdot 10^3}{10} \simeq 500 .$$

Récapitulation des éléments cinématiques.

	Position	Vitesse	Accélération
Vecteurs	$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$	$\vec{v}$	$\vec{a}$
Relations	$\vec{r} = \int \vec{v}dt$	$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{v} = \int \vec{a}dt$	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
Mesure algébrique sur un axe (Ox)	$r_x = x$	v_x	a_x
Relations	$x = \int v_x\, dt$	$v_x = \dot{x}$ $v_x = \int a_x\, dt$	$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$
Composantes tangentielle et normale	r_N et r_T	$v_N = 0 \quad v_T = \dfrac{ds}{dt}$	$a_N = \dfrac{v^2}{R} \quad a_T = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$

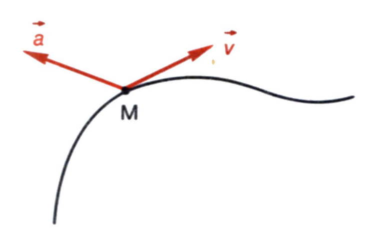
Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- La position d'un point sur une courbe est définie par son abscisse ________ . Le vecteur vitesse en un point a une direction ________ à la trajectoire, alors que le vecteur accélération a une direction ________ .
- Le vecteur accélération s'obtient en ________ le vecteur vitesse. Les composantes cartésiennes sont les dérivées secondes des ________ du mobile.
- La composante tangentielle de l'accélération s'exprime par $a_T =$ ________ . La composante normale a pour valeur ________ , elle est dirigée vers ________ de la trajectoire.
- Lorsque le vecteur accélération est constant, la trajectoire est une ________ ou une ________ .
- Dans un mouvement circulaire uniforme, le vecteur accélération est dirigé vers le ________ de la trajectoire. On dit que l'accélération est ________ .

Applications immédiates.

1. Expliquez pourquoi la figure ci-dessous ne peut pas être exacte.



2. Une particule se déplace sur un cercle de rayon $R = 10$ cm. A l'instant t, sa vitesse est $v = 2 \text{ cm.s}^{-1}$. Le vecteur accélération est représenté par une flèche $\overrightarrow{MA}$ issue du mobile, avec l'échelle $1 \text{ m.s}^{-2} \triangleq 1$ m. Quel est le lieu du point A, lorsque M est fixé ?

3. Un mobile décrit un segment AB à vitesse constante v, puis un segment BC perpendiculaire à AB, à la même vitesse. Que peut-on dire de l'accélération du mobile, lorsqu'il passe au point B ? Un tel mouvement est-il concrètement possible ? Précisez un cas réel voisin du mouvement envisagé.

4. Dans une centrifugeuse tournant à la vitesse angulaire de 20 000 tours/min, un point du rotor est à une distance de 20 cm de l'axe de rotation. Calculez la vitesse et l'accélération de ce point.

5. La petite aiguille d'une montre-bracelet mesure 1 cm de longueur. Quelles sont la vitesse et l'accélération de l'extrémité de cette aiguille ? (Quel référentiel choisissez-vous pour répondre à cette question ?)

6. Quelle est la vitesse angulaire de la grande aiguille d'une montre-bracelet dans un référentiel qui tourne avec la petite aiguille ? Exprimez le résultat en degrés par heure et en rad.s^{-1}.

7. La Terre est à 150 millions de kilomètres du Soleil et effectue une révolution en 365 jours. Déterminez les valeurs du vecteur vitesse et du vecteur accélération, dans un référentiel lié aux étoiles.

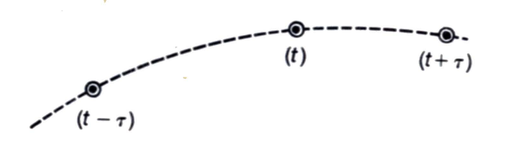
8. Lorsqu'un solide est en rotation autour d'un axe fixe, tous ses points ont même vitesse angulaire. Comment varient les composantes (tangentielle et normale) de l'accélération d'un point, en fonction de la distance à l'axe ?

9. Les tuyaux de fonte sont coulés dans un cylindre disposé horizontalement et tournant autour de son axe à la vitesse angulaire constante de 500 tours/min. Quelles sont la vitesse et l'accélération d'un point de la périphérie, lorsque le diamètre est de 20 cm ?

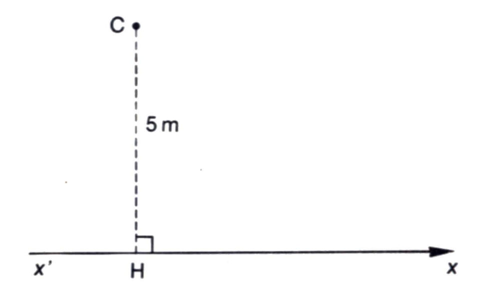
10. Le Soleil effectue autour du centre de la Galaxie un tour en 200 millions d'années. Sachant que la distance du Soleil au centre de la Galaxie est de 32 000 années-lumière, quelles sont la vitesse et l'accélération du Soleil dans ce mouvement ?

Méthodes graphiques.

11. La figure ci-dessous représente trois positions consécutives d'un document chronophotographique, à l'échelle 1/2, les éclairs étant espacés de 0,2 s. Décalquez soigneusement ces trois positions et déterminez le vecteur vitesse et le vecteur accélération à l'instant t.
Représentez ces vecteurs avec les échelles $0{,}1 \text{ m.s}^{-1} \triangleq 1$ cm et $1 \text{ m.s}^{-2} \triangleq 5$ cm.



12. Un chien C se trouve à l'instant $t = 0$ à 5 mètres d'un sentier rectiligne $x'x$. Son maître H est sur ce sentier et l'angle de CH avec $x'x$ est droit à l'instant $t = 0$ (figure ci-dessous).
L'homme se déplace à la vitesse constante de 1 m.s^{-1} sur le sentier, dans le sens $x'x$.
A l'instant $t = 0$, le chien bondit de 1 m en direction de l'homme ; à l'instant $t = 1$ s il effectue un nouveau bond, dirigé vers l'homme au même instant... et ainsi de suite : à raison d'un bond par seconde il décrit une trajectoire polygonale.
Dessinez soigneusement la trajectoire du chien à l'échelle 1/50, entre $t = 0$ et $t = 8$ s. Déterminez graphiquement la distance CH juste avant le 4[e] bond et juste avant le 8[e] bond. La distance diminuera-t-elle encore ?



13. a) En utilisant la méthode exposée dans l'exercice du paragraphe I-4-b du cours, tracez point par point la trajectoire d'un mobile ponctuel, avec une vitesse initiale $v_0 = 1 \text{ cm.s}^{-1}$ et un vecteur accélération $\vec{a}$ constant, de valeur $0{,}5 \text{ cm.s}^{-2}$, dirigé perpendiculairement à $\vec{v_0}$ (on ira jusqu'à $t = 8$ s).
b) Après avoir introduit des axes convenables, retrouvez la trajectoire par le calcul, et tracez la courbe représentative.
Discutez les causes d'écarts entre les deux tracés.

Approfondissement.

Les exercices signalés par un carré rouge □ présentent une plus grande difficulté que les autres.

14. Une voiture prend un virage de rayon de courbure 50 m, en accélérant constamment. On suppose que la vitesse est fonction affine du temps ; à l'entrée du virage, elle est de 60 km/h et à la sortie 80 km/h ; la direction de la trajectoire a tourné de 90°.

a) Déterminez les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération, à l'entrée et à la sortie du virage.

b) Déterminez, dans les mêmes positions, les modules du vecteur accélération.

15. Le mouvement d'un mobile dans un plan xOy est donné par les équations :

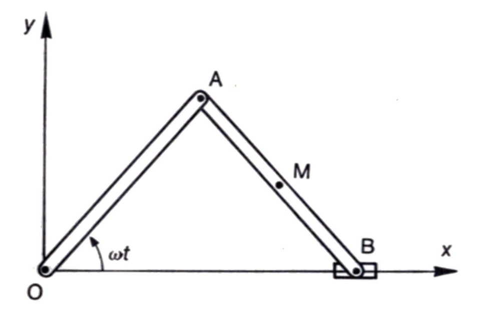
$$x = 2t - t^2 ; \quad y = 4t - 2t^2$$

(x et y sont en mètres et t en secondes). Déterminez la trajectoire du mobile, ainsi que les valeurs de la vitesse et de l'accélération à l'instant t.

16 Dans le dispositif représenté sur la figure ci-dessous, la barre OA tourne autour de O, dans le plan xOy, à la vitesse angulaire ω. L'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA})$ vaut ωt et $OA = AB = a$.

a) Exprimez les coordonnées du point M, milieu de AB, en fonction du temps. Quelle est l'équation cartésienne de la trajectoire de M ? Quelle est sa nature ?

b) Exprimez les composantes de la vitesse et de l'accélération de M. Montrez que le vecteur accélération passe par l'origine O.



17. Le vecteur vitesse d'une particule a pour composantes cartésiennes :

$\dot{x} = 2 \sin t$; $\dot{y} = \cos t$ ($\dot{x}$ et $\dot{y}$ en m . s^{-1}, et t en secondes).

a) Exprimez les coordonnées en fonction du temps, sachant qu'à l'instant $t = 0$, la particule est en un point de Ox tel que $x = 2$ m.

b) En éliminant t entre les expressions des coordonnées, écrivez l'équation cartésienne de la trajectoire.
Quelle est sa nature ?

c) Quelles sont les composantes du vecteur accélération ? Montrez qu'il passe en permanence par l'origine des coordonnées et que son module est proportionnel à la distance à l'origine.

18 **a)** Un moteur entraîne un disque de rayon 10 cm, peint en noir, sauf un petit secteur blanc. Sous éclairage stroboscopique à raison de 40 éclairs par seconde, le disque paraît immobile, et à 80 éclairs par seconde, on distingue deux secteurs blancs. Quelles sont la vitesse et l'accélération d'un point de la périphérie du disque ?

b) On arrête l'alimentation du moteur en maintenant l'éclairage à 40 éclairs par seconde. Expliquez ce qu'on doit observer au cours du ralentissement du moteur.

c) Au cours de la première seconde après l'arrêt de l'alimentation, le secteur blanc paraît faire un tour exactement. En admettant que la vitesse angulaire décroît linéairement dans ce court laps de temps, déterminez l'accélération tangentielle d'un point de la périphérie du disque. Calculez aussi la variation d'accélération normale au cours de cette seconde.

19. La platine d'un électrophone fait un demi-tour avant d'atteindre la vitesse angulaire de 45 tours par minute. On admet que l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est constante pendant ce premier demi-tour.

a) Quelle est la durée de la phase accélératrice et quelle est la valeur de $\ddot{\theta}$?

b) Déterminez la composante tangentielle et la composante radiale du vecteur accélération d'un point situé à 10 cm de l'axe, lorsque le disque a fait un quart de tour.

20 Une roue de rayon R roule sans glisser sur un support rectiligne. Un point I de la périphérie de la roue décrit une courbe appelée cycloïde. Le point I venant en contact avec le support en un point O, on introduit deux axes Ox et Oy (figure ci-dessous).

a) Soit x l'abscisse du centre C de la roue lorsque le contact avec le support se fait au point H. Notons θ l'angle de CI avec CH. Le roulement sans glisser impose que l'arc de cercle $\overset{\frown}{IH}$ ait même longueur que le segment OH. En déduire une relation entre x, R et θ.

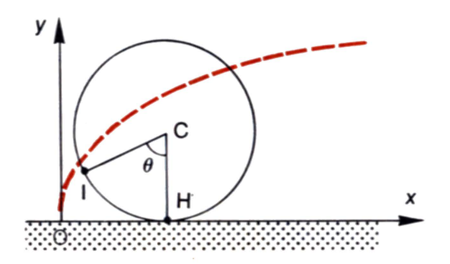
b) En projetant sur les axes l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CI}$, écrire les coordonnées du point I en fonction de x et de R.

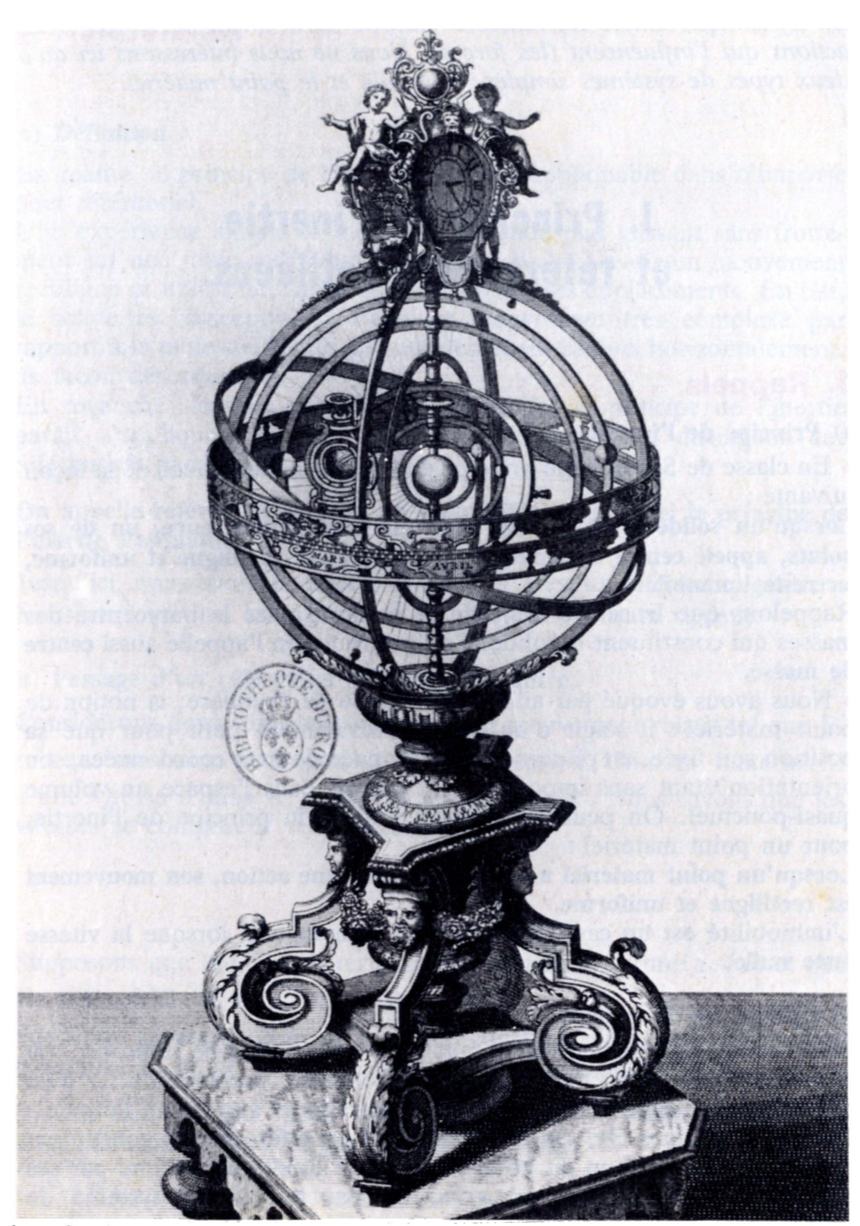
c) En déduire les composantes des vecteurs vitesse et accélération du point I.

d) On suppose que la vitesse du point C est constante. Que peut-on dire du vecteur vitesse lorsque I est au contact avec le support ? Déterminez le vecteur accélération dans cette position.

e) La roue est une roue de voiture de rayon 28 cm, supposée bien gonflée pour qu'on puisse négliger la déformation du pneumatique au contact du sol.
Quelle est l'accélération du point I lorsqu'il passe au contact avec le sol, sachant que l'automobile roule à la vitesse de 120 km/h ? Comparez à l'accélération de la pesanteur.

Réponse : **e)** Accélération verticale vers le haut, environ 400 fois plus grande que g.





Le « Système du monde » selon Copernic.

3 Dynamique étude générale.

I. Principe de l'inertie et référentiels galiléens.

1. Rappels.
2. Référentiels galiléens.
3. Exemples importants.

II. Mouvement du centre d'inertie d'un solide.

1. Variation de la quantité de mouvement d'un solide.
2. Corollaire : théorème du centre d'inertie.
3. Exemple simple : projectile dans le champ de pesanteur.

III. Mouvement d'un point matériel.

1. Relation fondamentale de la dynamique du point matériel.
2. Exemple simple : particule chargée dans un champ électrique uniforme.

La dynamique étudie les relations entre le mouvement des corps et les actions qui l'influencent (les forces). Nous ne nous intéressons ici qu'à deux types de systèmes simples : le solide et le point matériel.

I. Principe de l'inertie et référentiels galiléens.

1. Rappels.

a) Principe de l'inertie.

• En classe de Seconde, le principe de l'inertie a été énoncé de la façon suivante :

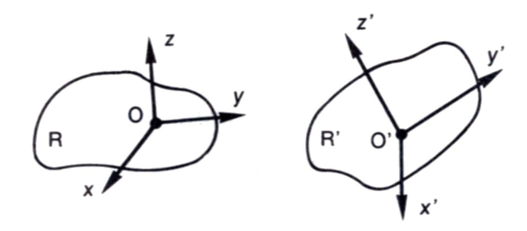
Lorsqu'un solide n'est soumis à aucune action extérieure, un de ses points, appelé centre d'inertie, a un mouvement rectiligne et uniforme, ou reste immobile.

Rappelons que le centre d'inertie se confond avec le barycentre des masses qui constituent le solide, c'est pourquoi on l'appelle aussi **centre de masse.**

• Nous avons évoqué par ailleurs, en classe de Première, la notion de point matériel : il s'agit d'un corps suffisamment petit pour que sa position soit fixée, en pratique, par la donnée de trois coordonnées, son orientation étant sans importance. Il occupe dans l'espace un volume quasi-ponctuel. On peut reprendre l'énoncé du principe de l'inertie, pour un point matériel :

Lorsqu'un point matériel n'est soumis à aucune action, son mouvement est rectiligne et uniforme.

L'immobilité est un cas limite d'un tel mouvement, lorsque la vitesse reste nulle.



1. Référentiels (solides de référence) et repères (systèmes d'axes liés aux référentiels).

b) Référentiels et repères.

Pour étudier un mouvement, il faut préciser le solide de référence, ou référentiel. Le mouvement (trajectoire, vitesse, accélération...) d'un point matériel dépend du référentiel par rapport auquel on l'étudie.

Trois axes gradués Ox, Oy, Oz, tracés sur un référentiel R constituent un repère. La position du point matériel M étudié est définie par ses coordonnées cartésiennes x, y, z, ou par tout autre système de coordonnées.

2. Référentiels galiléens.

a) Définition.

En réalité, le principe de l'inertie n'est pas appliquable dans n'importe quel référentiel.
Une expérience simple le montre : un solide plat glissant sans frottement sur une table soufflante horizontale devrait avoir un mouvement rectiligne et uniforme, car rien ne s'oppose à ses déplacements. En fait, le solide est susceptible d'avoir un mouvement très complexe par rapport à la table soufflante, si nous déplaçons celle-ci horizontalement, de façon désordonnée.
En revanche, lorsque la table est immobile, le principe de l'inertie paraît s'appliquer parfaitement. Nous devons donc distinguer des référentiels particuliers :

On appelle référentiel galiléen un référentiel dans lequel le principe de l'inertie s'applique.

Jusqu'ici, nous avons considéré que la Terre est un référentiel galiléen. Nous verrons plus loin que ce n'est pas vrai en toute rigueur.

Dans un référentiel galiléen, un point matériel soumis à aucune action a un mouvement rectiligne et uniforme.

b) Passage d'un référentiel galiléen à un autre.

Considérons deux référentiels R et R′ en mouvement relatif tel que R′ soit en translation par rapport à R, à la vitesse $\vec{u}$. Un point matériel M a une vitesse $\vec{v}$ dans R, et une vitesse $\vec{v}'$ dans R′. Nous savons que les vitesses se composent vectoriellement :

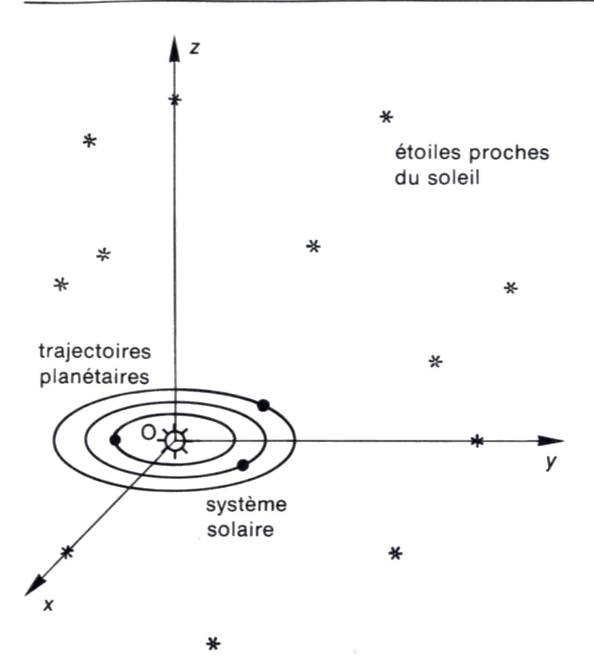
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}.$$

Supposons que le point matériel ne soit soumis à aucune action et que les référentiels R et R′ soient galiléens.
Alors, les vecteurs vitesses $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont constants. Il en résulte que $\vec{u}$ est constant : R′ se déplace à vitesse constante par rapport à R.

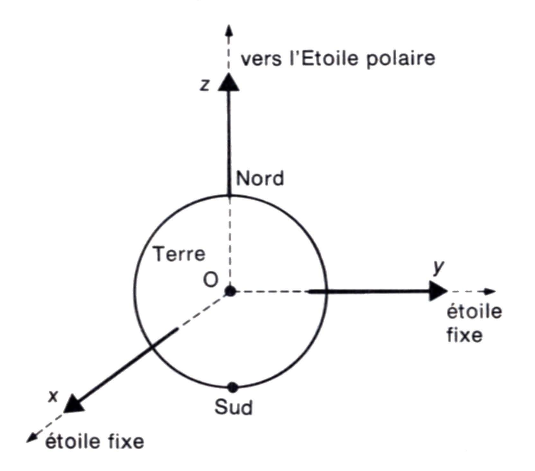
On en conclut que deux référentiels galiléens différents sont en translation uniforme l'un par rapport à l'autre.

Les référentiels galiléens forment donc un ensemble de référentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

Un référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.



2. Le trièdre orthonormé O*xyz* constitue un repère lié au référentiel de Copernic.



3. Le repère O*xyz* est lié au référentiel « géocentrique ». L'origine est au centre de la Terre et les axes sont dirigés vers trois étoiles fixes.

3. Exemples importants.

a) Référentiel stellaire (ou référentiel de Copernic).

Notre Galaxie, c'est-à-dire l'amas de quelques milliards d'étoiles dans lequel se trouve le Soleil, ne constitue pas un solide : elle se déforme, certaines étoiles se déplaçant les unes par rapport aux autres. Cependant, si l'on considère la région de la Galaxie proche du système solaire (par exemple une sphère centrée sur le Soleil et de rayon 100 années-lumière), on constate que les étoiles de cette région apparaissent pratiquement fixes les unes par rapport aux autres.

Ces étoiles, dites « étoiles fixes » constituent un référentiel appelé référentiel de Copernic.

Pour étudier le mouvement des planètes par rapport au référentiel de Copernic, il peut être commode d'introduire un système d'axes orthonormés constituant un repère.

On choisira alors trois axes issus du centre de masse du Système Solaire, et dirigés vers trois étoiles fixes : par exemple, deux axes situés dans le plan de l'Écliptique (plan où se déplacent les planètes) et un troisième axe, perpendiculaire à ce plan.

Les mouvements des planètes peuvent être déterminés avec précision par rapport au référentiel de Copernic, en admettant qu'il est galiléen. Ainsi, les astronomes sont capables de prévoir à mieux qu'une minute près la date de certains phénomènes, par exemple une éclipse de Soleil, avec plusieurs dizaines d'années d'avance.

Les prévisions sont donc très précises et confirment l'hypothèse selon laquelle le référentiel de Copernic est galiléen.

b) Référentiel géocentrique.

• Considérons un repère constitué par un système d'axes issus du centre de la Terre et conservant des directions fixes par rapport au référentiel de Copernic.

L'ensemble des points liés à ce repère constitue un solide (non matérialisé) qu'on appelle couramment **référentiel géocentrique.** Il est en translation par rapport aux étoiles, mais pas en translation uniforme, car le centre de la Terre n'a pas un mouvement rectiligne par rapport aux étoiles. Ce référentiel n'est donc pas galiléen. Toutefois on observe, pour la plupart des mouvements étudiés sur Terre, que le

référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen : il faudra seulement excepter les phénomènes qui manifestement sont influencés par le Soleil et la Lune, à savoir les marées océaniques et les marées atmosphériques.

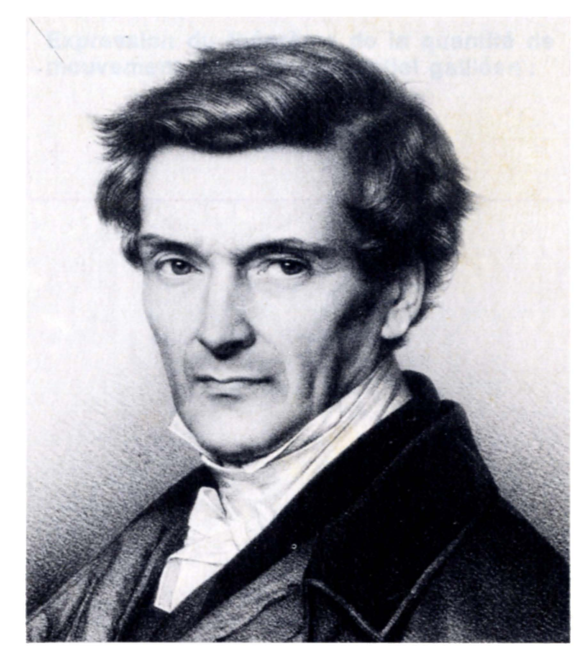
- **Remarques :**

— Dans le référentiel géocentrique, la Terre fait un tour sur elle-même en 24 heures environ. Seuls les points de l'axe Nord-Sud restent fixes durant cette rotation.

— La dénomination « référentiel géocentrique » est peu précise, car il existe une infinité de référentiels dans lesquels le centre de la Terre est fixe : il faudrait encore préciser qu'il doit être en translation par rapport aux étoiles.
On pourrait ajouter le qualificatif « galiléen », mais nous savons qu'il n'est pas tout à fait mérité.
En évitant ces difficultés, l'appellation « référentiel de Coriolis », quelquefois employée, rend hommage à Gustave Coriolis, qui fut le premier à étudier de façon approfondie les changements de référentiels.

c) Référentiel terrestre : il est galiléen en première approximation.

La Terre est un solide que nous prenons couramment comme référentiel. Elle ne constitue pas un référentiel galiléen car la Terre a un mouvement complexe par rapport aux étoiles : rotation sur elle-même, et révolution autour du Soleil.
Toutefois, l'expérience montre que si l'on étudie des mouvements qui ne soient ni trop rapides, ni de durée trop longue, on peut considérer que le référentiel terrestre est galiléen.
Nous reviendrons sur cette approximation au chapitre 6 consacré à la mécanique en référentiel non galiléen.



4. Gustave Coriolis (1792-1843). Il a été le premier à étudier de façon approfondie les changements de référentiels (vers 1830).

Le référentiel stellaire (de Copernic) est galiléen. Le référentiel géocentrique et le référentiel terrestre ne sont galiléens qu'en première approximation.

II. Mouvement du centre d'inertie d'un solide.

1. Variation de la quantité de mouvement d'un solide.

• Vous avez appris, en classe de Seconde, que la quantité de mouvement d'un solide se conserve lorsque le solide est isolé, c'est-à-dire s'il n'est soumis à aucune action. Ce résultat avait été suggéré par des expériences réalisées en classe, le référentiel étant la Terre. En fait, ce résultat se vérifie dans tout référentiel galiléen :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Référentiel galiléen}\\ \text{Pas d'action}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p} \text{ constant, ou } \frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = \vec{0}.$$

• En réalité, les expériences faites en classe ne permettent pas d'observer un solide isolé, mais seulement un solide soumis à des actions qui se compensent. La somme vectorielle des forces qui correspondent à ces actions est nulle. La quantité de mouvement se conserve bien dans ces conditions :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Référentiel galiléen}\\ \text{Actions compensées } (\Sigma\vec{f} = \vec{0})\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p} \text{ constant, ou } \frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = \vec{0}.$$

Supposons à présent que la somme des forces appliquées au solide ne soit pas nulle. Il y a alors variation de quantité de mouvement. Toute expérience réalisable dans ces conditions montrerait que $\frac{\overrightarrow{dp}}{dt}$ est précisément égal à la somme des forces appliquées :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Référentiel galiléen}\\ \text{Actions non compensées } (\Sigma\vec{f} \neq 0)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = \Sigma\vec{f}.$$

Ce résultat constitue **le théorème de la quantité de mouvement** relatif à un solide. Nous pouvons l'énoncer ainsi :

Par rapport à un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement d'un solide est égale à la somme vectorielle des forces appliquées au solide.

Expression du théorème de la quantité de mouvement dans un référentiel galiléen :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{f}.$$

- **Remarques.**

— Rappelons que **le théorème de l'énergie cinétique,** pour un petit déplacement d'un solide, s'écrit :

$$dE_C = \delta W$$

(variation d'énergie cinétique = travail des forces appliquées.)

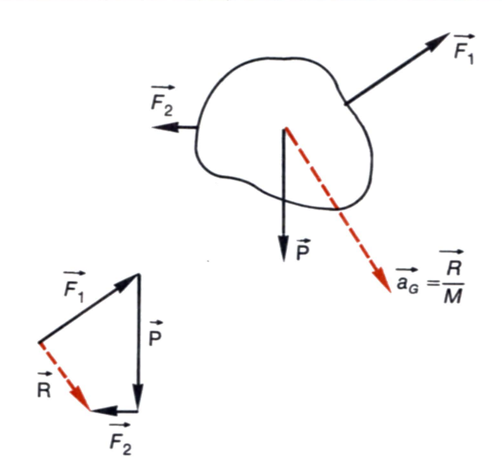
Divisons par dt : $\frac{dE_C}{dt} = \frac{\delta W}{dt} = \mathcal{P}$.

Ainsi, la dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la puissance $\mathcal{P}$ des forces appliquées.

Le théorème de l'énergie cinétique permet donc d'exprimer la dérivée $\frac{dE_C}{dt}$. De même, nous appelons « **théorème de la quantité de mouvement** » l'énoncé qui permet d'exprimer la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps.

— Par des expériences, il est possible de mesurer le taux de variation de la quantité de mouvement d'un solide $\frac{d\vec{p}}{dt}$. Si le solide est soumis à une seule action, il est possible de considérer la relation $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ comme une définition de la force $\vec{F}$. Or, la mécanique classique peut être développée en tant que théorie cohérente, à partir de quelques axiomes de base. Suivant le choix des axiomes, la relation $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ apparaît comme une définition de la force, ou comme un théorème.

Nous ne nous attarderons pas à cette discussion, et nous dirons « théorème » pour la raison expliquée à la remarque précédente. Quoiqu'il en soit, la relation se généralise, en tant que théorème applicable à un système quelconque, déformable ou non.



5. Un solide étant soumis à plusieurs forces, on détermine la somme vectorielle puis on divise par la masse du solide : on obtient ainsi l'accélération du centre d'inertie.

Expression du théorème du centre d'inertie :

$$M\vec{a}_G = \sum \vec{f}.$$

2. Corollaire : Théorème du centre d'inertie.

Rappelons que le vecteur quantité de mouvement d'un solide est le produit de la masse M du solide par le vecteur vitesse $\vec{V}_G$ de son centre de masse :

$$\vec{p} = M\vec{v}_G \text{. Dérivons : } \frac{d\vec{p}}{dt} = M\,\frac{d\vec{v}_G}{dt} = M\vec{a}_G .$$

Dans cette relation, $\vec{a}_G$ est le vecteur accélération du centre de masse G. Portons ce résultat dans l'expression du théorème de la quantité de mouvement. On obtient :

$$\boxed{\Sigma\vec{f} = M\vec{a}_G} \; .$$

Cette équation constitue l'expression algébrique du **théorème du centre d'inertie d'un solide : La somme vectorielle des forces appliquées à un solide est égale au produit de la masse du solide par le vecteur accélération de son centre d'inertie.**

Conséquence : Pour trouver l'accélération du centre d'inertie, connaissant les forces appliquées, on détermine d'abord la somme des forces, puis on divise par la masse du solide.

3. Exemple simple : projectile dans le champ de pesanteur.

Nous considérons ici des mouvements de courtes portées, ce qui permet de considérer le champ de pesanteur comme uniforme ; pour des mouvements de longues portées, il faudrait prendre en compte le changement de direction du vecteur $\vec{g}$ en raison de la courbure de la Terre, ainsi que la variation du module g avec l'altitude et avec la latitude. La résistance de l'air est faible pour des projectiles denses et pas trop rapides : nous la considèrerons en première approximation comme négligeable. Dans ces conditions, le théorème du centre d'inertie s'écrit : $m\vec{a}_G = m\vec{g}$, d'où $\vec{a}_G = \vec{g}$. Le vecteur accélération du centre de masse est donc constant. Par conséquent, sa trajectoire est une **parabole** (voir chapitre 2, paragraphe II-1)). Lorsque la résistance de l'air se fait sentir nettement, les recherches de trajectoires sont plus difficiles et nous ne les aborderons pas.

Exercice : Un projectile est lancé à partir d'un point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. En vue d'étudier le mouvement, on introduit un système d'axes Oxyz tel que $\vec{v}_0$ soit dans le plan Oxy, Ox étant horizontal et Oy vertical. On néglige la résistance de l'air.
a) Établir l'équation de la trajectoire.
b) Calculer en fonction de α et v_0 la portée X du mouvement (valeur de x lorsque la trajectoire recoupe l'axe Ox).
c) La valeur de v_0 étant fixée, on fait varier uniquement α. Quelle est la portée maximale X_M et pour quelle valeur de α l'obtient-on ? Montrer que pour $X < X_M$, il est possible d'atteindre une cible par deux trajectoires différentes.

Solution : a) Appliquons le théorème du centre d'inertie : $m\vec{a}_G = m\vec{g}$, d'où $\vec{a}_G = \vec{g}$. Projetons sur les trois axes : $\ddot{x} = 0$; $\ddot{y} = -g$; $\ddot{z} = 0$.
Intégrons, en introduisant les conditions initiales ($\dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha$; $\dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha$; $\dot{z}_0 = 0$) : $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$; $\dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha$; $\dot{z} = 0$.

Intégrons une nouvelle fois, avec pour conditions initiales $x_0 = y_0 = z_0 = 0$:

$$x = (v_0 \cos \alpha)\, t \quad ; \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \alpha)\, t \quad ; \quad z = 0 .$$

Comme z reste nul, nous concluons que la trajectoire est toute entière dans le plan xOy. Éliminons t entre les expressions de x et de y :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\operatorname{tg} \alpha)\, x .$$

On obtient ainsi l'équation cartésienne de la trajectoire : il s'agit bien d'une parabole.
b) La trajectoire coupe Ox lorsque $y = 0$, ou : $\dfrac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} = (\operatorname{tg} \alpha)\, x$.

Éliminons le cas $x = 0$ qui représente évidemment le point de lancement. Il reste la valeur notée X :

$$X = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha .$$

c) La valeur de X est maximale quand $\sin 2\alpha = 1$, soit $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

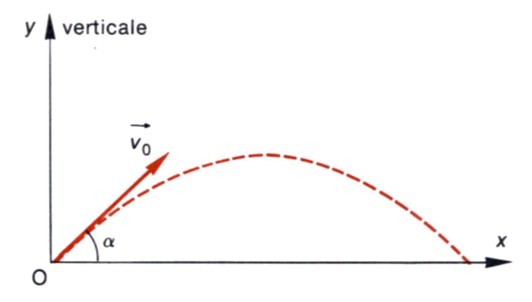
Pour atteindre la portée maximale il faut donc que la vitesse initiale fasse un angle de 45° avec l'horizontale.
La valeur de X est alors : $X_M = \dfrac{v_0^2}{g} \sin \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{v_0^2}{g}$.

Lorsque $X < X_M$ on peut écrire : $\dfrac{X}{X_M} = \sin 2\alpha$.

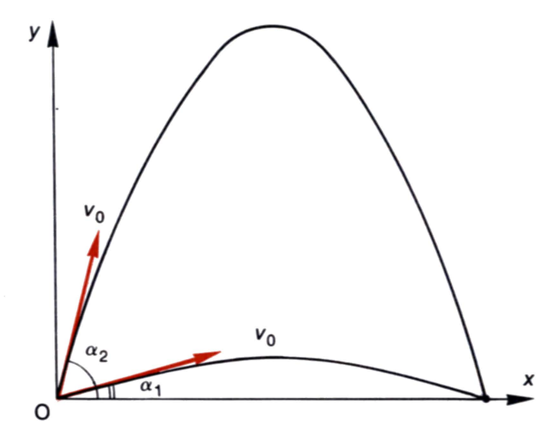
La portée X étant fixée, $\sin 2\alpha$ prend la valeur $\dfrac{X}{X_M}$ pour deux valeurs de 2α dont la somme est π. Par suite, α prend deux valeurs dont la somme est $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\alpha = \alpha_1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 .$$

Les deux angles de visée correspondants sont donc complémentaires. (Pour le plus petit angle, on dit que le projectile est lancé en « tir tendu », et l'autre angle correspond au « tir en cloche ».)



6. Choix des axes pour l'étude du mouvement d'un projectile par rapport à la Terre.



7. La vitesse initiale v_0 étant fixée, il y a deux angles de visée α_1 et α_2 qui permettent d'atteindre une cible C pas trop éloignée. Ces deux angles sont complémentaires : $\alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

III. Mouvement d'un point matériel.

1. Relation fondamentale de la dynamique du point matériel.

Relation fondamentale de la dynamique du point matériel :

$$m\vec{a} = \sum\vec{f}.$$

Une particule (électron, proton...) ou une très petite portion d'un système constituent ce qu'on appelle un **point matériel :** lorsqu'on étudie son mouvement, ses dimensions propres sont toujours négligeables devant les déplacements observés sur la trajectoire, et tout se passe comme si la matière était concentrée en un point géométrique. **Ainsi, le mouvement d'un point matériel s'identifie avec le mouvement de son centre d'inertie.**

Si $\vec{F}$ est la somme des forces qui s'exercent sur le point matériel, m sa masse, et $\vec{a}$ son accélération, on pourra écrire :

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Cette relation est appelée relation fondamentale de la dynamique du point matériel.

2. Exemple simple : particule chargée dans un champ électrique uniforme.

a) Généralités.

• Lorsqu'une particule de charge q se déplace dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$, elle est soumise à une force électrique constante $q\vec{E}$. Si aucune autre force ne s'applique, nous pouvons écrire, pour cette particule :

$$m\vec{a} = q\vec{E} \quad \text{d'où} \quad \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}.$$

Le vecteur accélération est donc constant. Par conséquent, la trajectoire de la particule est une **parabole,** à moins que la vitesse initiale soit colinéaire à $\vec{a}$ (donc à $\vec{E}$), auquel cas on aurait un mouvement rectiligne uniformément varié.

• **Remarque.** Dans la pratique, on a souvent à considérer des particules chargées mobiles dans des appareils situés en laboratoire, où s'exerce aussi la pesanteur. Comparons, en formant leur quotient, la force électrique et le poids mg dans le cas d'un électron situé dans un champ électrique $\vec{E}$ ayant la valeur relativement petite de 1 V . m^{-1} :

$$\frac{qE}{mg} \approx \frac{1{,}60 \, . \, 10^{-19}}{9{,}11 \, . \, 10^{-31} \times 10} \approx 1{,}75 \, . \, 10^{10} \, .$$

La force électrique, faible dans ce cas particulier, est malgré tout nettement prédominante. **A fortiori,** ce résultat est général : chaque fois qu'en pratique on applique un champ électrique à des particules chargées, le poids est tout à fait négligeable.

b) Accélération d'un électron par un champ électrique.

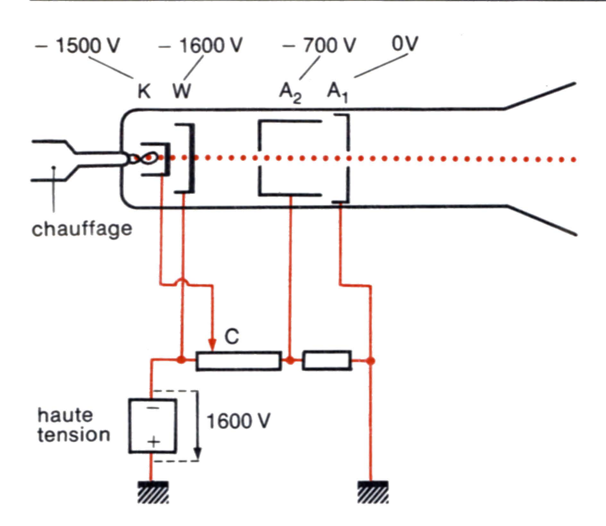
Un électron, **initialement immobile,** se met en mouvement lorsqu'on applique un champ électrique. La vitesse acquise se détermine en utilisant le **théorème de l'énergie cinétique.**
Rappelons brièvement le calcul, déjà effectué en classe de Première (voir livre 1re CE, page 134) :
Lorsqu'une particule chargée se déplace d'un point A à un point B, le travail de la force électrique est $q(V_A - V_B)$, où V_A et V_B représentent les potentiels électriques en A et B. Le travail est égal à la variation d'énergie cinétique :

$$\left(\frac{1}{2} mv^2 - 0\right) = q(V_A - V_B)$$

d'où :

$$v = \sqrt{\frac{2q}{m}\left(V_A - V_B\right)} \, .$$

Dans la démonstration, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse selon laquelle la force est constante : le résultat est donc valable, que le champ électrique soit uniforme ou non.
Pour un électron, la charge q est négative ainsi que $V_A - V_B$, donc V_B est supérieur à V_A : un électron est mis en mouvement vers les potentiels croissants.
Une charge positive, au contraire, se déplace en direction des potentiels décroissants.



8. Schéma du canon à électrons d'un oscillographe. La cathode (K) émet des électrons qui sont ensuite **accélérés** par le champ électrique régnant entre (K) et l'anode (A_1). La deuxième anode (A_2) sert à mieux **focaliser** les électrons, dans le but d'obtenir un faisceau fin. L'électrode (W) (wehnelt) est à un potentiel négatif par rapport à la cathode et tend à limiter le débit d'électrons : ainsi, en déplaçant le curseur (C) on modifie à volonté la **luminosité** du spot. (Les valeurs numériques portées sur la figure sont indicatives).

Exemple : Dans un oscillographe, le faisceau d'électrons est obtenu à partir d'un « canon à électrons », qui fonctionne sous une tension U dite tension accélératrice. Prenons une valeur courante : $U = 2\,000$ V. Calculons la vitesse acquise :

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \,.\, 10^{-19} \times 2\,000}{0{,}91 \,.\, 10^{-30}}} = 2{,}66 \,.\, 10^{7}\ \text{m}\,.\,\text{s}^{-1}, \quad \text{soit } 26\,600\ \text{km}\,.\,\text{s}^{-1}.$$

c) Déviation d'un électron sous l'effet d'un champ électrique uniforme.

Dans un oscillographe, le faisceau électronique passe entre deux paires de plaques de déviation qui, exerçant des champs électriques transversaux, dévient la trajectoire des électrons.

- **Hypothèses simplificatrices.** Nous étudierons l'action d'une paire de plaques, avec **l'approximation** suivante : nous supposons que les deux plaques sont parallèles et créent un champ électrique $\vec{E}$ uniforme entre elles. Ce champ leur est perpendiculaire, et nul en dehors du volume qu'elles délimitent.

- **Recherche de la trajectoire** (figure 9).

Un électron pénètre en O dans le champ électrique, parallèlement aux plaques, selon un axe Ox. Soit Oy l'axe issu de O et perpendiculaire aux plaques, et soit Oz un troisième axe (non figuré) perpendiculaire aux deux précédents. Notons e la charge de l'électron, en valeur absolue. La force qui s'exerce est parallèle à Oy ; ses composantes sont :

$f_x = 0$; $f_y = eE$; $f_z = 0$ en

notant E le module du champ électrique.

L'accélération $\vec{a}$, égale à $\dfrac{\vec{f}}{m}$, a pour composantes :

$$a_x = 0\,; \quad a_y = \frac{eE}{m}\,; \quad a_z = 0\,.$$

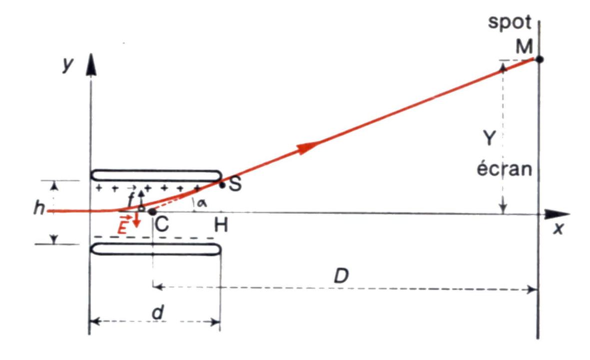
Intégrons deux fois, en notant v_0 la vitesse initiale :

$$v_x = v_0\,; \quad v_y = \frac{eE}{m}t\,; \quad v_z = 0$$

$$x = v_0 t\,; \quad y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2\,; \quad z = 0\,.$$

La trajectoire est une parabole contenue dans le plan xOy. Son équation cartésienne s'obtient en éliminant t entre les expressions de x et de y :

$$y = \frac{1}{2}\frac{eE}{mv_0^2}x^2.$$



9. Déviation d'un faisceau d'électrons par un champ électrique uniforme. La trajectoire dans le champ est une portion de parabole.

• **Expression de la déviation.** Après sortie du champ électrique au point S, la trajectoire est rectiligne car il n'y a plus de force ; elle se raccorde tangentiellement à la parabole et fait un angle α avec Ox :

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_S = \frac{eE}{mv_0^2}x_S = \frac{eEd}{mv_0^2}.$$

Notons que le prolongement de la trajectoire après sortie passe par le centre de l'espace limité par les plaques (c'est une propriété de la tangente à une parabole). En effet :

$$CH = \frac{y_S}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2}\frac{eE}{mv_0^2}d^2 \cdot \frac{mv_0^2}{eEd} = \frac{d}{2}.$$

Dans un oscillographe, le faisceau vient frapper un écran pour former un **spot.** Sur la figure, l'écran est à une distance L du centre du champ, et le spot est en M.

Calculons l'ordonnée de M, notée Y : $$Y = D\operatorname{tg}\alpha = \frac{eEdD}{mv_0^2}.$$

Or, le champ électrique est le quotient de la tension U appliquée entre les deux plaques et de la distance h de ces plaques :

$$E = \frac{U}{h}. \qquad \text{Par suite :} \quad Y = \frac{e}{mv_0^2} \cdot \frac{dD}{h} \cdot U.$$

Nous observons que la déviation est proportionnelle à la tension appliquée : nous avions admis ce résultat, dès la classe de Seconde pour comprendre l'utilisation de l'oscillographe.

• **Ordre de grandeur :**

Dans un oscillographe, la vitesse des électrons, accélérés sous une tension U_a, est telle que :

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU_a, \quad \text{d'où} \quad \frac{e}{mv_0^2} = \frac{1}{2\,U_a}.$$

La déviation Y du spot peut donc s'écrire :

$$Y = \frac{1}{2\,U_a} \cdot \frac{dD}{h} \cdot U\,.$$

Les valeurs suivantes sont les ordres de grandeurs :

$$U_a = 2\,000 \text{ V}, \quad d = 1 \text{ cm}, \quad h = 0{,}5 \text{ cm}, \quad D = 20 \text{ cm}.$$

Par suite, la déviation s'écrit en fonction de la tension déflectrice, en unités SI :

$$Y = \frac{1}{4\,000} \cdot \frac{1}{0{,}5} \cdot 0{,}20 \,.\, U = 10^{-4} \,.\, U\,.$$

Ainsi, on obtient une déviation $Y = 10^{-2}$ m = 1 cm lorsque $U = 100$ V. Or, un oscillographe permet généralement l'étude de tensions variables beaucoup plus petites, souvent inférieures à 1 volt : cela suppose l'emploi d'**amplificateurs.** Le choix d'un calibre de l'oscillographe revient à sélectionner un amplificateur, à l'entrée duquel on applique la tension à étudier, la sortie étant branchée sur les plaques (figure 10).

plaques de déviation
entrée
AMPLI
masse

10. La tension appliquée à l'entrée d'un oscillographe est le plus souvent amplifiée, avant d'être appliquée aux plaques de déviation.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- Le centre d'inertie est aussi appelé centre de masse parce qu'il se confond avec le ______ des masses.
- Un solide n'étant soumis à aucune action extérieure, son centre d'inertie a un mouvement ______ et ______, par rapport à tout référentiel ______ .
- Deux référentiels galiléens différents sont en ______ ______ l'un par rapport à l'autre.
- La dérivée par rapport au temps de la ______ d'un solide est égale à la somme ______ des forces appliquées au solide.
- L'accélération du centre d'inertie d'un solide s'obtient en divisant la somme vectorielle des ______ par la ______ du solide.
- La trajectoire du centre ______ d'un solide soumis à la pesanteur n'est parabolique que si l'on peut négliger la ______ .

Petites questions.

1. Si l'on admet que la Terre est un référentiel galiléen, un wagon mobile en ligne droite constitue-t-il aussi un référentiel galiléen ?

2. Pourquoi la direction définie par la Terre et une étoile est-elle pratiquement confondue avec la direction définie par le Soleil et cette même étoile ? (Essayez de justifier numériquement votre réponse.)

3. Rappelez pourquoi l'expression « référentiel géocentrique » est imprécise.

4. Pourquoi le référentiel géocentrique n'est-il pas galiléen, en toute rigueur ?

5. Pouvez-vous mettre dans l'ordre chronologique l'intervention des noms suivants dans l'Histoire des Sciences : Copernic, Coriolis, Galilée, Newton ?

6. Dans quelles conditions la trajectoire d'un projectile dans l'air est-elle pratiquement une parabole ?

7. Pourquoi, dans l'oscillographe, les deux parties de la trajectoire de l'électron (parabole et droite) se raccordent-elles tangentiellement ?

Applications immédiates.

8. Un rail à coussin d'air horizontal supporte un solide de masse 80 g, initialement immobile. On applique à ce solide une force constante de 0,02 N, parallèle au rail, pendant 2 s.

a) Quelle est la quantité de mouvement finale et quelle est la vitesse finale ?

b) Quelle est l'accélération et quel est l'espace parcouru pendant la phase accélérée du mouvement ?

Réponses :
a) $\Delta p = 0{,}04$ kg . m . s^{-1}, $\Delta v = 0{,}5$ m . s^{-1}
b) $a = 0{,}25$ m . s^{-2}, $\Delta x = 0{,}5$ m.

9. Un solide initialement immobile est soumis, à partir de l'instant $t = 0$ à son poids de valeur 10 N et à une force horizontale constante de 5 N. Quelle est la quantité de mouvement acquise (en module, direction et sens) à l'instant t ?
Précisez la trajectoire et l'accélération du mouvement ($g = 9{,}80$ m . s^{-2}).

10. Au moyen d'une pompe à vide, on a amené la pression d'air dans un récipient à une valeur très basse. Les molécules qui restent peuvent ainsi aller d'une paroi à une autre sans qu'il se produise en chemin des collisions avec d'autres molécules.
A température ordinaire, les molécules de l'air ont des vitesses de quelques centaines de mètres par seconde. Soit une molécule quittant une paroi avec une vitesse horizontale de 500 m . s^{-1}. De combien est-elle descendue sous l'effet de la pesanteur, quand son déplacement horizontal atteint 10 cm ?

11. Précisez la trajectoire du centre d'inertie d'un boulet de canon, lancé avec une vitesse initiale de 600 m . s^{-1}, inclinée de 30° par rapport au plan horizontal (on néglige la résistance de l'air). A quelle hauteur s'élève-t-il, et à quelle distance retombe-t-il dans le même plan horizontal que celui du point de départ.

12. On rappelle la charge et la masse d'un électron : $q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C et $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. Un électron étant soumis à son poids et à une force électrique due à un champ $\vec{E}$, à partir de quelle valeur de E peut-on négliger le poids, s'il n'est pas nécessaire de connaître la force totale avec une précision de plus de 1 % près.

13. On rappelle l'expression de la déviation du spot d'un oscillographe : $Y = \dfrac{e}{mv^2}\dfrac{dD}{h}U$.

a) Expliquez la signification des lettres.

b) Définissez la sensibilité d'un oscillographe et traduisez-la en une expression.

c) Quel est le rôle des amplificateurs incorporés dans l'appareil ?

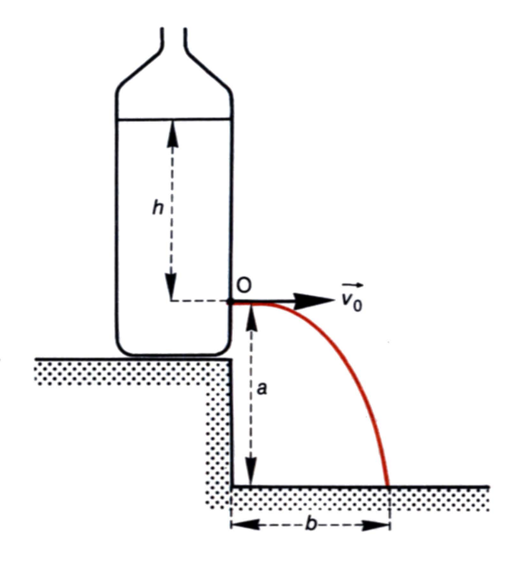
Exercices expérimentaux.

14. A la base d'une bouteille en matière plastique transparente, percez avec une aiguille un petit orifice O et marquez un trait sur la bouteille, à une hauteur $h = 20$ cm au-dessus de O. Remplissez d'eau la bouteille et disposez-la au bord d'un évier (figure ci-dessous) : l'eau jaillit de O et décrit une portion de parabole.

a) Mesurez la dénivellation a puis le déplacement horizontal b lorsque le niveau supérieur de l'eau passe exactement en face du repère, à 20 cm au-dessus de 0.
Si l'eau ne jaillit pas horizontalement en O, mesurez l'angle de la vitesse initiale v_0 avec l'horizontale.

b) A partir de ces résultats, calculez v_0.

c) Calculez aussi la vitesse v_1 acquise par une bille qui tombe verticalement d'une hauteur de 20 cm, sans vitesse initiale. Il est possible de démontrer que v_0 doit être voisin de v_1. Quel écart $\left|\dfrac{v_0 - v_1}{v_0}\right|$ obtenez-vous ?
Cet écart est-il compatible avec les erreurs expérimentales ?



15. On poursuit l'exercice précédent en perçant dans la bouteille plusieurs orifices à différentes hauteurs.
Observez les positions des points d'impact au fond de l'évier.
Expliquez vos observations, en admettant que la vitesse de l'eau à la sortie de l'orifice est $v_0 = \sqrt{2gh}$, où h est la dénivellation entre l'orifice et la surface libre du liquide.

16. a) Faites preuve d'imagination en confectionnant un dispositif qui permet de lancer plusieurs fois un même projectile (bille, fléchette...) en lui communiquant chaque fois la même vitesse initiale.

b) Placez-vous face à un mur, à une distance connue, par exemple 10 m, et lancez le projectile horizontalement d'une hauteur connue (par exemple 1 m). Notez le point d'impact sur le mur : de quelle hauteur le projectile est-il descendu ? En déduire la vitesse initiale.

Approfondissement.

Les exercices signalés par un carré rouge □ présentent une plus grande difficulté que les autres.

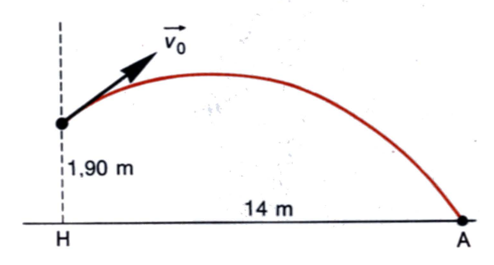
17. Un mobile a une quantité de mouvement $\vec{p_1}$ de valeur 10 kg . m . s^{-1}. Déterminez pendant combien de temps il faut appliquer une force constante $\vec{F}$ de 5 N pour amener le module de la quantité de mouvement à la moitié de la valeur initiale, dans les deux cas suivants :

a) $\vec{F}$ et $\vec{p_1}$ ont même support et sens contraires.

b) Les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{p_1}$ font entre eux un angle de 150°.

Réponses : **a)** $\Delta t = 1$ s ; **b)** $\Delta t = 1{,}73$ s.

18. Un athlète lance une boule de fonte de 5 kg à 14 m. La boule quitte la main à une hauteur de 1,90 m au-dessus du sol et le vecteur vitesse fait un angle de 45° par rapport à l'horizontale. Le point de lancement se projette sur le sol en un point H, et la boule arrive au sol, en fin de mouvement, en un point A. La longueur HA est de 14 m. A quelle vitesse la boule a-t-elle été lancée ?



19. « Malin comme un singe » ? Au cœur de la jungle, un chasseur muni d'un arc vise un singe perché dans un arbre. La flèche quitte l'arc avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ oblique dirigée exactement vers le singe : si celui-ci restait en place, il ne serait pas touché, car la pesanteur écarte la flèche vers le bas par rapport au support de la vitesse initiale. Mais le singe se laisse tomber à l'instant exact où il voit la flèche quitter l'arc. Sera-t-il touché ?

20. Au cours d'un échange de balle entre deux joueurs de tennis, le premier frappe la balle à 50 cm du sol. Elle monte à 1,2 mètre et touche le sol à 15 mètres du point de départ. Avec quelle vitesse la balle a-t-elle quitté la raquette ?

21. Lorsqu'un projectile est lancé d'un point O avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ faisant un angle α par rapport au plan horizontal, on a montré que la portée du tir est : $X = \dfrac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$.

a) De combien varie X lorsque v_0 subit une petite variation dv_0 (dv_0 est petit devant v_0) ?

b) On suppose que $\alpha = 30°$ et $g = 9{,}80$ m . s^{-2}. La vitesse est d'abord 100 m . s^{-1} : calculez X. Ensuite, on suppose que la vitesse est de 101 m . s^{-1} : de combien X a-t-il varié ?

22. Reprendre l'exercice précédent en supposant maintenant que v_0 est fixe, mais que α subit une petite variation. Application numérique : de combien varie la portée X lorsque α passe de 30 à 31°, la vitesse initiale v_0 restant égale à 100 m . s^{-1}.

23. On rappelle le rapport de la charge et de la masse de l'électron : $\dfrac{e}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ C/kg.

a) Un électron pénètre entre deux plaques parallèles distantes de 5 mm entre lesquelles est appliquée une tension $U = 50$ V. Quel est le champ électrique entre ces plaques ? (On suppose le champ électrique uniforme entre les plaques et nul à l'extérieur.)

b) La vitesse $\vec{v_0}$ de l'électron à l'entrée est parallèle aux plaques et vaut 20 000 km/s. Celles-ci ont une longueur de 1 cm. Quelle est la durée de la traversée ?

c) Quelle est la vitesse transversale de l'électron à l'instant où il sort du champ ? (On appelle vitesse transversale la projection de la vitesse $\vec{v}$ sur la perpendiculaire à $\vec{v_0}$.)

d) Soit $\vec{v_1}$ le vecteur vitesse à la sortie du champ. Calculez l'accroissement relatif de vitesse $\dfrac{v_1 - v_0}{v_0}$.

Réponses :
a) 10 kV/m,
b) 0,5 ns,
c) 880 km/s,
d) $0{,}97 \cdot 10^{-3}$ (voisin de 1 ‰).

24. On applique à l'entrée d'un oscillographe une tension sinusoïdale.

a) Rappelez la relation entre tension efficace et tension maximale. Comment ces tensions sont-elles définies ?

b) Sur l'écran, l'amplitude « crête à crête » des oscillations est de 5 cm. Le calibre de déviation utilisé est 10 mV/cm. Quelle est la valeur efficace de la tension observée ?

25 Une balle de caoutchouc est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h à l'instant $t = 0$.

a) A quel instant t_1 arrive-t-elle au sol ?

b) On admet qu'un rebond s'accompagne d'une perte de vitesse : la vitesse (en module) est multipliée par un coefficient e appelé coefficient de restitution ($0 < e < 1$). Quel est le laps de temps qui s'écoule entre le premier et le deuxième rebond ?

c) D'autres rebonds se produisent, avec toujours le même coefficient de restitution. Au bout de combien de temps le mouvement s'arrête-t-il ?

Exploitation de documents

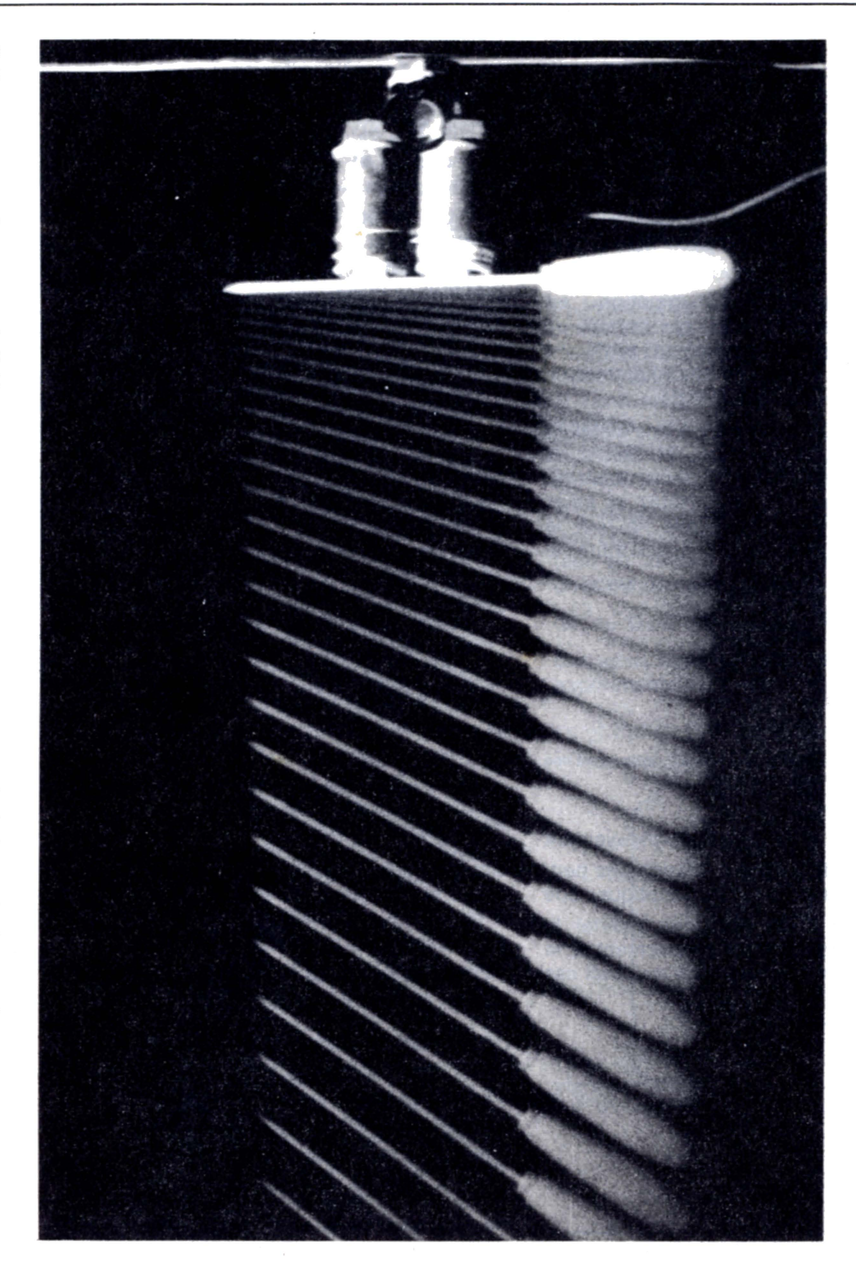
26. Le document ci-contre représente un tournevis soumis à la pesanteur.

a) La longueur réelle du tournevis étant de 25 cm, quelle est l'échelle du document ?

b) Expliquez comment on peut déterminer la position du centre de masse par une expérience simple de statique (en tenant le tournevis en équilibre).

c) On a trouvé que le centre de masse se situe à la limite du manche et de la tige. A partir du document, vérifiez que la vitesse (verticale) du centre de masse croît linéairement en fonction du temps. Pouvez-vous déterminer la fréquence des éclairs, lors de la prise de vue stroboscopique ?

d) Vous voyez sur la photographie que la pointe du tournevis n'a pas un mouvement rectiligne vertical.
Étudiez la composante verticale de la vitesse de la pointe, en représentant graphiquement cette composante en fonction du temps.
La variation est-elle linéaire ?
Expliquez le résultat.





Pourquoi le skieur est-il penché en avant ? Quelles sont les conditions à réaliser pour sauter loin ?

4 Dynamique quelques applications.

I. Applications théoriques.

1. Démonstration du théorème de l'énergie cinétique pour un solide en translation.
2. Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé formé de deux solides.
3. Insuffisance de la relation $\Sigma\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ pour prévoir le mouvement d'un solide.

II. Applications pratiques.

1. Exemple d'illustration expérimentale en travaux pratiques.
2. Détermination d'une force.
3. Détermination d'une trajectoire.
4. Mouvement circulaire uniforme.

Nous allons appliquer ici les énoncés de dynamique introduits au chapitre précédent. Nous commencerons par des problèmes très généraux, puis nous examinerons divers exemples concrets.

I. Applications théoriques.

1. Démonstration du théorème de l'énergie cinétique pour un solide en translation.

Un solide étant en translation, tous ses points ont même vitesse $\vec{v}$, et se déplacent de $\vec{v}dt$ pendant un intervalle de temps dt. La force $\vec{f_i}$ qui s'exerce sur le point M_i du solide effectue le travail $\vec{f_i} \cdot \vec{v}dt$. Utilisons le théorème du centre inertie : $\Sigma \vec{f_i} = m\vec{a}_G$. où $\vec{a}_G$ est l'accélération du centre de masse.
Sur l'ensemble du solide, la somme de tous les travaux est :

$$\delta W = \Sigma \vec{f_i} \cdot \vec{v}dt = m\vec{a}_G \cdot \vec{v}dt\,.$$

Mais :

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Par suite :

$$\delta W = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{m}{2}\, d(v^2) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

ou, en introduisant l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2 = E_C$:

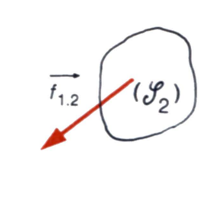
$$\delta W = dE_C\,.$$

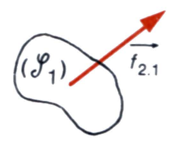
Cette relation, intégrée pendant un intervalle de temps fini, se transforme suivant :

$$W = \Delta E_C\,.$$

On retrouve ainsi l'expression habituelle du théorème de l'énergie cinétique : **la somme des travaux des forces appliquées est égale à la variation de l'énergie cinétique.**

2. Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé formé de deux solides.





1. Rappel du principe des actions réciproques :
$\vec{f}_{2.1} = -\vec{f}_{1.2}$.

Appliquons le théorème de la quantité de mouvement à deux solides (S_1) et (S_2), en distinguant par les indices 1 et 2 les quantités de mouvement et les forces appliquées :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \Sigma\vec{f}_1 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \Sigma\vec{f}_2.$$

Ajoutons membre à membre : $\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \Sigma\vec{f}_1 + \Sigma\vec{f}_2$.

Considérons maintenant l'hypothèse selon laquelle les deux solides forment un système isolé. La somme des forces $\Sigma\vec{f}_1$ se réduit à la force d'interaction $\vec{f}_{2.1}$, exercée par le solide (S_2) sur le solide (S_1). De même, $\Sigma\vec{f}_2$ se réduit à $\vec{f}_{1.2}$.
Selon le principe des actions réciproques, $\vec{f}_{1.2}$ et $\vec{f}_{2.1}$ sont deux forces opposées. Par suite :

$$\Sigma\vec{f}_1 + \Sigma\vec{f}_2 = \vec{f}_{2.1} + \vec{f}_{1.2} = \vec{0}. \text{ D'où } \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}.$$

La somme $(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ est donc constante.
Nous avons ainsi démontré un résultat qu'il avait fallu admettre en classe de Seconde, à partir de quelques expériences : la quantité de mouvement totale $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ d'un système isolé de deux solides est constante.

3. Insuffisance de la relation $\Sigma\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ pour prévoir le mouvement d'un solide.

• Lorsqu'on a déterminé le mouvement du centre de masse G d'un solide, le mouvement complet n'est pas connu, car il est possible que le solide tourne autour de G.
Plus précisément, dans un référentiel où G est fixe, le solide tourne autour de G. Dans ce référentiel, les vitesses des points du solide à un instant donné sont les mêmes que s'il tournait autour d'un axe passant par G, mais cet axe ne reste pas fixe. La situation est comparable à celle d'une toupie qui tournerait autour de sa pointe.

• Nous avons établi, en classe de Seconde, les conditions nécessaires d'équilibre d'un solide : la somme des forces appliquées est nulle, de même que la somme des moments des forces, par rapport à n'importe quel axe :

$$\Sigma \vec{f_i} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Sigma \mathcal{M}_{\vec{f_i}/\Delta} = 0\,.$$

La première relation devient, en dynamique du solide : $\vec{\Sigma} f_i = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$.

Il existe de même une deuxième relation qui fait le lien entre le mouvement d'un solide autour de G et les moments des forces appliquées. Nous ne l'étudierons pas, cette relation n'étant pas au programme de Terminales.

II. Applications pratiques.

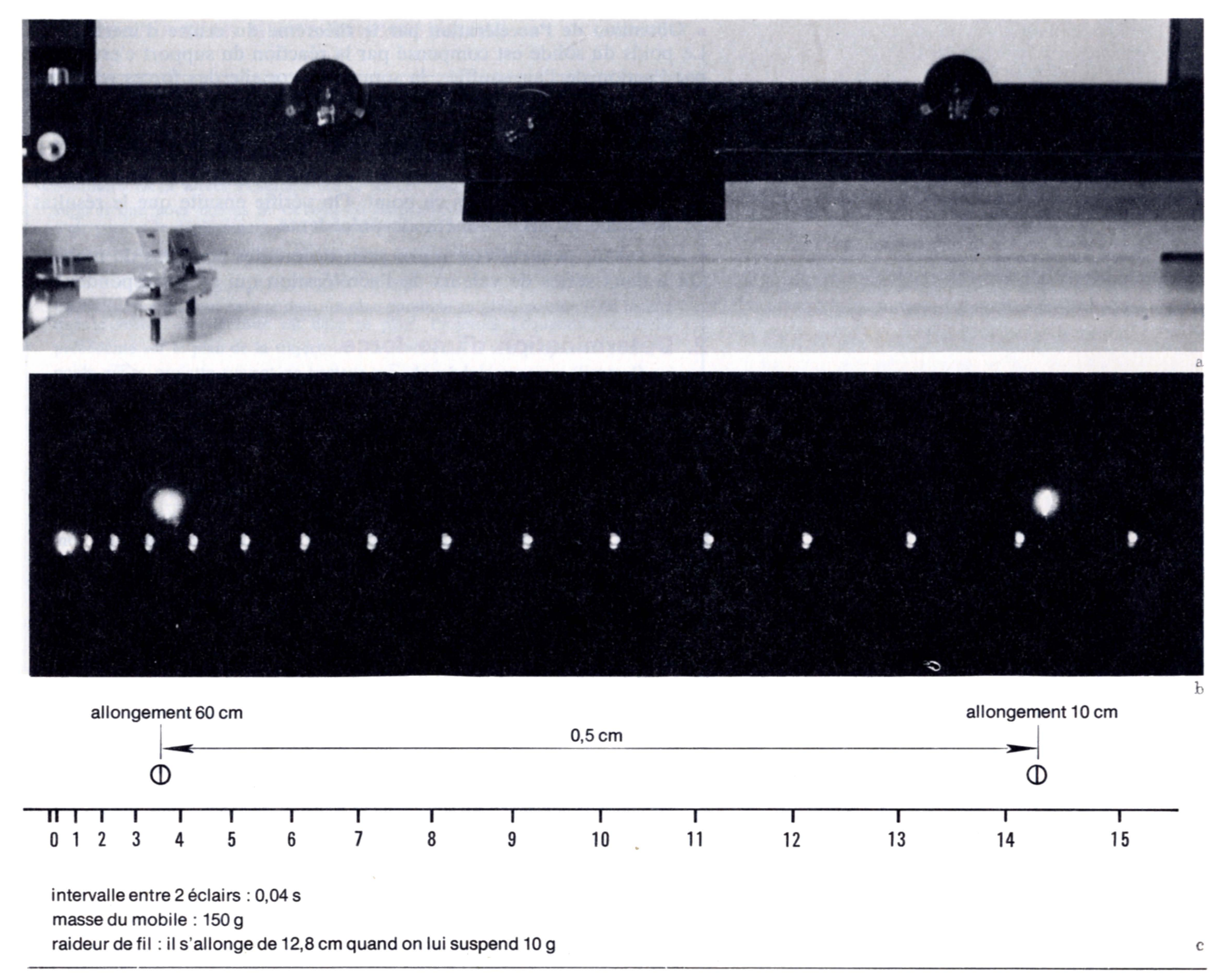
1. Exemple d'illustration expérimentale en travaux pratiques.

Pour illustrer le théorème du centre d'inertie, nous pouvons réaliser, par exemple, l'expérience suivante (figure 2).

• Sur un rail à coussin d'air horizontal, repose un solide de masse m connue, attaché à un fil élastique dont on connaît la raideur k (grâce à une mesure préliminaire de l'allongement lorsqu'on lui applique une force connue). La deuxième extrémité du fil est fixée de telle façon qu'il soit parallèle au rail (figure 2a).
Le solide mobile porte une lampe au néon clignotante à intervalles de temps réguliers τ.
La figure 2b représente l'enregistrement du mouvement sur une portion de la trajectoire.
Sur la figure 2c, on a repris l'enregistrement, en numérotant les positions et en indiquant les allongements du fil.

• **Détermination expérimentale de l'accélération.** A partir du document, calculons, par exemple, l'accélération au point M_3, comme nous avons appris à le faire pour un mouvement rectiligne :

$$a_3 \approx \frac{M_3 M_4 - M_2 M_3}{\tau^2}.$$



2. Illustration expérimentale du théorème du centre d'inertie : **a)** dispositif ; **b)** enregistrement chronophotographique ; **c)** exploitation de l'enregistrement.

3. La boule d'un pendule est soumise à son poids et à la tension du fil.

- **Obtention de l'accélération par le théorème du centre d'inertie.**

Le poids du solide est compensé par la réaction du support c'est-à-dire par l'action de l'air soufflé ; la somme vectorielle des forces se réduit donc à la force élastique, de module $k\Delta l$, en notant Δl l'allongement.

Le théorème du centre d'inertie s'écrit $ma = k\Delta l$ d'où $a = \dfrac{k\Delta l}{m}$.

En mesurant l'allongement pour une position donnée (par exemple M_3) on déduit l'accélération en ce point. On vérifie ensuite que le résultat est le même qu'avec la méthode précédente.

- Les calculs peuvent être repris pour différentes positions du mobile. On a deux séries de valeurs de l'accélération qui se correspondent.

2. Détermination d'une force.

Exercice : Une petite bille sphérique de masse m est suspendue à un fil ; on note l la distance entre le centre de masse de la bille et le point de suspension du fil. Ce dernier étant tendu, on l'écarte de la position d'équilibre d'un angle θ_0 et on lâche la bille sans vitesse initiale (figure 3).

Trouver la valeur de la tension $\vec{T}$ du fil lorsque l'angle du fil avec la verticale est θ.

Examiner, en particulier, le cas où $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\theta = 0$.

Solution : Appliquons le théorème du centre de masse à la bille, soumise à son poids et à la tension du fil :

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}.$$

Projetons sur la direction du fil, c'est-à-dire la normale à la trajectoire, en notant a_N le module de l'accélération normale :

$$T - mg\cos\theta = ma_N = m\frac{v^2}{l}. \quad \text{Par suite : } T = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right).$$

La valeur de v s'obtient en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la bille : le travail des forces appliquées est égal à la variation d'énergie cinétique. La tension n'effectue aucun travail puisque sa direction est normale à la trajectoire. La diminution d'altitude de la masse m est $(l\cos\theta - l\cos\theta_0)$. Le travail du poids est donc : $W = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$.

Égalons cette expression avec la variation d'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0) \text{ d'où : } \quad v^2 = 2\,gl(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Portons dans l'expression de la tension :

$$T = m[g\cos\theta + 2\,g(\cos\theta - \cos\theta_0)] \qquad T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0).$$

En particulier, si la masse m est lâchée à partir de la position horizontale du fil ($\cos\theta_0 = 0$) la tension vaut $3\,mg\cos\theta$. Au passage par la verticale, elle vaut alors $3\,mg$, c'est-à-dire trois fois le poids de la bille.

3. Détermination d'une trajectoire.

Exercice. Un solide plat est lancé sur une table à coussin d'air inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. La vitesse initiale $\vec{v}_0$ imprimée au solide est perpendiculaire aux lignes de plus grande pente. Déterminer la trajectoire du centre de masse G du solide.

Solution : Deux forces s'exercent sur le solide : son poids $m\vec{g}$ et la réaction du support que nous notons $\vec{R}$. Celle-ci est perpendiculaire au plan, car le coussin d'air permet le déplacement sans frottement sur la table. Exprimons le théorème du centre d'inertie, en notant $\vec{a}$ le vecteur accélération de G :

$$m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g}.$$

La trajectoire est tout entière dans un plan parallèle au plan incliné ; il en résulte que le vecteur accélération est dans ce plan. Projetons l'équation vectorielle précédente sur le plan de la trajectoire : la réaction $\vec{R}$ a une projection nulle ; le poids $m\vec{g}$ se projette suivant un vecteur $m\vec{g}_T$ de module $mg \sin \alpha$ (figure 4).

$$m\vec{a} = m\vec{g}_T, \quad \text{d'où} \quad \vec{a} = \vec{g}_T.$$

Le vecteur accélération est donc constant et nous pouvons prévoir que la trajectoire est une parabole. Pour en préciser l'équation, introduisons dans le plan du mouvement deux axes Ox et Oy issus du point de lancement, l'axe Ox suivant une ligne de plus grande pente, et l'axe Oy suivant une ligne horizontale. L'accélération $\vec{a}$ est parallèle à Ox et sa mesure algébrique est $g \sin \alpha$:

$$\begin{cases} a_x = g \sin \alpha \\ a_y = 0 . \end{cases}$$

Intégrons, en se rappelant les conditions initiales $v_{0x} = 0$ et $v_{0y} = v_0$

$$\begin{cases} v_x = (g \sin \alpha) . t \\ v_y = v_0 . \end{cases}$$

Intégrons une nouvelle fois, avec comme conditions initiales $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} (g \sin \alpha)\, t^2 \\ y = v_0\, t . \end{cases}$$

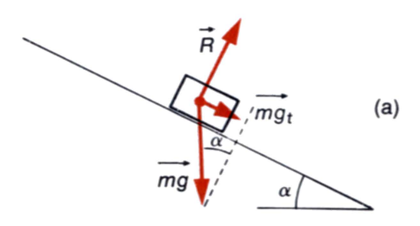
On obtient ainsi les équations paramétriques de la trajectoire, en fonction du paramètre t. Pour obtenir l'équation cartésienne, éliminons t :

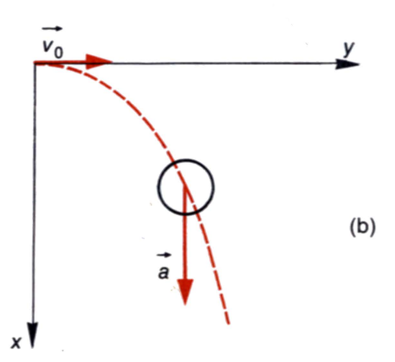
$$t = \frac{y}{v_0}, \quad \text{d'où :} \quad x = \frac{1}{2} (g \sin \alpha) \; \frac{y^2}{v_0^2}$$

ou

$$x = \frac{g \sin \alpha}{2\, v_0^2}\, y^2 .$$

L'équation obtenue est celle d'une **parabole** dont la direction asymptotique est parallèle à l'axe Ox.





4. Solide sur un plan incliné.
a) Représentation des forces (dans un plan vertical).
b) Choix des axes, en vue de déterminer la trajectoire (vue dans le plan du mouvement).

4. Mouvement circulaire uniforme.

a) Considérations générales.

Supposons que le centre d'inertie d'un solide de masse m se déplace sur un cercle de rayon R, à la vitesse constante v. Nous savons que l'accélération est alors dirigée vers le centre (accélération centripète) et s'exprime par :

$$\vec{a}_G = \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

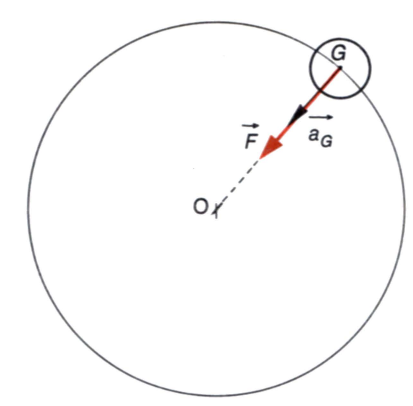
Le vecteur $\vec{N}$ est le vecteur unitaire de la normale, orienté vers le centre. En appliquant le théorème du centre d'inertie, nous trouvons la somme des forces qui s'exercent sur le solide :

$$\vec{F} = m\vec{a}_G = m\frac{v^2}{R}\vec{N}.$$

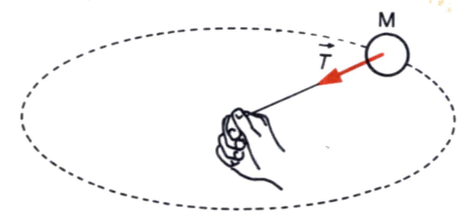
Ainsi la force résultante est centripète, et vaut : $F = m\dfrac{v^2}{R} = m\omega^2 R$.

où $\omega = \dfrac{v}{R}$ est la vitesse angulaire.

Une telle force est nécessaire pour entretenir un mouvement circulaire uniforme. Observons que sa valeur tend vers zéro quand R tend vers l'infini : le mouvement tend alors vers un mouvement rectiligne et uniforme, et la nullité de F est conforme au principe de l'inertie.



5. Dans un mouvement circulaire uniforme, la force, colinéaire à l'accélération, est orientée vers le centre. Pour entretenir un tel mouvement, il faut exercer une force centripète constante.

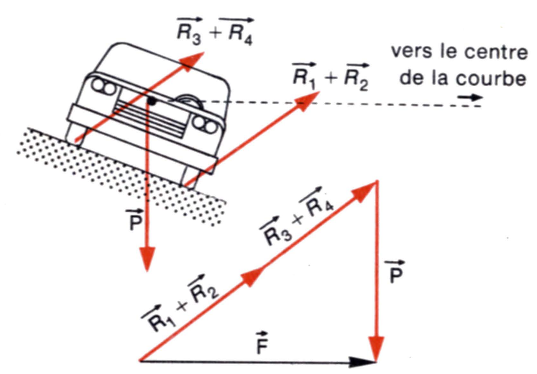


6. La force centripète, égale à la tension du fil, est ressentie par l'opérateur au niveau de sa main.

b) Exemples.

- Accrochez un solide au bout d'une ficelle et faites le tournoyer : vous devez exercer sur la ficelle une action que vous ressentez d'autant plus dans la main que la rotation est plus rapide. Au niveau du solide, c'est la tension $\vec{T}$ de la ficelle qui constitue l'action centripète (figure 6).
- Considérons une voiture qui prend un virage à vitesse constante. Les forces qui s'exercent sont : le poids $\vec{P}$, de direction verticale, et les réactions des quatre roues : $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$, $\vec{R}_4$. Celles-ci doivent présenter une composante horizontale dirigée vers le centre de courbure, de façon que la somme $\vec{F}$ soit centripète (figure 7).

Remarque. On n'a pas représenté ici la résistance de l'air ; en réalité, celle-ci est compensée par des réactions horizontales, au niveau des roues. La résultante des forces tangentes au mouvement donc est nulle. S'il n'en était pas ainsi, on observerait une accélération tangentielle.



7. Voiture dans un virage. On a représenté ici les forces situées dans un plan vertical qui passe par le centre de courbure O. Leur résultante $\vec{F}$ est horizontale et dirigée vers O.

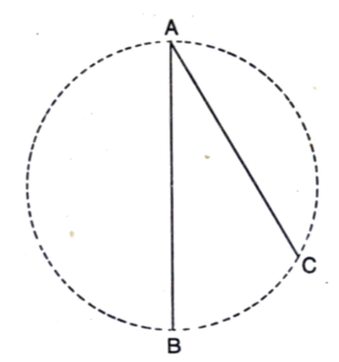
Applications immédiates.

1. On communique une impulsion à un objet de masse 100 g posé sur une table, de façon à le faire glisser. Il parcourt 10 cm avant de s'arrêter. En admettant que la force de frottement soit constante, calculez cette force, ainsi que la durée du mouvement.

2. Quelle est la valeur de la force centripète qui s'exerce sur un camion de masse 6 000 kg qui prend un virage de rayon de courbure égal à 30 m à la vitesse de 40 km/h ?

3. Lorsqu'une voiture prend un virage à vitesse constante, la résultante des forces est dirigée vers le centre de courbure. Qu'en est-il lorsque la voiture accélère ou lorsqu'elle ralentit ?

4. Un mobile ponctuel met un temps Δt pour parcourir en chute libre un segment vertical AB. Un autre mobile quitte A et glisse sans frottement sur un segment oblique AC tel que C soit sur la sphère de diamètre AB (figure ci-dessous). Montrez que le temps nécessaire pour parcourir AC a toujours la même valeur, quelle que soit l'inclinaison de la corde AC.



5. Dans un port de plaisance, un bateau de 1 000 kg s'approche d'un pont d'amarrage, moteur arrêté, à la vitesse de 0,5 m . s^{-1}. Une personne tente de le stopper en exerçant une force $\vec{F}$ dirigée vers le large.

a) Quelle valeur doit avoir le vecteur accélération supposé constant, pour que le bateau s'immobilise au bout d'une seconde ?

b) En déduire la valeur minimale de $\vec{F}$ et la distance *d* parcourue pendant l'arrêt.

Réponses : 0,5 m . s^{-2} ; 500 N ; 25 cm.

6. Un homme de masse *M* se laisse tomber d'un balcon dans une cour. Soit *H* la dénivellation parcourue par le centre d'inertie de l'homme jusqu'à l'instant où il touche le sol, jambes tendues. Après cela, il fléchit ses jambes et son centre d'inertie descend encore de *h* avant que le mouvement ne s'arrête ; on admet que dans cette phase du mouvement, la force de freinage exercée $\vec{F}$ est constante.

a) Quelle est cette force de freinage ? on notera qu'elle s'ajoute au poids et on admettra que le théorème du centre d'inertie s'applique aussi à un corps déformable : $M\vec{a}_G = \vec{R}$ ($\vec{R}$ étant la somme des forces **extérieures).** Où s'applique $\vec{F}$?

b) Calculez la valeur maximale de *H* supportable si l'on admet que la valeur maximale de $\vec{F}$ est égale à quatre fois le poids, et en prenant $M = 80$ kg, $h = 40$ cm et $g = 9{,}8$ m . s^{-2}.

c) Que se passe-t-il quand l'homme conserve les jambes tendues (précisez quantitativement votre réponse, en indiquant une valeur raisonnable de *h*) ?

7. Un point matériel initialement au repos à l'origine O d'un axe O*x* est soumis pour $t > 0$, à une force de mesure algébrique $F_x = Ct$ (où *C* est une constante positive). *x* est l'abscisse et *v*, la vitesse à l'instant *t*.

Calculez $\frac{x}{v}$ en fonction du temps.

Réponse : $\frac{x}{v} = \frac{t}{3}$.

8. Un solide de masse M est soumis à une force $\vec{F}$ de direction et sens constants, mais dont la valeur varie : elle est nulle pour $t < 0$; à l'instant $t = 0$, elle prend subitement la valeur F_0 puis décroît linéairement entre $t = 0$ et $t = t_1$; enfin la force est à nouveau nulle pour $t > t_1$. Le solide étant initialement immobile, exprimez l'espace x parcouru entre les instants 0 et t. On distinguera les deux cas $0 \leqslant t \leqslant t_1$ et $t > t_1$.

9. Une voiture de masse 1 000 kg prend un virage de rayon $R = 20$ m à la vitesse constante de 40 km/h.

a) Quelle est, en projection horizontale, la somme $\vec{R_h}$ des forces exercées par la route sur les quatre roues pendant ce mouvement ? (On néglige l'empattement devant le rayon de braquage).

b) Quelle est la somme des forces verticales $\vec{R_v}$? Calculez le rapport $\frac{R_h}{R_v}$ (on prendra $g = 9{,}81$ m . s^{-2}). Le résultat vous paraît-il acceptable sur route mouillée, sans que le virage ne soit relevé ?

10. Un bloc parallélépipédique de masse m glisse vers le bas sur un plan incliné d'un angle α, en suivant une ligne de plus grande pente. La réaction du support sur le bloc présente une composante $\vec{R_N}$ normale au plan et une composante $\vec{R_T}$ dans le plan, orientée vers le haut. Entre les modules de ces deux composantes existe la relation $R_T = \beta R_N$, β étant un coefficient numérique constant.

a) Exprimez l'accélération du mouvement, en fonction de l'accélération de la pesanteur g, de α et de β.

b) Quelle doit être la valeur minimale α_m de l'angle α pour que le mouvement ait lieu ?

c) Calculez numériquement α_m avec $g = 9{,}8$ m . s^{-2} et $\beta = 0{,}2$. Puis calculez l'accélération quand l'inclinaison est égale à $2\,\alpha_m$.

Réponses : **a)** $a = g(\sin\alpha - \beta\cos\alpha)$;
b) $\operatorname{tg}\alpha_m = \beta$;
c) $\alpha_m = 11°18'$, $a = 1{,}96$ m . s^{-2}.

11. Pour permettre à un train de prendre une courbe à vitesse élevée, on relève la voie d'un angle α, de sorte que le rail extérieur au virage soit plus haut que le rail intérieur. La vitesse étant de 100 km/h et le rayon de courbure 300 m, quelle doit être la valeur de α pour que la réaction des rails sur les roues soit perpendiculaire à la voie ?

Réponse : 13°50'.

12. A quelle vitesse maximale une voiture peut-elle prendre un virage de rayon 25 m, sur route horizontale (virage non relevé), sachant que la réaction tangentielle du sol sur la roue est liée à la réaction normale par la relation $R_T \leqslant \beta R_N$, sans quoi il y a dérapage ? (On prendra $\beta = 0{,}5$).

Exercices expérimentaux.

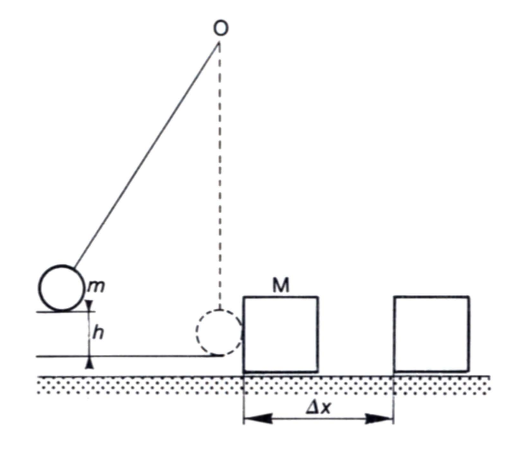
13. a) Une boule de masse m est suspendue à un fil. En maintenant le fil tendu, on l'écarte latéralement de sorte que la boule s'élève de h et on lâche sans donner d'impulsion. Lorsque le fil passe par la position verticale, la boule percute un cube ou un parallélépipède de masse M qui repose sur un plan horizontal.
Après collision, la masse M se déplace de Δx. Déterminez expérimentalement la loi de variation de Δx en fonction de h. Les questions suivantes permettent de justifier théoriquement cette loi.

b) En exprimant le théorème de l'énergie cinétique, calculez la vitesse V de la boule lorsque la direction du fil atteint la verticale.

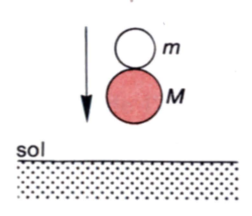
c) A ce moment, se produit une collision avec un cube de masse M posé sur un support horizontal. On admet qu'après collision, la vitesse relative de la boule par rapport au cube est eV, e étant un coefficient numérique (« coefficient de restitution »).
En appliquant la conservation de la quantité de mouvement, calculez la vitesse v du cube immédiatement après le choc.

d) Lors du glissement du cube sur le plan, la réaction tangentielle (force de frottement) a pour valeur βMg, β étant un coefficient numérique (« coefficient de frottement »). Déterminez le vecteur accélération du cube la distance totale parcourue Δx et la durée du mouvement Δt.

e) Exprimez Δx en fonction de h : si vos calculs sont exacts, vous devez retrouver ainsi la loi établie à la question a).



14. a) Procurez-vous une balle de ping-pong et une petite balle de caoutchouc qui rebondit bien. Disposez-les l'une sur l'autre et laissez-les tomber ensemble, comme l'indique la figure ci-dessous.
Qu'observez-vous après le rebond des deux balles ?
Si possible, changez la balle de caoutchouc pour faire varier le rapport des deux masses (M/m). Qu'observez-vous ?



b) Supposons que la hauteur de chute des deux balles soit $h = 1$ m. Avec quelle vitesse V arrivent-elles au niveau du sol ?

c) On peut décomposer le double rebond de la façon suivante, supposons que les deux balles qui tombent ne se touchent pas exactement, mais se suivent à très courte distance : il y a d'abord rebond de la balle de caoutchouc, puis celle-ci vient frapper la balle de ping-pong. On assiste à deux chocs.

Supposons que les chocs soient parfaitement élastiques : cela signifie d'une part que la balle de caoutchouc rebondit avec la vitesse V, et d'autre part que le choc des deux balles se fait avec conservation de l'énergie cinétique (en plus de la conservation de la quantité de mouvement).

En écrivant ces deux lois de conservation, déterminez les vitesses des deux balles après qu'elles se soient percutées, en fonction de V et des masses M et m.

d) Calculez la hauteur H du rebond de la masse m, en fonction de h, M et m. Appliquez numériquement ce résultat lorsque $h = 1$ m et $\frac{M}{m} = 20$.

e) Pour finir, récapitulez les conditions qui permettent d'obtenir le rebond le plus spectaculaire.

Approfondissement.

Les exercices signalés par un carré rouge □ présentent une plus grande difficulté que les autres.

15. Une gouttelette de brouillard qui tombe verticalement est soumise à son poids et à une force de frottement proportionnelle à la vitesse et au rayon de la gouttelette ($f = -\alpha r v$). Le coefficient α vaut $3{,}40 \cdot 10^{-4}$ SI.

a) On observe une gouttelette qui tombe à la vitesse constante de 1 mm . s^{-1}. Calculez son rayon (on donne $g = 9{,}80$ m . s^{-2}).

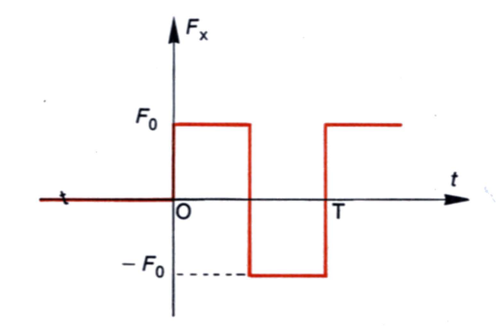
b) Une autre gouttelette, de même rayon, tombe à la vitesse de 0,5 mm . s^{-1}. Calculez son accélération.

Réponses : **a)** $r = 2{,}88$ µm ;
b) $a = 4{,}90$ m . s^{-2}.

16. Un solide de masse M, immobile à l'instant $t = 0$ est mis en mouvement le long d'un axe Ox par une force variable périodiquement (de période T) comme le montre la figure ci-dessous. Pendant une demi-période, $F_x = F_0$ puis pendant la demi-période suivante $F_x = -F_0$.

a) Représentez graphiquement la vitesse v en fonction du temps.
On limitera le tracé aux deux premières périodes ($0 < t < 2T$). Quelle est la vitesse moyenne v_m du mobile ?

b) Représentez graphiquement l'espace parcouru x en fonction du temps, pour $0 < x < 2T$.
Sur le même graphique, représentez la variation de x pour un mobile qui se déplacerait constamment avec une vitesse égale à v_m (vitesse moyenne du solide).

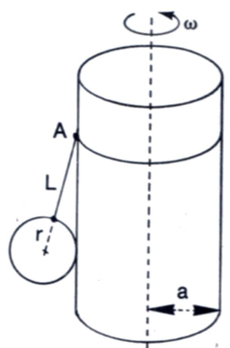


17. Dans un atome d'hydrogène, l'électron est en mouvement autour du proton qu'on peut considérer comme fixe, en première approximation. Suivant le modèle d'atome proposé par Bohr, on considère que l'électron est en mouvement uniforme sur un cercle dont le proton occupe le centre. Dans l'état fondamental, le rayon du cercle est $r = 0{,}53$ Å.

a) Calculez la force électrique d'interaction entre le proton et l'électron. (On rappelle la charge élémentaire $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.)

b) Quelle est la vitesse de l'électron sur sa trajectoire ? Combien de tours effectue-t-il en une seconde ?

18. Sur l'axe d'un moteur, orienté verticalement, on a fixé un cylindre de rayon a, et en un point A de ce cylindre on a accroché un fil de longueur L qui supporte une boule de rayon r et de masse m (figure ci-dessous). On suppose qu'il y a contact sans frottement entre le cylindre et la boule.



a) Représentez les forces qui s'exercent sur la boule.

b) Calculez la tension du fil.

c) Calculez la réaction du cylindre sur la boule, lorsque la vitesse angulaire est ω.

d) Pour quelle valeur de ω le contact cesse-t-il entre le cylindre et la boule ?

19. Une boule de masse m descend un plan incliné de α en roulant sans glisser suivant une ligne de plus grande pente. On trouve que l'accélération du centre d'inertie est $a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$.

a) La réaction du support sur la boule se projette suivant une composante normale $\vec{R_N}$ et une composante tangentielle $\vec{R_T}$. Déterminez ces composantes, en appliquant le théorème du centre d'inertie. Pour l'application numérique, on prendra $m = 100$ g, $\alpha = 30°$ et $g = 9{,}80$ m . s^{-2}.

b) La boule ne peut rouler sans glisser que si $R_T \leqslant \beta R_N$. Le coefficient β dépend des matériaux qui constituent la boule et le plan incliné. En admettant que $\beta = 0{,}2$, quel est la valeur maximale de α qui permet à la boule de rouler sans glisser ?

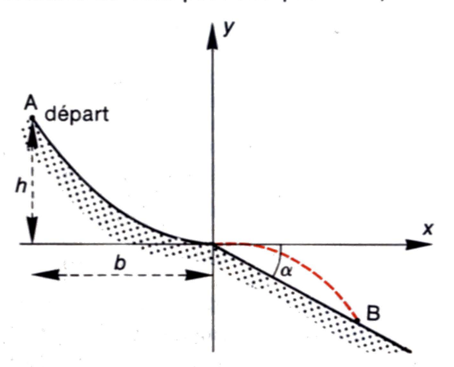
20 Un skieur de masse m descend une pente à profil parabolique, puis effectue un saut et se retrouve sur une pente à profil linéaire (figure ci-dessous). On introduit deux axes Ox (horizontal) et Oy (vertical), le point O étant le sommet de la trajectoire parabolique et Ox la tangente au sommet.

a) Le profil parabolique est défini par les paramètres b et h représentés sur la figure. Quelle est l'équation cartésienne de la parabole ? Exprimez l'énergie potentielle de pesanteur du skieur à l'abscisse x, en posant $E_p = 0$ à l'origine O.

b) En négligeant le frottement des skis sur la neige et la résistance de l'air, exprimez la vitesse du skieur lorsqu'il arrive en O.

c) Le skieur effectue un saut et retombe sur un profil rectiligne incliné de α, d'équation $y = -x \operatorname{tg} \alpha$. Calculez l'abscisse du skieur au point de retombée B.

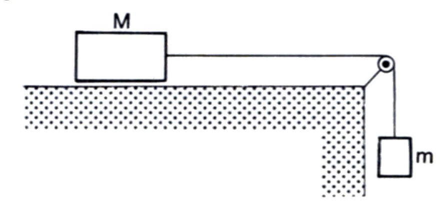
d) Application numérique : $m = 80$ kg ; $g = 9{,}80$ m . s^{-2} ; $h = 50$ m ; $b = 100$ m ; $\alpha = 30°$. Calculez la distance OB (toutes les données ne sont peut-être pas utiles).



21. Deux blocs de masse M et m sont accrochés aux extrêmités d'un fil inextensible qui passe dans la gorge d'une très petite poulie. La masse M glisse sans frottement sur un plan horizontal, alors que la masse m est suspendue au fil, comme le montre la figure ci-contre.

a) On admettra que la tension du fil est pratiquement la même dans le brin horizontal et dans le brin vertical, la poulie étant très petite et tournant sans frottement. Appliquez le théorème du centre d'inertie à chacun des corps, puis déduisez l'accélération a des deux masses ainsi que la tension du fil T en fonction de m, M et g (accélération de la pesanteur).

b) Application numérique : calculez a et T avec $m = 0{,}1$ kg, $M = 1$ kg et $g = 9{,}8$ m . s^{-2}.



22. Reprenez l'exercice précédent avec les modifications suivantes :
— le support de M est incliné de 10° de sorte que la masse M doit monter une pente.
— dans l'application numérique, on prendra $m = 0{,}5$ kg puis on calculera la valeur minimale de m qui permet à la masse $M = 1$ kg de monter la pente.

23 Une planche OA de longueur l et de masse m, mobile autour d'un axe horizontal (Δ) passant par O, fait un angle θ avec le plan horizontal. A son extrémité A est fixé un godet de masse négligeable, dans lequel on a déposé une bille dont on néglige aussi la masse.

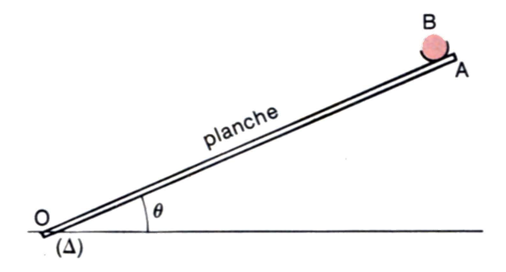
a) Quel est le moment d'inertie de la planche par rapport à l'axe Δ ? (Au besoin, recherchez dans un livre de Première l'expression du moment d'inertie.)

b) La planche est lâchée à partir de l'inclinaison θ_0 sans vitesse initiale. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouvez l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ lorsque l'inclinaison est θ, puis exprimez l'accélération normale du point A sur sa trajectoire.

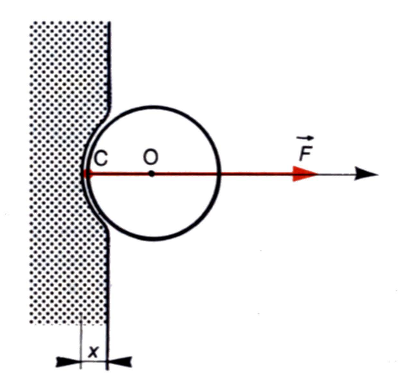
c) Par dérivation de l'expression de $\dot{\theta}^2$, trouvez l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ de la planche, puis l'accélération tangentielle du point A sur sa trajectoire.

d) En utilisant les résultats précédents, trouvez la composante verticale de l'accélération du point A : a_z. Quelle est la valeur initiale de a_z (lorsque $\theta = \theta_0$) ?

e) En déduire à quelle condition la bille quitte le godet dès le début du mouvement de la planche (la bille suit alors une trajectoire verticale).



24 Pendant le choc de deux solides, il se produit une légère déformation élastique des corps en contact, pendant une durée très brève.
Considérons une bille de masse m, qui arrive sur une paroi immobile avec la vitesse V. Supposons que la bille soit très dure et que seule la paroi se déforme. La pénétration (très petite) de la bille étant notée x, la paroi exerce une force proportionnelle à x : $F = kx$.



a) Définissez l'énergie potentielle de la bille pendant le contact et, en admettant que l'énergie mécanique se conserve (choc élastique), déterminez la valeur maximale de x en fonction de k, m et V.

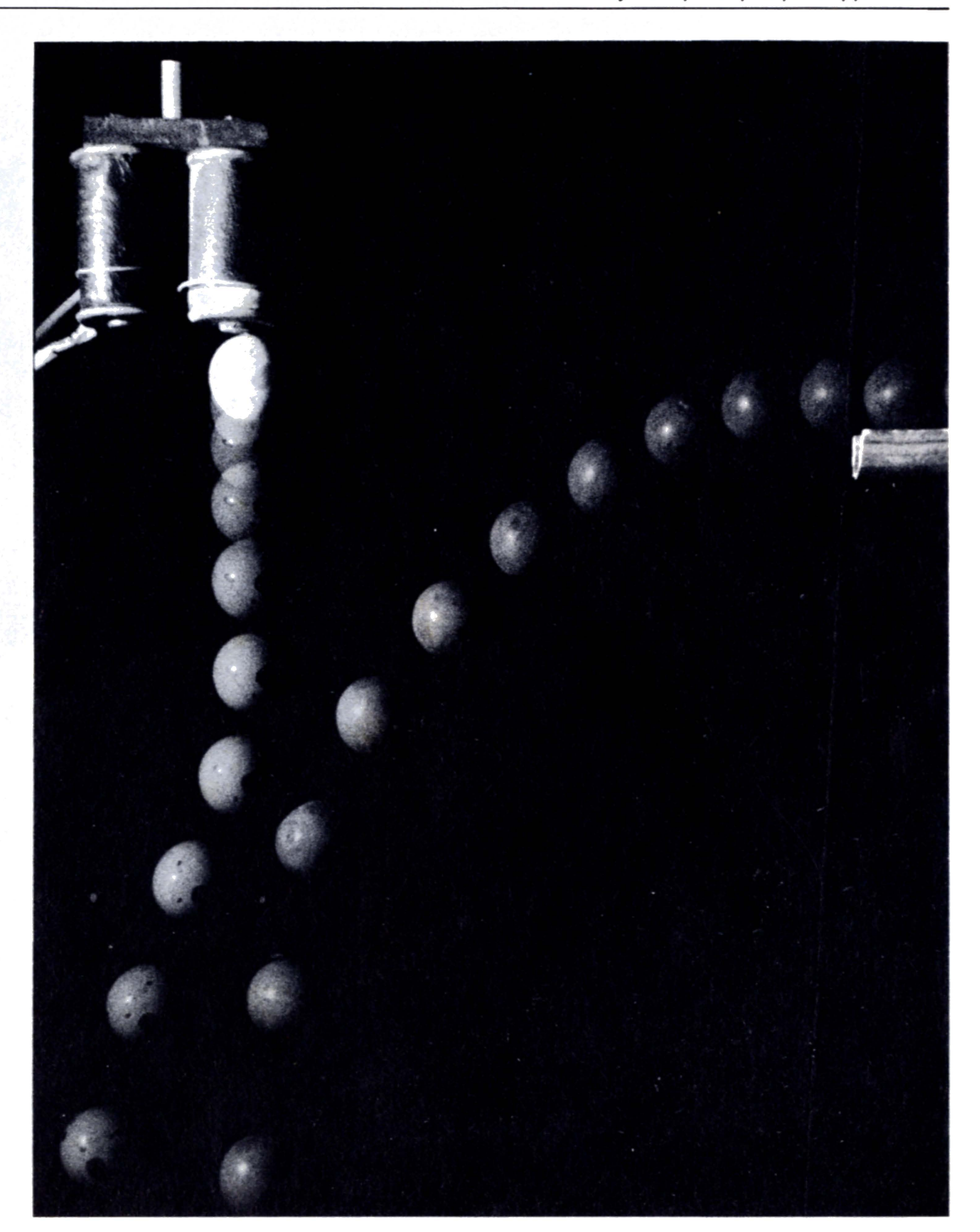
b) En appliquant le théorème du centre d'inertie, calculez l'accélération de la bille en fonction de x. L'origine des dates étant prise au début du choc, vérifiez que x varie suivant une loi de la forme $x = x_m \sin \alpha t$ et déterminez α.

c) Exprimez la durée totale τ du choc en fonction de k et m.

d) Application numérique : pour une bille pesant 100 g arrivant à la vitesse de 10 m . s^{-1}, on a déterminé expérimentalement la durée du choc $\tau = 10^{-4}$ s.
Calculez la valeur maximale de x ainsi que la valeur maximale de la force F.

Réponses : **d)** $x_m = 0{,}315$ mm ; $F_m \simeq 3{,}14 . 10^4$ N.

Exploitation de document.



25. Le document stroboscopique reproduit ci-contre présente le choc « en vol » de deux billes de masses égales à 100 g.

a) Les billes utilisées avaient un diamètre de 2 cm. Quelles sont, approximativement, l'échelle du document et la fréquence des éclairs ?

b) Localisez l'endroit de la collision. Vérifiez que la quantité de mouvement du système des deux billes se conserve au cours du choc. A cette fin, vous utiliserez deux méthodes :
— détermination des vecteurs quantité de mouvement (de chaque bille, puis de l'ensemble) avant et après le choc.
— étude séparée des composantes horizontale et verticale de la quantité de mouvement.

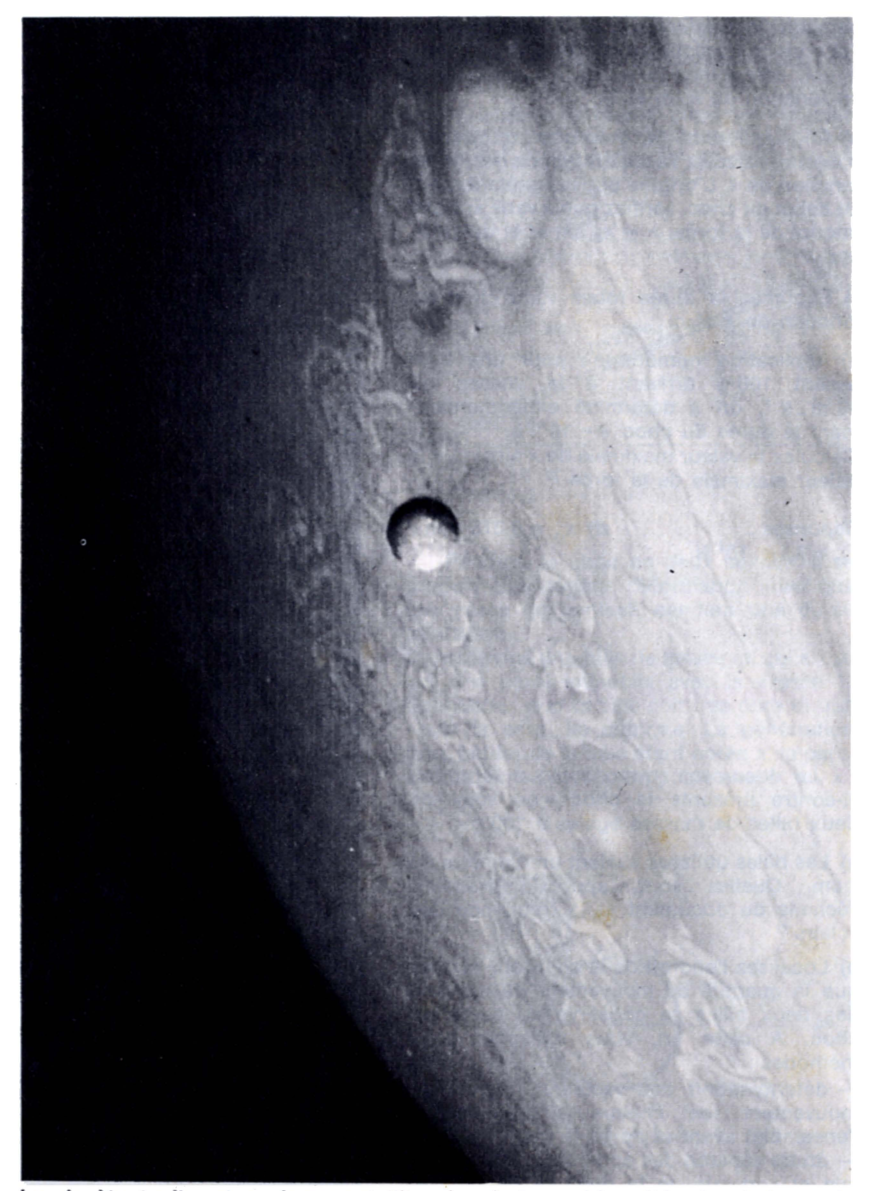
5 Interaction gravitationnelle.

I. Étude générale.

1. Loi de Newton.
2. Champ de gravitation.
3. Énergie potentielle de gravitation.

II. Applications.

1. Répartition de masse à symétrie sphérique.
2. Mouvement des planètes.
3. Satellites artificiels et sondes spatiales.



La planète Jupiter et un de ses satellites. La photographie a été prise de la sonde spatiale Voyager II.

Tous les corps pourvus de masse sont susceptibles d'exercer entre eux des actions, précisément en raison de leurs masses : il s'agit d'actions gravitationnelles. Après une étude générale de ce type d'interaction, nous en examinerons quelques applications intéressantes.

I. Étude générale.

1. Loi de Newton.

C'est Newton qui énonça le premier, vers la fin du 17e siècle, la loi qui régit l'interaction entre deux corps pourvus de masse, ou **interaction gravitationnelle :**

Entre deux points matériels, pourvus de masses m et m' et distants de r, s'exercent des forces d'interaction attractives dont la valeur commune est proportionnelle aux masses m et m' et à l'inverse du carré de la distance r.

Qu'entend-on ici par « points matériels » ? Il s'agit de deux corps dont les dimensions sont petites devant la distance qui les sépare.

La figure 1 représente les forces d'interaction : elles sont dirigées suivant la droite qui porte les points matériels ; elles ont des sens opposés et des valeurs égales, conformément au principe des actions réciproques (ou principe de l'action et de la réaction).

La relation de proportionnalité exprimée par la loi de Newton s'écrit :

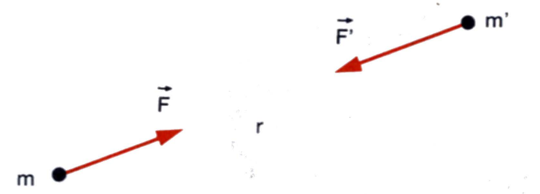
$$F \propto \frac{mm'}{r^2}.$$

Nous noterons K le coefficient de proportionnalité. Il a toujours même valeur, quelles que soient les masses en présence. K est donc une **constante universelle,** appelée **constante de gravitation universelle.** Nous écrivons donc :

$$\boxed{F = K\frac{mm'}{r^2}}.$$

Expression de la loi de Newton :

$$F = K\frac{mm'}{r^2}$$



1. Les forces d'interaction entre deux masses ponctuelles ont même support, des sens opposés, et même valeur : $K\frac{mm'}{r^2}$. Elles sont toujours attractives.

Valeur de la constante de gravitation universelle :

$$K = 6{,}67 \,.\, 10^{-11}\ \text{SI}$$

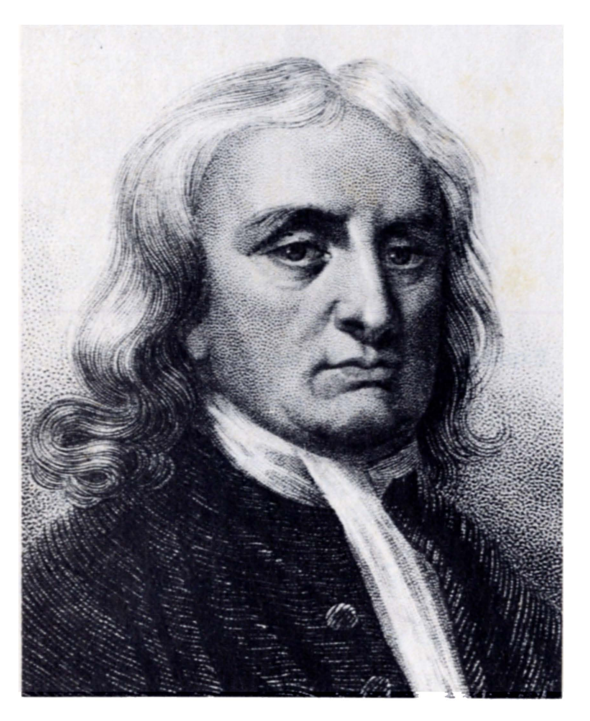
La valeur de K est déduite de mesures. Nous admettrons la valeur approchée suivante :

$$K = 6{,}67 \,.\, 10^{-11}\ \text{SI}.$$

• **Remarque.** Notons l'analogie formelle entre la force de gravitation, et la force électrostatique entre deux charges q et q'.

$$F_e = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0} \,.\, \frac{qq'}{r^2} \quad \left(\text{avec } \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0} = 9 \,.\, 10^9\ \text{SI}\right)$$

Il faut noter ici que la force de gravitation est toujours attractive, alors que la force électrique est tantôt attractive (charges de signes contraires), tantôt répulsive (charges de mêmes signes).



2. Isaac Newton (1643-1727), génial savant anglais. Il posa les bases de la dynamique, et énonça la loi de la gravitation universelle.

Exercice :
Comparer les forces d'interaction électrique et de gravitation entre un proton et un électron distants de 1 angström. Expliquer l'intérêt de cette comparaison. On rappelle les valeurs des charges et des masses :

$$q_p = -\,q_e \approx 1{,}60 \,.\, 10^{-19}\ \text{C}$$
$$m_p \approx 1{,}67 \,.\, 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$m_e \approx 9{,}11 \,.\, 10^{-31}\ \text{kg}\,.$$

Solution : La force électrique se calcule au moyen de la loi de Coulomb :

$$F_e = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_p \,.\, |\,q_e\,|}{d^2} \approx 9 \,.\, 10^9\,\frac{(1{,}60 \,.\, 10^{-19})^2}{(10^{-10})^2}$$

d'où $\quad F_e \approx 2{,}30 \,.\, 10^{-8}\ \text{N}\,.$

La force de gravitation vaut :

$$F_g = K\,\frac{m_e\,m_p}{d^2} \approx 6{,}67 \,.\, 10^{-11}\,\frac{(9{,}11 \,.\, 10^{-31})\,(1{,}67 \,.\, 10^{-27})}{(10^{-10})^2}$$

d'où $\quad F_g = 1{,}01 \,.\, 10^{-47}\ \text{N}\,.$

Formons le rapport des deux forces :

$$\frac{F_e}{F_g} \approx 2{,}27 \,.\, 10^{39}\,.$$

Les interactions ainsi calculées correspondent aux ordres de grandeurs des interactions entre noyaux et électrons à l'intérieur des atomes : nous voyons que la force de gravitation est tout à fait négligeable, avec les particules atomiques.

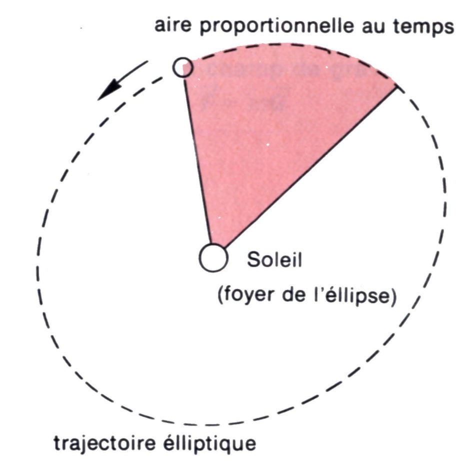
Un peu d'histoire des Sciences.

Newton a établi la loi de la gravitation universelle en vue d'expliquer les déplacements des corps célestes.
Les trois règles qui gouvernent le mouvement des planètes furent publiées en 1609 et 1619 par l'astronome allemand **Képler** *(1571-1630) :*

***1)** Les planètes décrivent des ellipses, dont le Soleil occupe un des foyers.*

***2)** L'aire balayée par le segment qui joint une planète au soleil est proportionnelle au temps.*

***3)** Les carrés des temps de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites.*



3. Illustration des deux premières lois de Képler (noter que l'excentricité de l'ellipse est faible).



4. Johannes Képler (1571-1630), illustre astronome allemand. Il énonça les lois qui régissent le mouvement des planètes.

Ces « lois de Képler » furent établies à partir de nombreuses observations. En raison des prévisions précises qu'elles ont permises, elles consacrèrent définitivement le système héliocentrique de Copernic selon lequel toutes les planètes, y compris la Terre, tournent autour du Soleil. (En opposition avec le système de Ptolémée, qui faisait de la Terre le centre du monde).

Toutefois, si les lois de Képler décrivaient bien le mouvement des planètes, l'explication vint plus tard, grâce au génie du savant anglais **Newton** *(1643-1727). Selon une légende propagée par ses premiers biographes, c'est en observant la chute d'une pomme que Newton eut l'intuition de la gravitation universelle, peut être dès 1666. Mais ce n'est qu'en 1687 que Newton publie l'énoncé de la loi de la gravitation, dans ses célèbres « Philosophiae naturalis principia mathematica ». Il y montre comment on retrouve les lois de Képler par le calcul.*

D'aucuns trouvèrent les vues de Newton trop audacieuses, et il fallut bien un siècle pour obtenir l'approbation unanime des savants. Mais d'année en année, des confirmations toujours plus précises, à propos de divers problèmes de mécanique céleste, furent obtenues par des mathématiciens et astronomes comme Clairaut, Euler, d'Alembert, Lagrange. Ainsi, ce dernier salue la loi de Newton comme « la plus haute production de l'esprit humain » car, écrit-il, « on ne découvre qu'une fois le système du monde ».

2. Champ de gravitation.

a) Définition qualitative.

• **On dit qu'il existe un champ de gravitation, en un point de l'espace, si une particule pourvue de masse et placée en ce point est soumise à une force de gravitation.**
D'après la loi de Newton, les forces de gravitation ont une portée infinie, mais elles diminuent rapidement lorsque la distance des corps en interaction augmente. On dira que le champ de gravitation est d'autant plus petit qu'on est plus loin des corps qui le créent.

• **Exemple.** Une sonde interplanétaire, envoyée dans l'espace depuis la Terre vers Mars, ressent plus ou moins les champs de gravitation de la Terre, de Mars et du Soleil. Pendant la plus grande partie de la trajectoire, le champ créé par le Soleil est prédominant.
Ce n'est qu'au début et à la fin de la trajectoire que les champs planétaires se font sentir nettement : le champ terrestre au début, le champ de Mars à la fin.

b) Vecteur champ de gravitation.

• Nous allons d'abord exprimer vectoriellement la force de gravitation subie par une particule ponctuelle de masse m, située au point M, dans le champ créé par une particule de masse m_1 située au point M_1.
Soit $\vec{u}_1$ le vecteur unitaire porté par $M_1 M$, et dirigé de M_1 vers M. En notant r_1 la distance $M_1 M$, la force d'attraction $\vec{F}_1$ subie par la masse m s'écrit :

$$\vec{F}_1 = -K\frac{m_1 m}{r_1^2}\vec{u}_1 .$$

Si plusieurs masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ agissent sur la masse m, celle-ci subit la force totale :

$$\vec{F} = -K\frac{m_1 m}{r_1^2}\vec{u}_1 - K\frac{m_2 m}{r_2^2}\vec{u}_2 - \ldots - K\frac{m_n m}{r_n^2}\vec{u}_n$$

$$\vec{F} = m\left[-K\left(\frac{m_1\vec{u}_1}{r_1^2} + \frac{m_2\vec{u}_2}{r_2^2} + \ldots + \frac{m_n\vec{u}_n}{r_n^2}\right)\right].$$

(m)
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
$\vec{F}$
$\vec{u}_1$
$\vec{u}_2$
$\vec{G}$
(m_1)
(m_2)

5. Détermination du champ de gravitation créé par deux masses ponctuelles m_1 et m_2.

• Le rapport $\frac{\vec{F}}{m}$, représenté par l'expression entre crochets, est indépendant de la valeur de m. On l'appelle **le vecteur champ de gravitation créé au point M par les masses m_1, m_2, ..., m_n.**

Nous le noterons $\vec{G}$: $\boxed{\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = m\vec{G}}$.

En fait, le champ de gravitation existe au point M, même si l'on n'y a pas mis de masse, mais c'est en y plaçant une masse qu'on peut en faire la mesure. Remarquons que si $m = 1$ kg, la valeur de $\vec{F}$ est égale à la valeur de $\vec{G}$:

Le champ de gravitation au point M est numériquement égal à la force qui s'exercerait sur une masse unité si on la plaçait en M.

• **Remarque.** Notons encore l'analogie avec l'électrostatique : la relation entre force et champ s'écrit ici $\vec{F} = m\vec{G}$, au lieu de $\vec{F} = q\vec{E}$ en électrostatique. Le coefficient m caractérise la particule soumise à la gravitation, comme la charge q caractérise une particule soumise à l'interaction électrique.

Force qui s'exerce sur une particule de masse *m* dans un champ de gravitation $\vec{G}$:
$\vec{F} = m\vec{G}$

c) Expressions générales.

• **Points matériels.**

L'expression du vecteur champ de gravitation créé par n masses ponctuelles se déduit de celle de $\vec{F}$:

$$\vec{G} = -K\left(\frac{m_1\vec{u}_1}{r_1^2} + \frac{m_2\vec{u}_2}{r_2^2} + \ldots + \frac{m_n\vec{u}_n}{r_n^2}\right).$$

En particulier, le champ créé par une seule particule, de masse m, à une distance r s'écrit : $\vec{G} = -K\frac{m\vec{u}}{r^2}$.

• **Répartition continue de masse.**

Lorsque l'on a une masse répartie de façon continue dans un corps de grand volume, une petite parcelle de masse dm crée à la distance r le champ : $d\vec{G} = -K\frac{\vec{u}dm}{r^2}$.

Le champ créé par le corps tout entier s'obtient en calculant une somme de champs élémentaires comme $d\vec{G}$. On comprend que de tels calculs se ramènent à déterminer des intégrales.

3. Énergie potentielle de gravitation.

a) Rappel.

Il est possible de définir l'énergie potentielle d'une particule soumise à une force $\vec{f}$ lorsque **le travail de la force ne dépend pas du chemin suivi.** Alors, dans un déplacement donné, **le travail de la force est égal à la diminution d'énergie potentielle :**

$$W = - \Delta Ep .$$

Pour un déplacement très petit, nous noterons δW le travail élémentaire et dE_p la petite variation d'énergie potentielle. Nous écrirons :

$$\delta W = - dE_p .$$

Lorsqu'on a exprimé δW, on connaît ainsi dE_p et la détermination de E_p revient à un calcul d'intégrale.

b) Particule de masse *m* dans le champ d'une particule fixe de masse *M*.

Plaçons nous dans un référentiel où la particule de masse M est fixe, en un point O. La particule de masse m est au point P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. Elle est soumise au champ de gravitation $\vec{G}$ créé par la masse M, et subit la force :

$$\vec{f} = m\vec{G} = - KmM \,.\, \frac{\vec{r}}{r^3} . \left(\text{En effet } \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Considérons un petit déplacement $d\vec{r}$ de la masse m, de P en P' (figure 6). Le travail de $\vec{f}$ s'écrit :

$$\delta W = \vec{f} \,.\, d\vec{r} = - KmM \frac{\vec{r} \,.\, d\vec{r}}{r^3} .$$

En introduisant les composantes cartésiennes de r, on peut écrire :

$$\vec{r} \,.\, d\vec{r} = xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) .$$

Mais $(x^2 + y^2 + z^2)$ est égal à r^2, carré de la distance $OP = r$.

Par suite : $$\vec{r} \,.\, d\vec{r} = \frac{1}{2} d(r^2) = rdr .$$

6. Travail de la force de gravitation $\vec{f}$ dans un petit déplacement $d\vec{r}$ de la masse m : $\delta W = \vec{f} \,.\, d\vec{r}$.

L'expression de δW peut donc s'écrire :

$$\delta W = -\,KmM\,\frac{dr}{r^2}.$$

Identifions avec la diminution d'énergie potentielle ($-\,dE_p$) :

$$dE_p = KmM\,\frac{dr}{r^2}.$$

Intégrons cette expression :

$$E_p = -\,KmM\,.\frac{1}{r} + C.$$

La constante d'intégration C est arbitraire. Le choix le plus simple consiste à poser $C = 0$, d'où :

$$\boxed{E_p = -\,\frac{KMm}{r}}\,.$$

La convention choisie revient à admettre que **l'énergie potentielle est nulle lorsque les masses *M* et *m* sont à distance infinie l'une de l'autre.** La formule que nous venons d'établir montre que l'énergie potentielle est inversement proportionnelle à la distance des deux masses.

Énergie potentielle de gravitation d'une particule de masse *m* dans le champ d'une particule de masse *M*, à la distance *r* :

$$E_p = -\,K\frac{Mm}{r}$$

Remarques :

- Lorsque plusieurs masses ponctuelles M_1, M_2, … créent le champ de gravitation, les forces $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ appliquées à la masse m exercent des travaux $\vec{f_1}\,.\,d\vec{r}_1$ et $\vec{f_2}\,.\,d\vec{r}_2$ qui s'ajoutent. Par conséquent, les énergies potentielles s'ajoutent.

- On appelle **potentiel de gravitation** (noté Φ) en un point P une grandeur numériquement égale à l'énergie potentielle d'une particule de masse unité placée en P. Ainsi, pour une masse m disposée en P, l'énergie potentielle est $E_p = m\Phi$. Cette définition est comparable à celle du potentiel électrostatique V, introduit en classe de Première.

II. Applications.

1. Répartition de masse à symétrie sphérique.

a) Définition.

On dit qu'une répartition de masse est à symétrie sphérique lorsque la masse volumique ne varie pas si l'on se déplace sur une sphère quelconque dont le centre coïncide avec celui de la répartition.
Une bille d'acier et une balle de ping-pong présentent cette symétrie sphérique. Celle-ci se reconnaît (superficiellement) dans le fait que l'aspect de ces objets ne change pas quand on leur fait subir une rotation quelconque autour de leur centre ; plus précisément, il faut que la répartition de la masse dans l'espace soit inchangée dans toute rotation autour du centre.

La Terre, les planètes et les étoiles, peuvent être considérées en première approximation comme des corps où la répartition de la masse présente la symétrie sphérique.
Nous en verrons plus loin des applications.

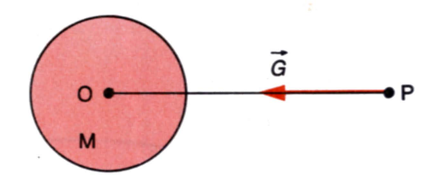
b) Champ créé.

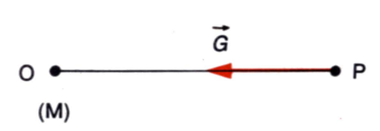
Il est possible de démontrer le résultat suivant, établi initialement par Newton :
Une répartition de masses ayant une symétrie sphérique, le champ de gravitation qu'elle crée en son extérieur est le même que si toute la masse était concentrée au centre.
Si M est la masse totale de la répartition, le champ de gravitation en un point extérieur, situé à la distance r du centre, s'écrit donc :

$$\vec{G} = -KM\frac{\vec{u}}{r^2}$$

(le vecteur unitaire $\vec{u}$ étant dirigé du centre vers le point considéré).
Par conséquent, l'énergie potentielle d'un objet quasi ponctuel de masse m, placé dans le champ, a même expression que si la masse M était ponctuelle :

$$E_p = -\frac{KMm}{r}.$$





7. Une répartition de masse à symétrie sphérique, de centre O, ou une masse ponctuelle de même valeur, placée en O, créent au point P le même champ de gravitation.

c) 1er exemple : Champ de gravitation de la Terre.

• La forme de la Terre est assez proche d'une sphère. Les aspérités qu'elle présente (montagnes) ne sont pas plus importantes, à l'échelle de la Terre, que celles qu'on observe à la surface d'une orange. D'autre part l'aplatissement au niveau des pôles est très faible : la section méridienne de la Terre est une ellipse, mais le petit axe de l'ellipse ne diffère du grand axe que de 0,3 % environ.
Enfin, les mesures du champ de gravitation montrent que celui-ci est sensiblement constant quand on se déplace en restant à égale distance du centre de la Terre.
Cela suggère que la répartition de la masse à l'intérieur de la Terre est à symétrie sphérique, avec une bonne approximation.

• **Égalité approximative des champs de gravitation et de pesanteur.**
La valeur du champ de gravitation à la surface de la Terre est voisin de :

$$G \approx 9{,}83 \text{ N/kg}.$$

Cette valeur est proche de celle de l'intensité de la pesanteur g. En réalité, la pesanteur est due essentiellement à la gravitation, mais nous verrons au prochain chapitre pourquoi g et G diffèrent un peu.

• **Variation de l'intensité de la pesanteur avec l'altitude.**
En un point d'altitude h, la distance au centre de la Terre est $(R + h)$, si nous notons R le rayon terrestre. Le champ de pesanteur est approximativement égal au champ de gravitation créé par la Terre (de masse M_T)

$$g \approx G = K \frac{M_T}{(R+h)^2} = K \frac{M_T}{R^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

Considérons des points d'altitude petite devant R, soit $\frac{h}{R} \ll 1$. Nous pouvons alors transformer l'expression précédente par un développement limité au 1er ordre en $\frac{h}{R}$:

$$g \approx \frac{KM_T}{R^2}\left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

Or, $\frac{KM_T}{R^2}$ est le champ de pesanteur g_0 obtenu à l'altitude nulle ($h = 0$).

Par suite : $$\boldsymbol{g \simeq g_0\left(1 - \frac{2h}{R}\right)} \quad \textbf{lorsque} \quad \boldsymbol{h \ll R}.$$

Ainsi, aux basses altitudes, g est une fonction affine de h. La décroissance relative de g entre les altitudes 0 et h s'exprime par :

$$\frac{g - g_0}{g_0} \simeq - \frac{2h}{R}.$$

Comme $R \simeq 6\,400$ km, prenons par exemple $h = 32$ km. On obtient :

$$\frac{g - g_0}{g_0} \simeq - \frac{1}{100}.$$

Retenons l'ordre de grandeur de ce résultat : **l'intensité de la pesanteur diminue de 1 % lorsqu'on s'élève de 32 km.**

- **Masse de la Terre.**

Exercice : Calculer la masse de la Terre, sachant que son rayon est de 6 370 km. En déduire la masse volumique moyenne de la Terre, et comparer à la masse volumique au niveau des couches superficielles, qui est de 3 000 kg/m³ environ.

Solution : La répartition de masse étant à symétrie sphérique, le champ de gravitation à la surface se calcule comme si toute la masse était concentrée au centre :

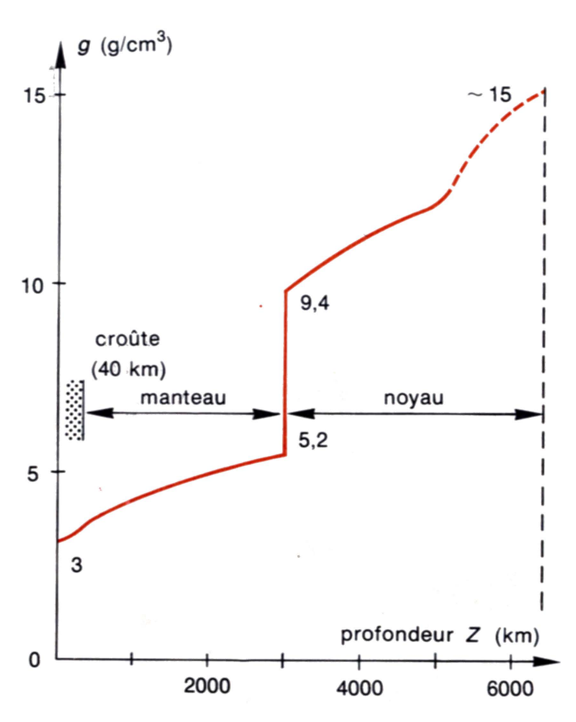
$$G = K\frac{M}{R^2} \quad \text{d'où on tire} \quad M = \frac{GR^2}{K}.$$

Numériquement : $M = \frac{9{,}83 \times (6{,}37 \,.\, 10^6)^2}{6{,}67 \,.\, 10^{-11}} = 5{,}98 \,.\, 10^{24}$ kg.

La masse volumique moyenne s'obtient en divisant M par le volume $\frac{4}{3}\pi R^3$:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad \text{d'où :} \quad \rho = \frac{3 \times 5{,}98 \,.\, 10^{24}}{4\pi \times (6{,}37 \,.\, 10^6)^3} = 5{,}52 \,.\, 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

On observe que la masse volumique moyenne de la Terre est plus grande que la masse volumique au niveau de la surface.
Le globe terrestre n'est donc pas homogène, sa densité augmente avec la profondeur.
Des renseignements complémentaires, obtenus en étudiant la propagation des ondes sismiques (émises par les tremblements de terre), sont précisés sur la figure 8.



8. Masse volumique à l'intérieur de la Terre, en fonction de la profondeur. Les valeurs indiquées sont peu précises : elles proviennent de mesures indirectes assez délicates (étude de la propagation d'ondes sismiques).

d) 2e exemple : Champ de gravitation à la surface d'une étoile.

Les étoiles peuvent être considérées approximativement comme des corps où la répartition de masses est à symétrie sphérique. Le champ de gravitation à la surface d'une étoile est beaucoup plus grand qu'à la surface de la Terre, comme le montre l'exercice suivant, pour deux types d'étoiles très différentes.

Exercice : a) Sachant que la masse du Soleil est de 1,99 . 10^{30} kg, et son rayon de 696 000 km, calculer le champ de gravitation à sa surface.
b) Les étoiles à neutrons sont beaucoup plus denses que le Soleil (la concentration de matière est du même ordre de grandeur qu'à l'intérieur d'un noyau atomique). Par exemple, on calcule que pour une étoile à neutron de masse double de la masse du Soleil, le rayon doit être voisin de 10 km. Calculer le champ de gravitation à sa surface.

Solution : La répartition de la masse étant à symétrie sphérique, le champ de gravitation se calcule comme si toute la masse était concentrée au centre :

$$G = K \frac{M}{R^2}$$

où M est la masse de l'étoile, et R son rayon.

a) Soleil :

$$G = 6{,}67 \,.\, 10^{-11} \frac{1{,}99 \,.\, 10^{30}}{(6{,}96 \,.\, 10^{8})^2} \approx 274 \text{ N/kg} ;$$

b) Étoile à neutrons :

$$G = 6{,}67 \,.\, 10^{11} \frac{2 \times (1{,}99 \,.\, 10^{30})}{(10^4)^2} = 2{,}65 \,.\, 10^{12} \text{ N/kg} .$$

Conclusion : Le champ de gravitation est environ 28 fois plus intense à la surface du Soleil que sur Terre. Il est encore 10^{10} fois (10 milliards de fois) plus intense à la surface d'une étoile à neutrons. A la surface d'une telle étoile, un corps ordinaire (formé de molécules) serait écrasé complètement : dans ces conditions, protons et électrons fusionnent pour donner des neutrons, c'est pourquoi une telle étoile est constituée essentiellement de neutrons.

2. Mouvement des planètes.

a) Approximation de la première loi de Képler : mouvements circulaires.

Par rapport au référentiel de Copernic, les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un foyer (1re loi de Képler). En réalité, **ces ellipses sont très proches de cercles :** la distance d'une planète au Soleil varie seulement de quelques pour cent.
Par exemple, pour la Terre, l'écart annuel est de 3,3 % environ, entre la distance la plus petite et la distance la plus grande.

Remarque. Une planète est soumise essentiellement à l'attraction du Soleil, et l'action des autres planètes ne se manifeste que par de très faibles perturbations, que nous pourrons négliger dans la suite.

b) Démonstration des 2e et 3e lois de Képler, dans l'approximation des trajectoires circulaires.

• La deuxième loi (voir page 71) se simplifie : **la vitesse angulaire d'une planète sur sa trajectoire est constante.** Autrement dit, le mouvement est circulaire et uniforme.
En effet, la planète est soumise à une force de gravitation $\vec{f}$ dirigée vers le centre du cercle (figure 9). Il en résulte que son accélération $\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}$ est également centripète : l'accélération tangentielle est donc nulle. Or, de façon générale, l'accélération tangentielle d'un mouvement s'écrit :

$$a_T = \frac{dv}{dt}.$$

Le fait que a_T soit nulle prouve que la vitesse v est constante. Par suite, la vitesse angulaire $\omega = \frac{v}{R}$ est aussi constante.

• La troisième loi (voir page 71) s'écrit ici : **le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du rayon de la trajectoire.**
Pour démontrer cette loi, notons que, la vitesse étant constante, la période de révolution s'obtient en divisant la longueur du cercle par la vitesse :

$$T = \frac{2\,\pi R}{v}, \quad \text{d'où} \quad T^2 = \frac{4\,\pi R^2}{v^2}.$$

9. Les trajectoires des planètes sont voisines de cercles, décrits à vitesse constante. La force centripète qui entretient le mouvement est la force de gravitation exercée par le Soleil.

Exprimons l'accélération : $\frac{v^2}{R} = K\frac{M}{R^2}$, d'où $v^2 = K\frac{M}{R}$.

Par suite : $T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{KM}$ ou : $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{KM}$.

Le deuxième membre de cette expression ne dépend pas de la planète considérée, puisque M est la masse du Soleil.

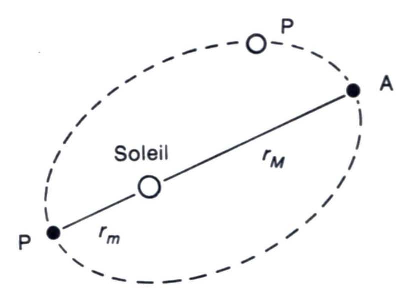
Par suite, pour toutes les planètes : $\frac{T^2}{R^3} = \text{cte}$.

• **Remarque.** Dans la réalité, la trajectoire n'est jamais exactement circulaire : elle est elliptique. Notons r_m la distance minimale (planète à son périhélie) et r_M la distance maximale (planète à l'aphélie). Nous admettrons sans démonstration que la loi de Képler reste valable, en remplaçant R par la distance moyenne $A = \frac{r_m + r_M}{2}$, qui représente aussi le demi-grand axe de la trajectoire elliptique (figure 10).
Dans le tableau ci-dessous sont consignées les valeurs mesurées par les astronomes : l'unité de longueur est ici le demi-grand axe de la trajectoire terrestre et l'unité de temps est l'année. Prenons les logarithmes des deux membres de l'expression $\frac{T^2}{A^3} = C$:

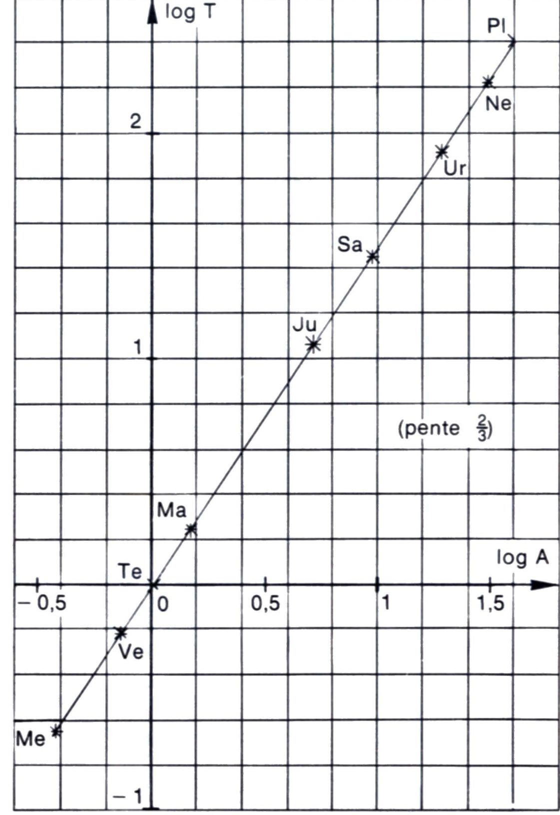
$$2 \log T - 3 \log A = \log C, \text{ d'où } \log T = \frac{3}{2}\log A + \frac{1}{2}\log C.$$

L'alignement des points obtenus sur le graphique (figure 11) vérifie la troisième loi de Képler.

Planète	demi-grand axe A	période T	log A	log T
Mercure	0,387	0,241	− 0,412	− 0,618
Vénus	0,713	0,615	− 0,141	− 0,211
Terre	1,000	1,000	0,000	0,000
Mars	1,524	1,881	0,182	0,274
Jupiter	5,203	11,86	0,716	1,074
Saturne	9,540	29,46	0,980	1,469
Uranus	19,18	84,01	1,283	1,924
Neptune	30,07	164,8	1,478	2,217
Pluton	39,44	248,4	1,596	2,395



10. Trajectoire elliptique d'une planète (l'excentricité est nettement exagérée). Le point A est l'aphélie, le point P est le périhélie.



11. Vérification de la troisième loi de Képler : T est la période de révolution d'une planète et A est sa distance moyenne au Soleil.

3. Satellites artificiels et sondes spatiales.

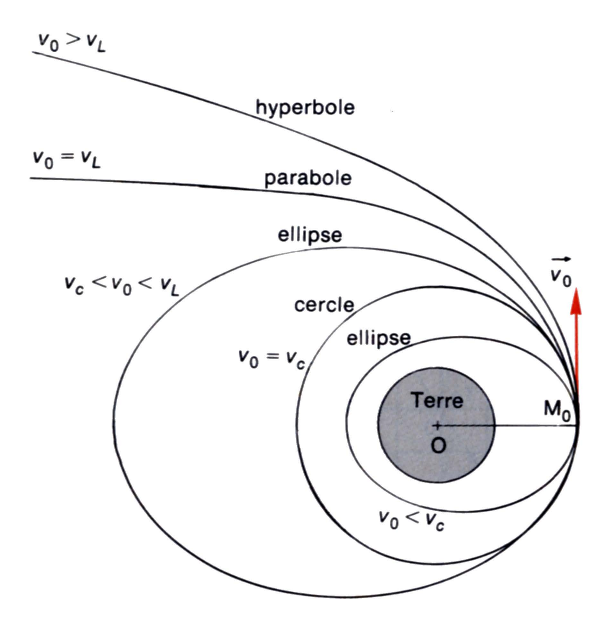
Un satellite artificiel est un engin qui gravite autour de la Terre, alors qu'une sonde spatiale « échappe » à l'attraction terrestre, en vue d'explorer d'autres planètes ou des espaces plus lointains encore.

a) Différents types de trajectoires.

Nous étudierons le mouvement par rapport au référentiel géocentrique (de Coriolis) supposé galiléen. Supposons qu'un corps soit envoyé à haute altitude au moyen d'une fusée jusqu'en un point M_0, puis qu'en ce point le corps soit abandonné, avec une vitesse initiale horizontale v_0 (figure 12) par rapport au référentiel géocentrique. En l'absence d'attraction terrestre, le mouvement continuerait tout droit (principe de l'inertie), mais la Terre a pour effet d'incurver la trajectoire, d'autant plus que la vitesse initiale v_0 est plus petite.

- Lorsque la vitesse initiale v_0 est suffisamment grande, le corps peut s'éloigner de la Terre jusqu'à l'infini et constitue donc une sonde spatiale : la trajectoire est alors une portion **d'hyperbole** dont le centre de la Terre occupe un foyer.
- Lorsque v_0 est inférieure à une certaine vitesse critique v_L (dite vitesse de libération), le corps est maintenu sur une orbite circumterrestre : il s'agit d'un satellite. La trajectoire est alors une **ellipse** dont le centre de la Terre occupe un foyer.
- Deux trajectoires particulières sont théoriquement possibles : d'une part pour $v_0 = v_L$, la trajectoire est une **parabole.** D'autre part, pour une certaine valeur $v_0 = v_c$, dite **vitesse de satellisation circulaire,** la trajectoire est un cercle.

Toutes ces possibilités sont rassemblées sur la figure 12.



12. Trajectoires d'un engin spatial, abandonné à partir d'un point M_0 avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0$.

b) Première vitesse cosmique (v_1).

On appelle première vitesse cosmique la vitesse horizontale qu'il faut communiquer à un satellite, par rapport au référentiel géocentrique, pour le mettre sur une orbite circulaire basse, après l'avoir transporté hors de l'atmosphère au moyen d'une fusée ; on montre que cette vitesse est voisine de 7,8 km/s. Il faut évidemment que le satellite soit pratiquement sorti de l'atmosphère terrestre (sinon il serait freiné). Le rayon de la Terre étant de 6 370 km, on peut considérer une orbite de rayon 6 500 km, qui correspond à une altitude de 130 km.

Exercice : 1) Sachant que la masse de la Terre est de 5,98 . 10^{24} kg, calculer la première vitesse cosmique v_1.
2) Calculer aussi la vitesse minimale v_1' qui correspond à v_1 dans le référentiel terrestre.

Solution : 1) A l'échelle du mouvement, le satellite est pratiquement un mobile ponctuel. Sur une trajectoire circulaire de rayon r_0, parcourue à la vitesse v_1, le vecteur accélération a pour module $\frac{v_1}{r_0}$. Le satellite est soumis à la force de gravitation $K\frac{Mm}{r_0^2}$, où M est la masse de la Terre et m celle du satellite. Écrivons la relation fondamentale de la dynamique :

$$K\frac{Mm}{r_0^2} = m\frac{v_1^2}{r_0}. \text{ Par suite : } v_1 = \sqrt{\frac{KM}{r_0}}.$$

Numériquement $v_1 = \sqrt{\frac{6,67 \,.\, 10^{-11} \times 5,98 \,.\, 10^{24}}{6,5 \,.\, 10^6}} = 7,83 \,.\, 10^3 \text{ m . s}^{-1}$.

$$\boxed{v_1 = 7,83 \text{ km/s}}$$

2) Il faut tenir compte de la rotation de la Terre sur elle-même. Le point de la Terre d'où s'effectue le lancement possède une vitesse $\vec{u}$ par rapport au référentiel géocentrique (figure 13). Le module de cette vitesse est maximal au niveau de l'Équateur et vaut :

$$u_M = \omega r = \frac{2\pi}{24 \times 3\,600} \times 6,5 \,.\, 10^6 = 472 \text{ m . s}^{-1} \quad \text{soit :} \quad u_M = 0,47 \text{ km/s}.$$

Appliquons la loi de composition des vitesses : le vecteur vitesse par rapport au référentiel géocentrique est égal au vecteur vitesse par rapport à la Terre, augmenté de $\vec{u}$:

$$\vec{v_1} = \vec{v_1'} + \vec{u}.$$

Les modules v_1 et u étant fixes, nous observons sur la figure 14 que v_1' est le plus petit possible lorsque les trois vecteurs sont colinéaires et de même sens. Alors :

$$v_1' = v_1 - u.$$

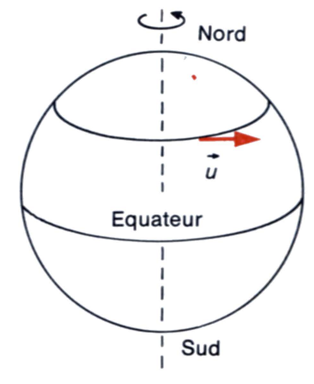
La valeur de u dépend du point de lancement. La vitesse v_1' est minimale lorsque u présente sa valeur maximale u_M :

$$v_1' = v_1 - u_M.$$

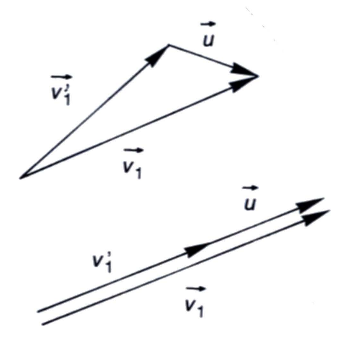
Introduisons les valeurs numériques : $v_1' = 7,83 - 0,47 = 7,36$ km/s.

En conclusion, on tire profit le mieux possible de la rotation de la Terre en respectant deux conditions :
— vitesse initiale dirigée dans le même sens que $\vec{u}$, c'est-à-dire en direction de l'Est.
— lancement depuis un cosmodrome situé le plus près possible de l'Équateur : cet argument est pris en compte dans le choix du site d'un cosmodrome ; à cet égard, celui de Kourou (en Guyane française) est particulièrement bien placé.

Première vitesse cosmique = vitesse de satellisation circulaire à basse altitude autour de la Terre.



13. Par rapport au référentiel géocentrique, un point de la Terre a une vitesse $\vec{u}$ dirigée vers l'Est.



14. Composition des vitesses dans un changement de référentiel. Les modules de $\vec{u}$ et de $\vec{v_1'}$ étant fixés, la valeur de $\vec{v_1}$ est la plus grande possible lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v_1'}$ sont colinéaires et de même sens.

Deuxième vitesse cosmique = vitesse de libération de l'attraction terrestre.



15. « De la Terre à la Lune » Jules Verne (1865). Jules Verne envisage le lancement d'une cabine habitée à l'aide d'un canon. Cela suppose que la mise à feu communique au projectile une vitesse proche de la deuxième vitesse cosmique.

c) Deuxième vitesse cosmique (v_2).

On appelle ainsi la vitesse minimale qu'il faut communiquer à un corps, dans le référentiel géocentrique, pour qu'il échappe à l'attraction terrestre, lorsqu'il est abandonné hors de l'atmosphère à basse altitude (distance au centre de la Terre : 6 500 km). Cette vitesse vaut environ 11 km/s.

Exercice : Calculer la deuxième vitesse cosmique. Montrer qu'elle s'obtient en multipliant la première vitesse cosmique par un coefficient numérique simple.

Solution : Exprimons l'énergie mécanique du satellite :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{KMm}{r}.$$

Lorsqu'une sonde spatiale s'éloigne à très grande distance de la Terre, l'énergie potentielle tend vers zéro, et l'énergie se réduit à l'énergie cinétique qui est toujours positive. Par suite $E \geqslant 0$.

La force de gravitation étant la seule force qui agit sur la sonde spatiale, l'énergie mécanique se conserve.

Par suite, l'énergie mécanique doit être positive au point de lancement (vitesse v_0, distance r_0 du centre de la Terre) :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{KMm}{r_0} \geqslant 0 \quad \text{d'où} \quad v_0^2 \geqslant \frac{2\,KM}{r_0}$$

La vitesse minimale, notée v_2, est donc : $v_2 = \sqrt{\dfrac{2\,KM}{r_0}}$

Pour le calcul numérique, remarquons la relation entre les deux vitesses cosmiques v_1 et v_2 :

$$v_2 = v_1\sqrt{2} = 7{,}83\sqrt{2}$$

$$\boxed{v_2 \approx 11{,}0 \text{ km/s}}\ .$$

Une sonde destinée à explorer des planètes autres que la Terre doit avoir au moins cette vitesse lorsqu'elle est séparée de la fusée de lancement.

d) Troisième vitesse cosmique (v_3).

Il s'agit de la vitesse qu'il faut communiquer à un engin depuis une orbite terrestre basse pour qu'il échappe à l'attraction de la Terre, puis du Soleil : v_3 est la vitesse initiale minimale d'une sonde destinée à sortir du système solaire. On peut montrer (voir l'exercice suivant) que cette vitesse vaut $v_3 = 16{,}4$ km/s.

Exercice : Calculer la troisième vitesse cosmique v_3. On donne la masse du Soleil ($M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg) et la distance du Soleil à la Terre (D = 150 millions de km).

Solution : Calculons d'abord la vitesse que doit avoir la sonde après avoir échappé à l'attraction terrestre. Si nous nous plaçons dans le référentiel stellaire (de Copernic), le problème est le même que celui que nous avons résolu pour obtenir v_2 : la vitesse doit être :

$$v_3' = \sqrt{\frac{2\,KM_s}{D}}.$$

Numériquement : $$v_3' = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 1{,}99 \cdot 10^{30}}{1{,}5 \cdot 10^{11}}}.$$

$v_3' = 42\,070$ m . s^{-1} soit $v_3' \simeq 42{,}1$ km/s.
Pour atteindre cette vitesse, on peut tirer profit de la vitesse de la Terre sur son orbite, en lançant la sonde tangentiellement à la trajectoire terrestre dans le même sens que le mouvement de la Terre.
La vitesse de la Terre est :

$$u = \frac{2\,\pi D}{T} = \frac{2\,\pi \times 1{,}5 \cdot 10^{11}}{3\,600 \times 24 \times 365} = 2{,}99 \cdot 10^4 \text{ m . s}^{-1} \text{ soit } 29{,}9 \text{ km/s.}$$

Par rapport au référentiel géocentrique, il suffit que la sonde ait la vitesse :

$$v_3'' = v_3 - u = 42{,}1 - 29{,}9 = 12{,}2 \text{ km/s}.$$

Cette vitesse est celle de la sonde après qu'elle ait échappé à l'attraction de la Terre ; l'énergie potentielle de gravitation terrestre est alors nulle.
En raison de la conservation de l'énergie, l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m v_3''^2$ doit être égale à l'énergie communiquée à la sonde en orbite basse :

$$\frac{1}{2} m v_3''^2 = \frac{1}{2} m v_3^2 - \frac{KM_T\,m}{r_0} \qquad \text{d'où :} \qquad v_3^2 = v_3''^2 + \frac{2\,KM_T}{r_0}.$$

L'expression $\frac{2\,KM_T}{r_0}$ correspond au carré de la deuxième vitesse cosmique. Par suite :

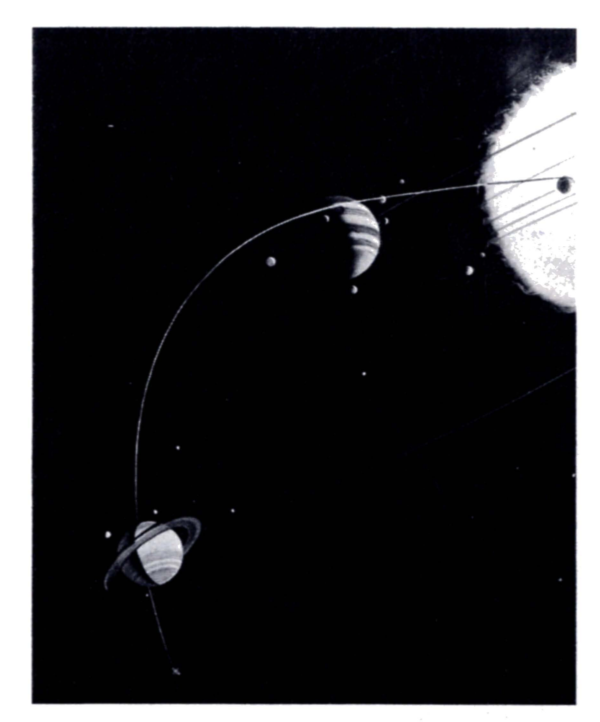
$$v_3^2 = v_3''^2 + v_2^2 \quad \text{et} \quad v_3 = \sqrt{v_3''^2 + v_3^2}$$
$$v_3 = \sqrt{(12{,}2)^2 + (11{,}0)^2}.$$

D'où

$$\boxed{v_3 = 16{,}4 \text{ km/s}}\ .$$

En fait, il est possible de quitter le système solaire sans atteindre une telle vitesse initiale. Il suffit que la vitesse initiale permette d'atteindre une autre planète. On profite alors de l'action de cette planète dont la gravitation permet de communiquer à la sonde une vitesse supplémentaire. (Technique de « l'assistance gravitationnelle » : voir exercice 27).

Troisième vitesse cosmique = vitesse qu'il faut communiquer à un engin, près de la Terre, pour qu'il puisse quitter le système solaire.



16. Vue artistique du système solaire, avec la trajectoire d'une sonde passant près de Jupiter et de Saturne.
L'« assistance gravitationnelle » par ces planètes permet de quitter le système solaire sans que la sonde ne soit lancée initialement avec la vitesse cosmique v_3.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- La force d'interaction entre deux masses ponctuelles m_1 et m_2 est ______ à ces masses, et ______ proportionnelle ______ de leur distance.
- Le vecteur champ de gravitation en un point est numériquement égal à la ______ qui s'exercerait sur une masse ______ placée en ce point. Lorsqu'une particule de masse m est placée en un point où le champ est $\vec{G}$, elle est soumise à la force $\vec{F} =$ ______.
- L'expression $-\frac{KMm}{r}$ représente l'énergie ______ d'une masse m dans le champ d'une masse M, supposée ______, à la distance r.
- Lorsqu'une répartition de masse présente la symétrie sphérique, le champ qu'elle crée en son ______ a même valeur que si toute la masse était ______.
- Le champ de gravitation terrestre est ______ égal au champ de ______ représenté par $\vec{g}$.
- Les trajectoires des planètes sont des ______ (voisines de cercles) dont le Soleil occupe un ______. Les satellites artificiels de la Terre ont des trajectoires circulaires ou ______, alors que les sondes spatiales ont des trajectoires ______ ou ______, par rapport au ______ géocentrique.
- Les trois vitesses cosmiques correspondent aux trois circonstances suivantes : satellisation ______, libération de l'attraction ______, ______ de l'attraction solaire.

Petites questions.

1. Précisez l'unité SI avec laquelle il faut exprimer la constante de gravitation universelle K (en fonction des unités fondamentales : m, kg et s).

2. A quelle altitude une fusée est-elle soumise à un champ de gravitation quatre fois plus faible qu'à la surface de la Terre ?

3. En admettant que l'on découvre une très petite planète dont la distance au Soleil serait double de celle de la Terre, quelle serait sa période de révolution ?

4. Pourquoi n'est-il pas possible de satelliser un corps autour de la Terre, en le lançant depuis le sol au moyen d'un canon ?

5. La Lune est attirée par la Terre. Pourquoi ne tombe-t-elle pas sur la Terre ?

6. Que pourriez-vous dire du champ de gravitation au centre de la Terre, en admettant que la répartition de masse est à symétrie sphérique ?

Applications immédiates.

7. Deux boules sphériques de masses égales à 1 tonne sont disposées de telle sorte que leurs centres soient à un mètre l'un de l'autre. Quelle est la valeur des forces d'interaction gravitationnelle ?

8. De retour des vacances où ils se sont rencontrés, un garçon et une fille s'écrivent. Le garçon (70 kg) habite Strasbourg et la fille (50 kg) près de Brest. Calculez l'ordre de grandeur de la force d'interaction gravitationnelle qui s'exerce entre eux. (Peut-on dire qu'ils sont très attirés l'un par l'autre ?)

9. Calculez le champ de gravitation à la surface des planètes tabulées ci-dessous, connaissant leurs masses et leurs rayons, comparés à ceux de la Terre.

Planète	Masse/masse terrestre	Rayon/rayon terrestre
Vénus	0,816	0,950
Mars	0,107	0,531
Jupiter	318	11,2

10. La masse de la Lune est de $7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg, et son rayon est de 1 738 km.
Calculez le champ de gravitation à sa surface.
Comparez au champ de gravitation à la surface de la Terre.

11. Le Soleil, de masse $M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg est à 150 millions de kilomètres de la Terre, et la Lune, de masse $M_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg, est à 380 000 km de la Terre. Ces deux astres créent, au niveau de la Terre, un champ de gravitation faible $\overrightarrow{\delta G}$.

a) Quelles doivent être les positions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil pour que le champ $\overrightarrow{\delta G}$ soit le plus grand possible ? A quel moment de l'année cela se produit-il ?

b) Calculez numériquement la valeur maximale de $\overrightarrow{\delta G}$ et comparez-la au champ de gravitation terrestre.

12. Déterminez la masse du Soleil, sachant que la trajectoire de la Terre, décrite en 1 an, est approximativement un cercle de rayon $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

13. **a)** Le champ de gravitation de la Terre étant $G_0 = 9{,}83$ N/kg à la surface de la Terre, quelle est sa valeur à l'altitude de 400 km ? (Le rayon terrestre est $R = 6\,370$ km).

b) Quelle est la période de révolution d'un satellite qui gravite à l'altitude de 400 km sur une trajectoire circulaire ?

14. Un satellite artificiel gravite d'Ouest en Est sur une trajectoire circulaire, dans le plan de l'Équateur, la période de révolution étant de 24 heures. Ainsi, il tourne et il survole donc en permanence le même point géographique : on dit que ce satellite est **géostationnaire** (de tels satellites servent surtout aux télécommunications). Calculez le rayon de l'orbite.
(On donne la masse de la Terre : $6 \cdot 10^{24}$ kg).

15. Expliquez comment on peut déterminer la masse d'une planète, en observant un satellite de cette planète (on supposera que ce satellite à une trajectoire circulaire).

16. La deuxième loi de Képler s'applique à tous les satellites de la Terre : l'aire balayée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps.
Un satellite est distant du centre de la Terre de 6 700 km à son périgée et de 15 000 km à son apogée.
Calculez le quotient de la vitesse maximale v_M et de la vitesse minimale v_m.

17. La deuxième vitesse cosmique est aussi appelée « vitesse de libération de l'attraction terrestre ». La notion de vitesse de libération s'applique à d'autres astres que la Terre. Calculez notamment la vitesse de libération de l'attraction lunaire, connaissant la masse de la Lune ($7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg) et son rayon (1 740 km).
A partir de ce résultat, pouvez-vous donner une explication de l'absence d'atmosphère sur la Lune ?

18. Dans le roman de Jules Verne « De la Terre à la Lune », une sorte d'obus contenant des passagers est lancé verticalement par un puissant canon situé en Floride (figure de la page 84). Il est calculé que cet obus doit être animé d'une vitesse initiale de douze mille yards par seconde. Recherchez la valeur du yard, en mètre, dans une documentation appropriée. L'obus échappera-t-il au champ d'attraction terrestre ?

Approfondissement.

Les exercices signalés par un carré rouge □ présentent une plus grande difficulté que les autres.

19. Un satellite de masse 10^3 kg est transporté à une altitude de 300 km par une fusée qui lui communique une vitesse juste suffisante pour que la satellisation se fasse sur un cercle à altitude constante. On donne la masse de la Terre $M = 5{,}98 \, . \, 10^{24}$ kg et son rayon $R = 6\,370$ km. Déterminez :

a) La variation d'énergie potentielle du satellite entre la mise à feu de la fusée porteuse et la mise en orbite.

b) L'énergie cinétique du satellite en orbite.

c) L'énergie totale du satellite.

d) En réalité, l'énergie chimique du propergol emporté (carburant + comburant) est beaucoup plus grande que l'énergie totale calculée à la question c. Expliquez.

20. Lorsqu'une masse *m*, située dans un champ de gravitation, a une énergie potentielle E_p, le rapport $\Phi = \dfrac{E_p}{m}$ est par définition le **potentiel** du champ de gravitation. De même que E_p, le potentiel Φ est défini à une constante additive près.

a) Exprimez le potentiel Φ du champ de gravitation créé par la Terre (de masse *M*) à la distance *r* du centre, pour *r* supérieur au rayon terrestre *R*. On choisira la constante additive en sorte que Φ tende vers zéro quand *r* tend vers l'infini.

b) Calculez numériquement la valeur Φ_0 de Φ lorsque $r = R$. Calculez aussi les valeurs de r/R pour lesquelles Φ vaut : $0{,}2\ \Phi_0$; $0{,}4\ \Phi_0$; $0{,}6\ \Phi_0$; $0{,}8\ \Phi_0$.

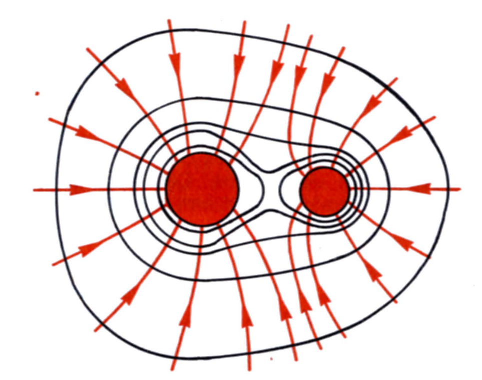
c) Représentez les sphères équipotentielles (sur lesquelles Φ est constant), pour les valeurs calculées à la question précédente, avec une échelle telle que la Terre soit représentée par un cercle de rayon 1 cm.

d) Donnez la définition des **lignes de champ** (connue pour le champ électrique : voyez le cours de Première). Tracez quelques lignes de champ sur la figure de la question précédente (n'oubliez pas d'orienter ces lignes).

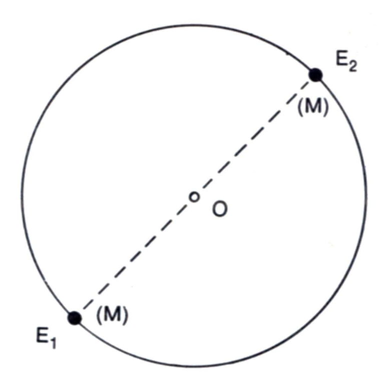
21. (Si vous avez traité l'exercice précédent.) La figure ci-dessous représente l'allure des surfaces équipotentielles et des lignes de champ pour deux astres sphériques de masses différentes (par exemple, le système Terre-Lune ou les deux éléments d'une étoile double).

a) Expliquez l'orientation des lignes de champ. Montrez qu'il existe un point et un seul où le champ est nul.

b) La surface équipotentielle proche d'un des astres est assez voisine d'une sphère : pourquoi ? Lorsque la distance devient très grande, la surface équipotentielle qui englobe les deux astres tend vers une surface sphérique : pourquoi ?



22. Une étoile double est formée de deux étoiles liées ensemble par l'interaction gravitationnelle. En général leurs trajectoires sont des ellipses. Considérons un cas particulier où les trajectoires se confondent en un même cercle centré en un point O fixe dans le référentiel stellaire (figure ci-contre).



a) L'étoile double forme un système isolé. Expliquez pourquoi les deux masses sont nécessairement égales, et pourquoi les positions sont diamétralement opposées.

b) Exprimez la relation entre la distance des étoiles *D*, leur masse commune *M* et la période de révolution *T*. Application numérique : en supposant que $M = 2 \, . \, 10^{30}$ kg et $T = 10$ j, calculez la distance *D* entre les étoiles.

23. Un satellite est lancé horizontalement avec une vitesse $v_0 = 9$ km/s depuis une altitude de 200 km, soit une distance $r_0 = 6\,570$ km du centre de la Terre. La trajectoire est une ellipse dont le point de lancement est le périgée.
Les caractéristiques de l'apogée sont notées v_1 (vitesse du satellite) et r_1 (distance au centre de la Terre). On se propose de déterminer v_1 et r_1.

a) Une première relation entre v_1 et r_1 s'obtient en écrivant la conservation de l'énergie. Écrivez cette relation.

b) Démontrez que $r_1 v_1 = r_0 v_0$, en utilisant la deuxième loi de Képler : l'aire balayée par le rayon vecteur en une seconde est la même à l'apogée et au périgée.

c) A partir des deux relations précédentes, déterminez les valeurs de r_1 et r_2, et dessinez approximativement la trajectoire, à une échelle convenable que vous choisirez.

24. Un satellite survole la Terre d'Ouest en Est dans le plan équatorial. Le rayon de l'orbite est de 6 800 km.

a) Quelle est son altitude ?

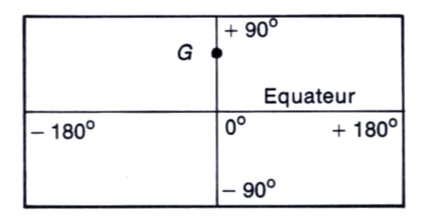
b) Quelle est la durée *T* d'une révolution, dans le référentiel géocentrique ?

c) Quel temps s'écoule entre deux survols d'une même ville située sur l'Équateur ?

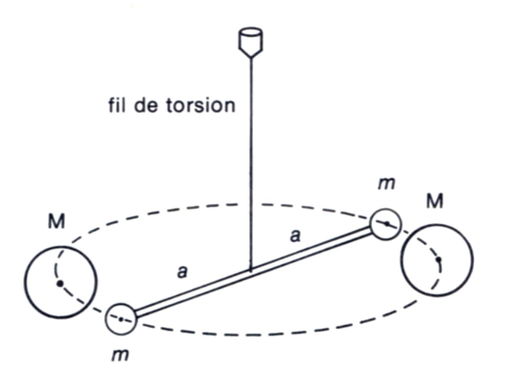
25 (Il est conseillé d'avoir fait l'exercice précédent.) La figure ci-dessous représente le cadre d'une planisphère. Recopiez-le sur votre cahier en lui donnant les dimensions 5 cm × 10 cm.
Un satellite décrit une trajectoire circulaire dont le plan est incliné de 45° par rapport au plan équatorial.
Sa période est de deux heures.

a) Le satellite survole à 0 h le point de coordonnées géographiques : latitude 0°, longitude 0°. Où se retrouve-t-il à 1 h et à 2 h ? Où est-il à 0 h 30 mn et à 1 h 30 mn ? Représentez l'allure de la trajectoire sur la planisphère entre 0 h et 2 h.

b) Poursuivre l'exercice en traçant la trajectoire entre 2 h et 4 h. Quel est le temps qui s'écoule entre deux passages du satellite au même point de l'Équateur ?



26. Sur la figure ci-contre, on a représenté schématiquement un dispositif destiné à mesurer la constante de gravitation universelle *K* (dispositif de Cavendish).
Deux petites boules de masses égales *m* sont fixées aux extrémités d'une tige de longueur 2 *a* accrochée en son milieu à un fil de torsion très souple, dont la constante de torsion est *C*. Deux masses M sont approchées à une distance *D* des deux masses *m* (*D* : distance des centres, situés tous deux à la distance *a* du fil).



a) Reproduisez la figure en projection dans un plan horizontal. Représentez les forces subies par les deux masses *m* et calculez leurs valeurs. Vous observez que ces forces constituent un couple.

b) En écrivant la condition d'équilibre de la tige, trouvez de quel angle θ celle-ci va tourner lorsque les deux masses M seront déplacées et transportées à grande distance.

c) Calculez numériquement θ avec les données suivantes : $m = 100$ g, $M = 2$ kg, $C = 5 . 10^{-8}$ m . N/rad, $a = 10$ cm, $D = 5$ cm (la constante *K* est supposée connue).

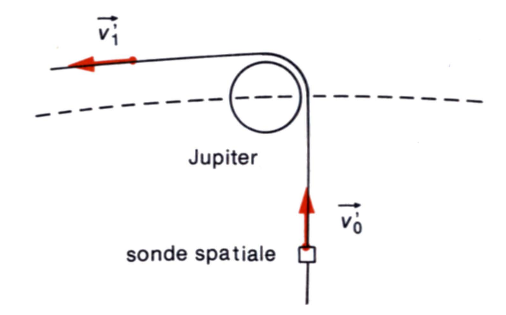
d) L'angle θ obtenu est très petit. Représentez un dispositif optique qui permet de mesurer θ avec une précision acceptable.

27 **Assistance gravitationnelle.** La Terre a une vitesse de 29,9 km/s sur son orbite et sa période de révolution autour du Soleil est de 1 an. La planète Jupiter a une période de révolution de 11,86 ans.

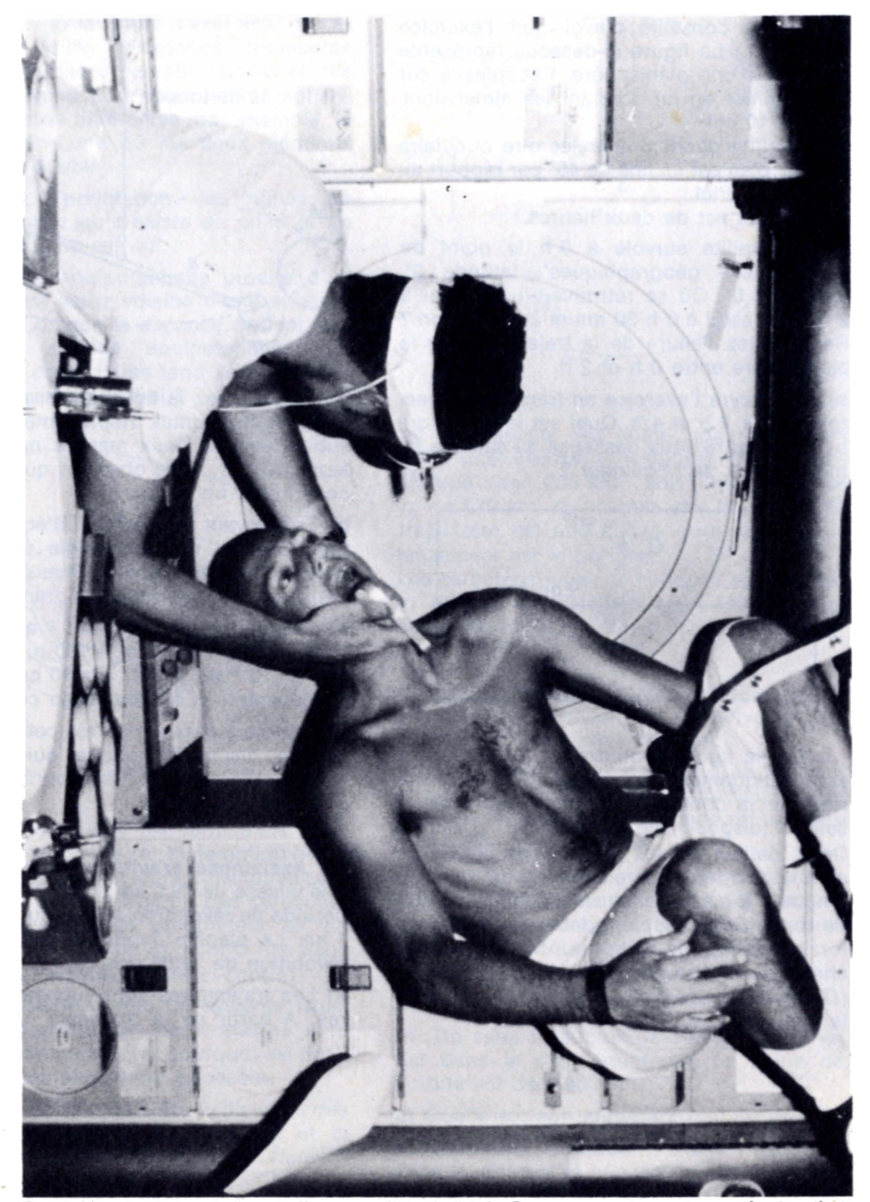
a) Les trajectoires sont supposées circulaires. A partir de la troisième loi de Képler $\left(\frac{T^2}{r^3} = \text{Cte}\right)$, montrez que la période de révolution et la vitesse d'une planète sur son orbite sont telles que $v^3\,T = \text{Cte}$. En déduire la vitesse *u* de Jupiter sur son orbite.

b) On suppose qu'une sonde spatiale s'approche de Jupiter. La vitesse de la sonde par rapport au référentiel de Copernic (R) est notée $\vec{v}$, et sa vitesse par rapport au référentiel galiléen issu du centre de Jupiter (R') est notée $\vec{v}'$. La figure ci-dessous est faite dans le référentiel R'. L'indice 0 caractérise la sonde avant que l'action de la planète se soit fait sentir et l'indice 1 caractérise la sonde lorsqu'elle a échappé à l'action de la planète.
On s'est placé dans le cas particulier où $\vec{v}'_0$ et $\vec{v}'_1$ sont perpendiculaires.
Pourquoi les modules de $\vec{v}'_0$ et de $\vec{v}'_1$ sont-ils égaux ? En composant les vitesses $\vec{v}'$ et $\vec{u}$, déterminez les vecteurs vitesses $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_1$ et faites la figure dans R.

c) On suppose que $\vec{v}'_0 = 1$ km/s. Calculez l'accroissement du module de la vitesse par rapport aux étoiles : $\Delta v = v_1 - v_0$.



6 Forces d'inertie.



Contrôle dentaire à bord d'un satellite habité. Sans pesanteur, la verticale n'est plus définie : vous pouvez regarder la photo dans n'importe quel sens.

Il vous est sans doute arrivé d'être projeté en avant lorsque vous vous trouviez dans un véhicule qui freinait brusquement ; ou peut-être d'être « déporté » vers votre voisin dans un virage.
Dans les deux cas, vous étiez soumis à une force d'inertie. Ce chapitre a pour but d'étudier et de comprendre ces phénomènes.

I. La mécanique en référentiel non galiléen.

1. Mise en évidence des forces d'inertie.

a) Expérience.

- **Enregistrement d'un mouvement.**

Sur une table à coussin d'air bien horizontale, lançons deux palets : l'un est circulaire et son centre G est marqué d'une croix noire ; l'autre est un triangle OXY rectangle en O. Le dispositif est éclairé au moyen d'un stroboscope et photographié en pose : on a obtenu ainsi le document de la figure 1.

- **Référentiels choisis.**

Pour l'étude du mouvement de G, nous prendrons successivement deux référentiels distincts : le référentiel du laboratoire (R_0) (référentiel terrestre) lié à la table, et le référentiel (R) lié au triangle rectangle. Les côtés OX et OY du triangle matérialisent un repère lié à (R).

Dans cette étude, nous pouvons considérer que le référentiel terrestre **(R_0) est galiléen.**
En revanche **(R) n'est pas galiléen :** le triangle n'a pas un mouvement de translation uniforme par rapport à la table, car son orientation varie.

● **Mouvement de G par rapport à la table (référentiel R_0).**

Lors de l'enregistrement, l'appareil photographique est immobile de même que la table : le document représente donc le mouvement par rapport à (R_0).
Nous observons (figure 1) que G a un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à (R_0). Il fallait s'y attendre : (R_0) est galiléen et le solide circulaire est soumis seulement à des actions verticales qui se compensent (poids et réaction du support). Le résultat est conforme au principe de l'inertie.

● **Mouvement de G par rapport au triangle (référentiel R).**

Pour visualiser ce mouvement, il faut utiliser un papier calque. On décalque au premier instant enregistré (t_1) la position du triangle et celle de G. Puis le triangle décalqué est reporté sur la position du triangle à l'instant t_2, et on note la position correspondante de G. Et ainsi de suite pour les instants t_3, t_4, etc. (figure 2).
On remarque maintenant que le mouvement de G n'est pas rectiligne et uniforme. Tout se passe comme si le palet circulaire était soumis à une action supplémentaire. A cette nouvelle action (fictive) correspond une force qu'on appelle **force d'inertie.**
Il serait possible de déterminer complètement le vecteur force d'inertie pour chaque position enregistrée, par la méthode habituelle : on détermine graphiquement le vecteur accélération de G, et on multiplie par la masse du palet.

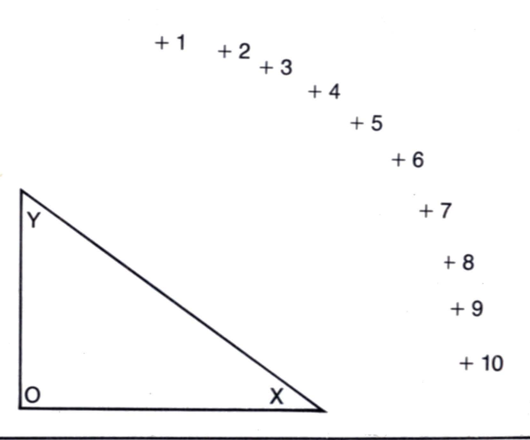
b) Généralisation.

De façon générale, lorsqu'on étudie le mouvement d'un corps en référentiel non galiléen, il apparaît un nouveau type de force appelée **force d'inertie,** qui s'ajoute aux forces d'interaction.
Au contraire d'une force d'interaction, une force d'inertie **n'est pas due à l'action d'un autre corps** voisin ; elle peut même apparaître si le mobile considéré est isolé. En ce sens, on peut dire qu'elle correspond à une « action fictive ». A plus forte raison, **il n'y a pas d'action réciproque.**
L'étude générale des changements de référentiels montre que **les forces d'inertie dépendent du mouvement du référentiel, de la position du mobile et de sa vitesse.**
Dans la suite, nous n'examinerons que des cas particuliers où le système étudié est au repos dans le référentiel non galiléen.

Des forces d'inertie s'exercent sur un corps quand le référentiel n'est pas galiléen.

1. Chronophotographie de deux solides plats sur une table soufflante horizontale. Notez que le centre G du palet rond a un mouvement rectiligne et uniforme, conformément au principe de l'inertie.

2. Positions successives du centre G du palet rond dans le référentiel lié au solide triangulaire XOY. Notez que G n'a pas un mouvement rectiligne et uniforme : tout se passe comme si l'on exerçait une action ; la force associée à cette action fictive est appelée **force d'inertie.**



2. Référentiel en translation accélérée.

a) Exemples :

• Lorsque vous êtes dans un véhicule (voiture, autobus...) qui freine ou qui accélère, vous ressentez des forces d'inertie. Par exemple, lorsqu'un autobus freine brusquement, les passagers sont projetés vers l'avant. Inversement, lorsqu'une voiture accélère fortement, les passagers ont l'impression d'être poussés vers l'arrière et sont collés au dossier de leur siège.

• L'accélération est particulièrement grande lorsqu'une voiture subit un choc. En effet, la vitesse varie notablement pendant un temps très court (Δt), de sorte que l'accélération prend des valeurs importantes. En conséquence, il est nécessaire d'installer des dispositifs de protection des passagers : ceintures de sécurité et appuis-tête.

b) Orientation de la force d'inertie.

A partir des exemples précédents, nous pouvons conclure quant à l'orientation du vecteur force d'inertie, comparée à l'orientation du vecteur accélération :
Lorsque le vecteur accélération est orienté vers l'avant, la force d'inertie est vers l'arrière, et inversement.
Dans tous les cas, la force d'inertie qui apparaît dans un référentiel (R) en translation accélérée est en sens contraire du vecteur accélération $\vec{a}_e$ de (R) par rapport à un référentiel galiléen (R_0).
Le vecteur $\vec{a}_e$ est appelé **accélération d'entraînement.**

c) Équilibre d'un solide dans un référentiel accéléré.

Considérons un corps en équilibre par rapport à un référentiel accéléré (R), par exemple un petit solide de masse m suspendu à un fil (figure 4).
Par rapport à (R_0) son accélération est $\vec{a}_e$ (égale à celle du véhicule qui l'entraîne) ; la somme des forces d'action est ici : $\vec{F}_0 = m\vec{a}_e$.
Par rapport au référentiel (R), le solide est immobile : la somme des forces qu'il subit est nulle. Or, les forces d'action indépendantes du référentiel, ont toujours pour somme $\vec{F}_0$. Il s'exerce donc une force d'inertie égale à $-\vec{F}_0$.
En conclusion, lorsque l'accélération d'entraînement est $\vec{a}_e$, le solide immobile par rapport au référentiel non galiléen (R) est soumis à la force d'inertie : $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_e$. Retenons bien que la force d'inertie est en sens contraire de l'accélération d'entraînement.

3. Équilibre d'un solide (masse m) dans un référentiel non galiléen (R). Il s'exerce une force d'inertie opposée à la somme des forces d'action. On établit que $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_e$.

d) Généralisation :

Nous venons de raisonner à propos d'un système particulier, pour fixer les idées, mais la démonstration est valable de façon générale : un solide quelconque, de masse m, immobile par rapport à (R), possède une accélération $\vec{a}_e$ par rapport à (R_0), et par suite, la somme des forces d'action qu'il subit est $m\vec{a}_e$; dans (R) la somme des forces doit être nulle, puisque le solide est en équilibre ; il faut donc ajouter une force supplémentaire $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_e$.
Cela est vrai, d'ailleurs, que l'accélération $\vec{a}_e$ soit constante ou non, mais la démonstration suppose que la masse m soit immobile. En fait, dans le cas particulier envisagé ici (référentiel en translation accélérée) nous admettrons que l'expression de la force d'inertie est encore valable pour un corps mobile par rapport au référentiel (R).
Résumons les hypothèses et la conclusion :

(Référentiel en translation accélération instantanée $\vec{a}_e$)	et	(Solide de masse m mobile ou au repos)	$\Rightarrow$	force d'inertie $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_e$

Force d'inertie subie par un solide de masse m dans un référentiel en translation d'accélération $\vec{a}_e$:

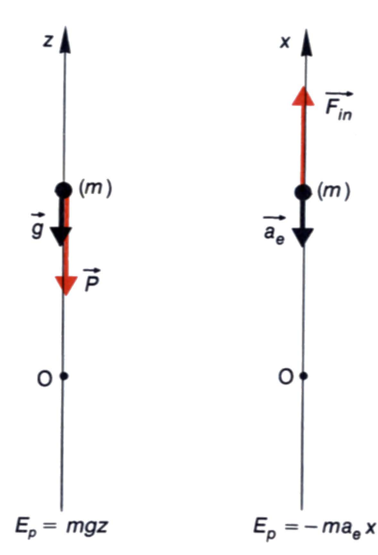
$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_e$$

Exercice résolu : Étant donnés un solide de masse m et un référentiel R en translation avec une accélération $\vec{a}_e$ constante par rapport aux référentiels galiléens, montrez qu'on peut définir une énergie potentielle du solide soumis à la force d'inertie et donnez son expression.

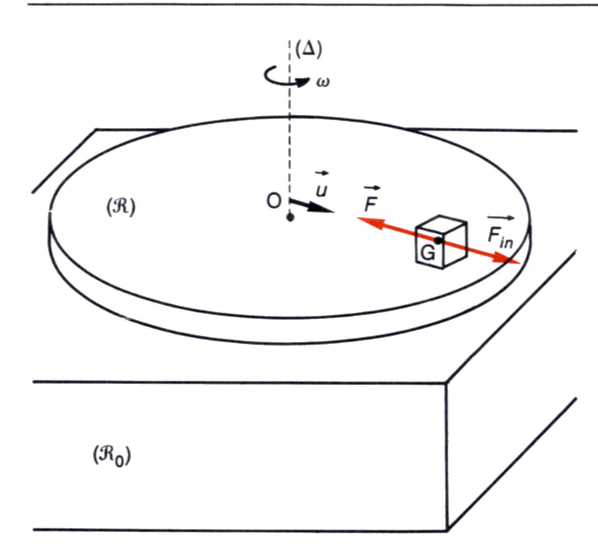
Solution : En comparant le poids $m\vec{g}$ et la force d'inertie $-m\vec{a}_e$, nous pouvons considérer que l'effet des forces d'inertie est assimilable à l'action d'un champ de pesanteur apparent, où l'accélération de la pesanteur serait $-\vec{a}_e$.
Si $\vec{a}_e$ est constant, la force d'inertie est constante et il est possible de lui associer une énergie potentielle, par analogie à l'énergie potentielle de pesanteur de valeur mgz (+ cte) lorsque l'altitude est z. Introduisons un axe $x'x$ parallèle à $\vec{a}_e$ et de sens contraire (de même que $\vec{g}$ est en sens contraire d'un axe vertical ascendant) ; la force d'inertie est dans le sens de $x'x$, et l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = -m a_e x \quad (+\text{ cte}).$$

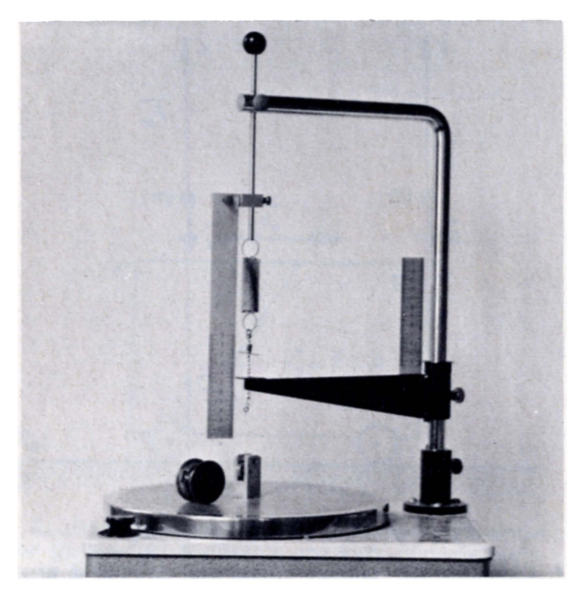
Dans cette formule, a_e représente le module de l'accélération d'entraînement ; la valeur de la constante dépend du choix (arbitraire) d'un point où l'on convient que l'énergie potentielle est nulle.



4. Obtention de l'énergie potentielle associée à une force d'inertie, par analogie avec l'énergie potentielle de pesanteur.



5. Équilibre d'un solide dans un référentiel (R) qui tourne autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen (R_0). On établit que $\vec{F}_{in} = m\omega^2 \overrightarrow{OG}$.



6. Dispositif utilisé pour vérifier la relation $F = m\omega^2 r$.

3. Référentiel en rotation uniforme.

a) Exemple :

Les joies éprouvées sur un manège proviennent de sensations diverses où les forces d'inertie ne sont pas absentes. Lorsque vous êtes assis dans un manège en rotation rapide, vous ressentez une force d'inertie qui, agissant seule, aurait pour effet de vous éloigner du centre de la trajectoire circulaire que vous décrivez : on dit que cette force est **centrifuge.**

b) Expression de la force d'inertie.

Limitons nous à l'étude d'un corps au repos par rapport au référentiel tournant. Pour fixer les idées, nous représentons (figure 5) un objet (𝒞) posé sur un plateau tournant. Le plateau constitue un référentiel non galiléen (R) ; il tourne par rapport au support, lié à la Terre (référentiel (R_0)). Nous notons Δ l'axe de rotation et G le centre d'inertie du corps (𝒞). Soient m la masse de 𝒞, r la distance de G à Δ, et ω **la vitesse angulaire du plateau.**

• **Mouvement de (𝒞) par rapport à (R_0) :**
Le centre de masse G décrit un cercle de rayon r, de centre H, à la vitesse angulaire ω.

La vitesse de G est donc : $v_G = \omega r$

et son accélération, qui se réduit à sa composante normale, vaut :

$$\vec{a}_G = -\,\omega^2\,\overrightarrow{HG}.$$

En introduisant un vecteur unitaire $\vec{u}$, orienté de H vers G, le vecteur accélération (centripète) s'écrit :

$$\vec{a}_G = -\,\omega^2\,r\vec{u}.$$

Soit $\vec{F}$ la force équivalente à l'ensemble des actions (poids, liaisons...) que subit le corps 𝒞. D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F} = m\vec{a}_G = -\,(m\omega^2 r)\,\vec{u}.$$

• **Équilibre de ($\mathscr{C}$) par rapport à (R) :**
Par rapport à (R), l'objet ($\mathscr{C}$) reste immobile : la somme des forces qu'il subit est donc nulle. Nous devons donc admettre qu'il apparaît une force d'inertie $\overrightarrow{F_{in}}$ directement opposée à $\overrightarrow{F}$: $\overrightarrow{F_{in}} = (m\omega^2 r)\ \overrightarrow{u}$.
La force d'inertie est orientée dans le même sens que $\overrightarrow{u}$, elle tend à éloigner G du centre de la trajectoire : elle est **centrifuge.**

Force d'inertie subie par un solide dans un référentiel tournant :
$$\overrightarrow{F_{in}} = m\omega^2 r\ \overrightarrow{u}$$
(elle est centrifuge).

c) Vérification expérimentale.

Le dispositif photographié à la figure 6 permet de vérifier l'expression de la force d'inertie. Un corps cylindrique de masse m connue est attaché à un ressort dont on a mesuré la raideur k par une expérience préalable. Lorsque le plateau tourne, le ressort s'allonge de Δl et il s'ensuit une force de rappel $k\Delta l$ qui s'oppose à la force d'inertie centrifuge (le poids du corps et la réaction du support se compensent) :

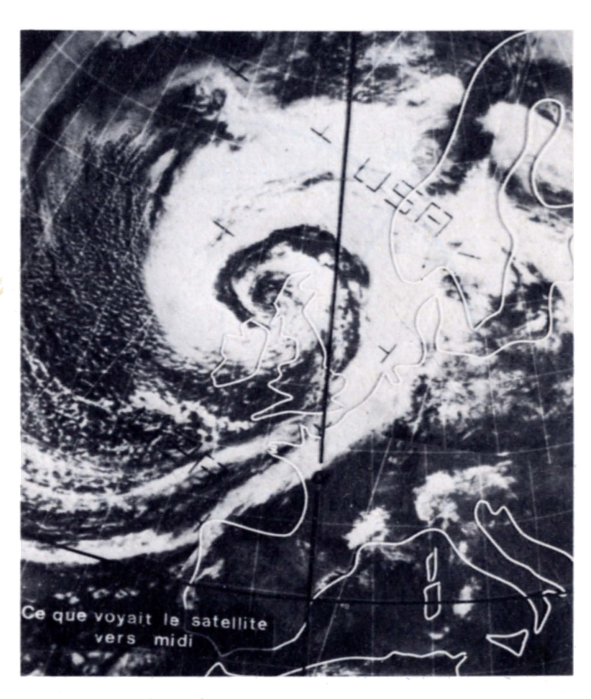
$$F_{in} = k\Delta l = m\omega^2 r .$$

Une mesure de l'allongement du ressort permet ainsi d'obtenir la valeur de F_{in}. En faisant varier successivement m, ω et r, on vérifie que la force d'inertie est proportionnelle à m, ω^2 et r.

d) Conclusion :

Pour établir l'expression de la force d'inertie, nous avons considéré ici un solide au repos par rapport au référentiel tournant. L'hypothèse d'immobilité du solide est ici absolument indispensable, sans quoi l'expression obtenue ne se vérifierait pas. Il faudrait ajouter un terme dépendant de la vitesse, appelé « force de Coriolis » ; peut-être en avez-vous entendu parler en cours de Géographie, à propos des vents : les masses d'air en mouvement par rapport à la Terre (qui est un référentiel tournant) sont parfois déviées par cette force. Par ailleurs, l'expression de la force d'inertie ne serait pas exacte non plus si la vitesse angulaire du référentiel était variable. Rassemblons toutes les hypothèses :

Référentiel (R) en rotation autour d'un axe fixe (Δ) vitesse angulaire constante ω	et	Solide de masse m immobile par rapport à (R). Son centre d'inertie est à une distance r de (Δ)	⇒	Force d'inertie centrifuge de valeur $F_{in} = m\omega^2 r$



7. La rotation des vents autour d'une dépression est due à une force d'inertie complémentaire, que nous n'étudions pas ici : la force de Coriolis.

II. Applications.

1. Mesure de l'accélération d'un mobile.

Il est possible de mesurer l'accélération d'un véhicule en fonction du temps au moyen d'un dispositif appelé **accéléromètre.** L'exercice suivant montre comment construire un accéléromètre simple.

Exercice résolu. La figure ci-contre représente un accéléromètre constitué par une bille de masse m accrochée entre deux ressorts identiques ayant chacun la raideur k ; l'ensemble est dans un tube rempli d'un liquide qui permet d'amortir les oscillations de la bille.

a) L'accéléromètre étant dans un véhicule d'accélération $\vec{a_e}$, parallèle au ressort, calculer le déplacement x de la bille.

b) On souhaite que la bille se déplace de 1 cm lorsque la vitesse du véhicule augmente (ou diminue) à raison de 1 km/h par seconde. La bille ayant une masse de 40 grammes, quelle doit être la raideur des ressorts ?

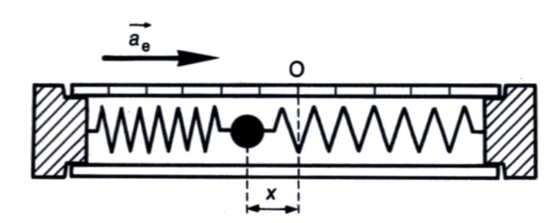
Solution : a) Prenons comme référentiel le véhicule. La bille est soumise à une force d'inertie de module ma_e et à deux forces de rappel élastique valant chacune kx. Lorsque la bille est en équilibre relatif, la force d'inertie est opposée à la somme des forces élastiques ; il y a donc égalité des modules :

$$ma_e = 2\,kx\,, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{ma_e}{2\,k}.$$

b) En unités SI, $a_e = 3{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $m = 4 \cdot 10^{-2}$ kg et $x = 10^{-2}$ m. Portons ces valeurs :

$$k = \frac{ma_e}{2\,x} = \frac{4 \cdot 10^{-2} \times 3{,}6}{2 \times 10^{-2}} = 7{,}2\ \text{N/m}\,.$$

Les ressorts sont relativement souples : il faudrait suspendre une masse de l'ordre de 700 g pour allonger de 1 m l'un des ressorts, soit 7 g pour obtenir un allongement de 1 cm.



8. Schéma d'un accéléromètre simple.

2. Poids d'un corps.

Considérons un solide immobile par rapport à la Terre. Il est soumis à son poids et à une force directement opposée qui compense le poids. Par exemple, un solide suspendu à un fil est en équilibre sous l'action du poids et de la tension du fil (figure 9).

Pour préciser la nature du poids, nous devons tenir compte de la rotation de la Terre autour de son axe : la Terre n'est pas un référentiel galiléen. Ainsi, **le poids n'est pas seulement la force de gravitation exercée par la Terre, mais il faut ajouter une force d'inertie centrifuge.** Sur un corps M de petites dimensions par rapport au rayon terrestre, de masse *m*, placé à une distance *r* de l'axe de la Terre, s'exerce une force d'inertie de valeur :

$$F_{in} = m\omega^2 r$$

où ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

Soit H le pied de la perpendiculaire menée de M sur l'axe sud-nord. La force d'inertie s'écrit vectoriellement :

$$\vec{F_{in}} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}.$$

En notant $\vec{G}$ le vecteur champ de gravitation en M, la force de gravitation est $m\vec{G}$, et le poids s'écrit :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{G} + m\omega^2 \overrightarrow{HM}}.$$

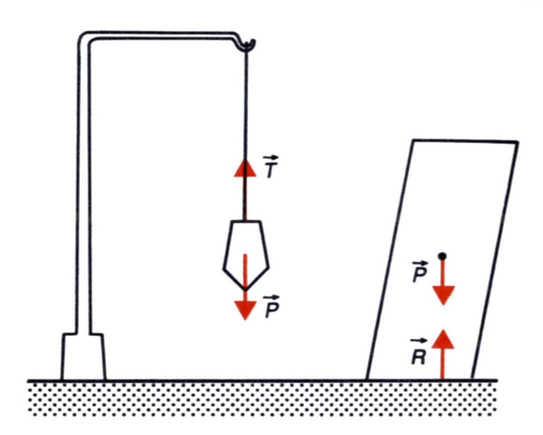
Le rapport $\dfrac{\vec{P}}{m}$ représente l'intensité de la pesanteur $\vec{g}$:

$$\boxed{\vec{g} = \vec{G} + \omega^2 \overrightarrow{HM}}.$$

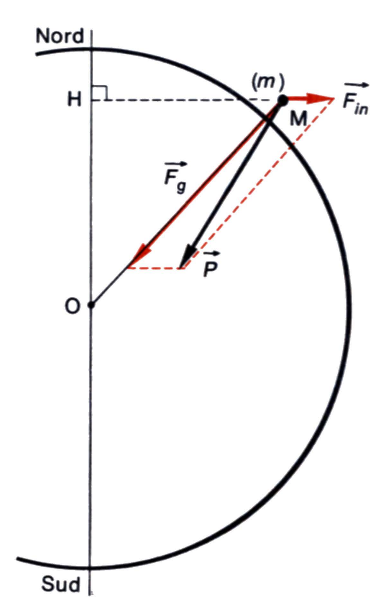
Jusqu'ici, nous avions assimilé $\vec{g}$ et $\vec{G}$: vérifions que le terme $\omega^2 \overrightarrow{HM}$ n'est qu'un **terme correctif,** négligeable en première approximation. En effet, la valeur maximale de $\omega^2 HM$ est $\omega^2 R$, en notant R le rayon terrestre :

$$\omega^2 R \approx \left(\frac{2\pi}{24 \times 3\,600}\right)^2 \times 6{,}37 \cdot 10^6 = 3{,}37 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

La valeur obtenue est faible devant celle de $\vec{G}$, voisine de $10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

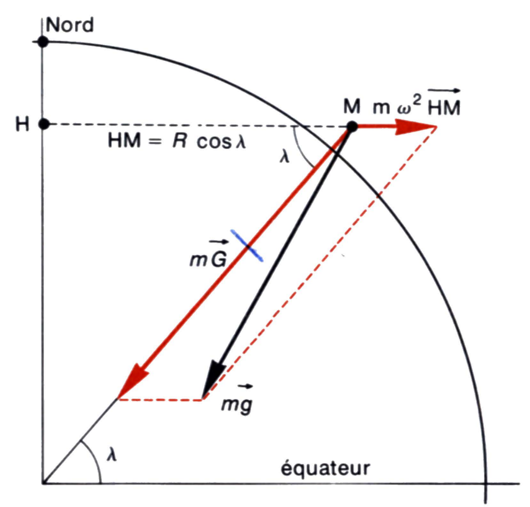


9. Pour divers corps observés dans une salle, les poids sont tous parallèles. Leur direction commune définit la verticale du lieu. Quand un corps est immobile, le poids est toujours compensé par d'autres forces dont la somme est verticale.



10. Le poids d'un corps se compose de la force de gravitation et d'une force d'inertie $\vec{F_{in}} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$. Cette dernière est nettement la plus petite, son importance est encore très exagérée sur cette figure.

Poids d'un corps = force de gravitation + force d'inertie due à la rotation terrestre.



11. Calcul de g en fonction de la latitude λ.

$\vec{G} \cdot \overrightarrow{HM} = (G)(R\cos\lambda)(-\cos\lambda) = -GR\cos^2\lambda$.

Exercice : En supposant que la Terre soit rigoureusement sphérique, étudier la variation de l'accélération de la pesanteur g en fonction de la latitude λ. Dans ce but, on exprimera g en fonction de G, ω, R et λ, en faisant les approximations légitimes.

Solution : Pour chercher son module, formons le carré de $\vec{g} = \vec{G} + \omega^2 \overrightarrow{HM}$:

$$g^2 = G^2 + 2\,\omega^2 \vec{G} \cdot \overrightarrow{HM} + (\omega^2 HM)^2 .$$

En unités SI, les valeurs des trois termes sont respectivement de l'ordre de 100, $(20 \times 3 \cdot 10^{-2})$ et $(3 \cdot 10^{-2})^2$. Le dernier terme, de l'ordre de 10^{-3} est négligeable devant les deux autres. Par suite :

$$g^2 \approx G^2 + 2\,\omega^2 \vec{G} \cdot \overrightarrow{HM} .$$

En notant λ la latitude, $\overrightarrow{HM}$ a pour valeur $R\cos\lambda$, et l'angle de $\vec{G}$ avec $\overrightarrow{HM}$ est le supplémentaire de λ :

$$g^2 \approx G^2 - 2\,\omega^2 GR\cos^2\lambda$$

$$\approx G^2\left(1 - \frac{2\,\omega^2 R}{G}\cos^2\lambda\right).$$

Le deuxième terme de la parenthèse est petit devant 1. Utilisons l'approximation :

$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{pour } \varepsilon << 1),$$

$$g \approx G\left(1 - \frac{\omega^2 R}{G}\cos^2\lambda\right).$$

Lorsque λ croît de 0 à 90°, le cosinus décroît de 1 à 0, par suite g augmente avec la latitude. Ce résultat pouvait d'ailleurs se prévoir graphiquement, en construisant le vecteur $\vec{g}$ pour plusieurs latitudes. En particulier, aux pôles ($\lambda = \pm 90°$), on trouve $\vec{g} = \vec{G}$.

3. Impesanteur dans un satellite artificiel.

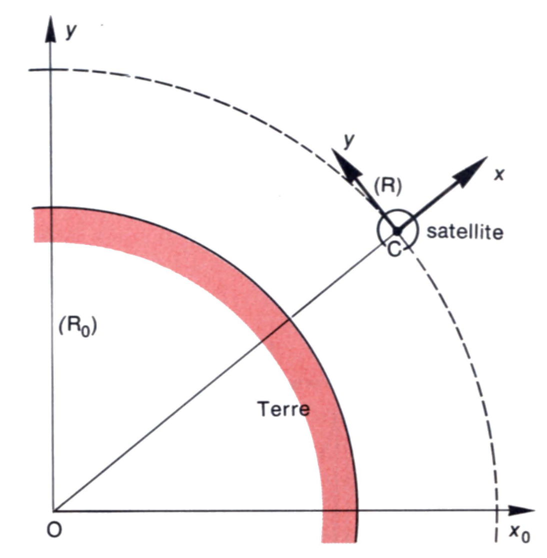
a) Le phénomène.

Dans un satellite artificiel en orbite autour de la Terre, un objet lâché hors du contact de tout support, reste en suspension, pratiquement immobile, si aucune impulsion ne lui a été communiquée. Les cosmonautes eux-mêmes doivent être sanglés sur leurs sièges et diverses opérations, notamment la prise de nourriture, sont rendues difficiles du fait que les corps ne tendent pas à tomber, comme ils le feraient au sol.

b) Explication de l'impesanteur dans un satellite à trajectoire circulaire.

Précisons d'abord les référentiels considérés. Le mouvement du satellite autour de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique galiléen (R_0). Le mouvement d'un corps dans le satellite est repéré par rapport au satellite lui-même, qui constitue un référentiel (R). Nous supposerons que le satellite est **stabilisé en attitude,** c'est-à-dire qu'il présente toujours la même face à la Terre.

Sur la figure 12, les référentiels (R_0) et (R) ont été précisés en attachant deux axes à chacun d'eux (Ox_0y_0 et Cxy). Le référentiel (R) est en rotation par rapport à (R_0) autour d'un axe passant par O et perpendiculaire au plan de figure. Nous notons ω la vitesse angulaire de ce mouvement.



12a. Le repère Ox_0y_0 est lié au référentiel géocentrique. Le repère Cxy est lié au satellite qu'on suppose stabilisé en attitude (c'est-à-dire : il conserve une orientation constante par rapport aux étoiles).

• **Mouvement du satellite dans (R_0).**

Nous faisons l'hypothèse que la trajectoire du satellite est circulaire. Dans le référentiel (R_0) la seule force extérieure qui s'exerce sur le satellite est la force de gravitation $M\vec{G}$, M étant la masse du satellite et $\vec{G}$ le champ de gravitation local. Le mouvement du centre d'inertie C est circulaire et uniforme, et le vecteur accélération est centripète et se relie à la vitesse angulaire par :

$$\vec{a}_G = -\omega^2\,\overrightarrow{OC}.$$

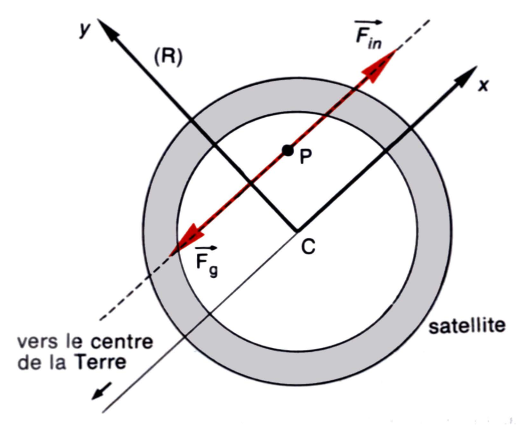
Exprimons le théorème du centre d'inertie :

$$M\vec{G} = -M\omega^2\,\overrightarrow{OC}, \quad \text{d'où :} \quad \vec{G} = -\omega^2\,\overrightarrow{OC}.$$

A partir de cette relation, nous pouvons calculer la vitesse angulaire, connaissant l'altitude de l'orbite.

• **Forces subies par un objet lâché dans le satellite.**

A présent, prenons (R) comme référentiel et analysons les forces qui s'exercent sur un objet de masse m lâché dans le satellite en un point P.



12b. Un objet lâché dans le satellite est soumis à deux forces qui se compensent : il est en impesanteur.

Lorsqu'un corps est en impesanteur, il y a compensation exacte entre la force de gravitation et la force d'inertie (par rapport à un référentiel donné).

Outre la force de gravitation $\vec{F_g}$, dirigée vers le centre de la Terre, s'exerce une force d'inertie centrifuge $\vec{F_{in}}$:

$$\vec{F_g} = m\vec{G} = -m\omega^2\,\overrightarrow{OC} \quad \text{et} \quad \vec{F_{in}} = m\omega^2\,\overrightarrow{OP}.$$

Ces forces sont de sens contraires, et de modules très voisins. Leur somme est donc très proche de zéro.

$$\vec{F_g} + \vec{F_{in}} \approx \vec{0}.$$

En pratique, la masse m est soumise à une force résultante négligeable. Tout se passe comme si elle n'était soumise à aucune action. Un cosmonaute qui observe l'objet P a l'impression que la pesanteur ne s'exerce pas : ainsi s'explique le phénomène d'impesanteur.

• **Remarque.** En fait, la somme des forces $\vec{F_g} + \vec{F_{in}}$ n'est pas exactement nulle : il reste une **pesanteur résiduelle** très petite. Pour la calculer il faudrait reprendre le calcul, sans faire aucune approximation : notamment, $\vec{G}$ ne doit pas être considéré comme uniforme. On trouverait que l'impesanteur n'est rigoureusement vérifiée qu'au centre d'inertie C du satellite. A un mètre de C, la pesanteur résiduelle atteint des valeurs de l'ordre de $10^{-7}\,g$ (dix millions de fois plus petite qu'au sol : on comprend qu'il serait très difficile d'en observer les effets).

4. Surface libre d'un liquide dans un référentiel non galiléen.

• Vous avez appris en classe de Première qu'un corps tend à évoluer spontanément vers une position où son énergie potentielle est la plus petite possible. Pour cette raison, **la surface libre d'un liquide épouse la forme d'une surface équipotentielle,** c'est-à-dire une surface le long de laquelle l'énergie potentielle d'une particule est constante. En effet, supposons qu'une partie de la surface libre d'un liquide soit au-dessus d'une équipotentielle alors qu'il reste du vide au-dessous (figure 13). Le liquide qui dépasse pourrait alors descendre dans la cuvette où son énergie potentielle serait plus petite.
Ainsi, l'énergie potentielle de pesanteur étant localement $E_p = mgz$, la surface libre d'un liquide est toujours une surface d'équation z = cte, c'est-à-dire un plan horizontal.

• Dans un référentiel non galiléen, il faut tenir compte de l'énergie potentielle associée aux forces d'action (gravitation) et aux forces d'inertie.

13. La surface libre d'un liquide épouse nécessairement une surface équipotentielle, sinon il serait possible de diminuer encore l'énergie potentielle.

Exercice :
a) Exprimez l'énergie potentielle associée à la force d'inertie qui s'exerce sur une particule de masse *m*, immobile sur un plateau tournant. La vitesse angulaire ω est constante et la masse *m* est à une distance *r* de l'axe.
b) Quelle est la forme de la surface libre d'un liquide contenu dans un vase cylindrique posé sur un plateau horizontal qui tourne à la vitesse angulaire ω, supposée constante ?
Solution : a) La force d'inertie centrifuge peut encore s'écrire :

$$F_{in} = -(-m\omega^2)\,r\,.$$

Sous cette forme, nous pouvons la rapprocher de la force élastique : $F_x = -kx$ à laquelle est associée l'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}kx^2$.
Par analogie, l'énergie potentielle d'inertie s'obtient en remplaçant k par $-m\omega^2$ et x par r :

$$\boxed{E_p = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2}\,.$$

b) Considérons une particule liquide de masse *m*, située à une distance *r* de l'axe de rotation, et à une hauteur *z* par rapport au fond du récipient.
Exprimons son énergie potentielle (inertie + pesanteur), en prenant l'origine ($E_p = 0$) au point où $r = 0$ et $z = 0$

$$E_p = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = m\left(gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right).$$

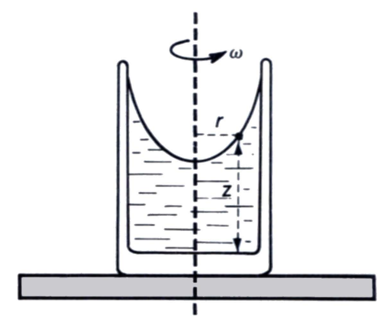
La surface libre se confond avec une surface équipotentielle, c'est-à-dire une surface d'équation :

$$gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = A$$

où A est une constante. Explicitons z : $z = \frac{A}{g} + \frac{\omega^2}{2g}r^2$.

Dans un plan qui passe par l'axe de rotation, *r* et *z* sont les coordonnées d'un point d'une courbe, intersection du plan et de la surface équipotentielle. L'équation obtenue montre que cette courbe est une parabole. En faisant tourner cette parabole autour de son axe, on obtient la surface équipotentielle : il s'agit d'un paraboloïde de révolution.

La surface libre d'un liquide épouse la forme d'une surface équipotentielle.



14. La surface libre d'un liquide se creuse lorsque le récipient est placé sur un plateau tournant.

• **Forme de la Terre.**
On admet actuellement que la Terre a d'abord été entièrement fluide, liquide et gaz, avant que les couches superficielles ne se solidifient pour former la croûte terrestre. La surface libre d'un astre liquide en rotation se détermine en écrivant l'énergie potentielle totale (gravitation et inertie) : on trouve que la section méridienne (section par un plan qui passe par l'axe) est une ellipse ; la surface est donc un ellipsoïde de révolution. La Terre est donc légèrement aplatie au niveau des pôles.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- Pour rendre compte du mouvement d'un corps en référentiel non galiléen, on doit considérer les forces ________. Celles-ci dépendent du mouvement du ________ et du mouvement du corps étudié.
- Dans un référentiel en translation accélérée, la force d'inertie qui s'exerce sur un solide est en sens ________ du vecteur accélération. Elle s'exprime suivant : $\vec{F}_{in}$ = ________, où *m* est la masse du solide.
- Lorsqu'un solide est immobile dans un référentiel en rotation ________ autour d'un axe ________, il est soumis à une force d'inertie ________, de valeur ________, où ω est la ________, *m* la masse du solide, et *r* la distance entre le ________ du solide et l'axe de ________.
- Le poids d'un corps se compose de la force de ________ exercée par la Terre et d'une force d' ________ ________ due à la rotation de la Terre sur elle-même.
- Le phénomène d'impesanteur à bord d'une capsule spatiale tient à ce qu'il y a compensation entre la force ________ et la force ________.

Petites questions.

1. Pourquoi peut-on dire qu'une force d'inertie est une force bien réelle qui correspond à une action fictive ?

2. Soient deux référentiels galiléens (R_0) et (R'_0) et un référentiel (R) en translation, d'accélération $\vec{a_e}$ dans (R_0) et $\vec{a'_e}$ dans (R'_0). Un solide de masse m repéré dans (R) est soumis à une force d'inertie qu'on peut écrire aussi bien $-m\vec{a_e}$ que $-m\vec{a'_e}$. En conséquence la notion de force d'inertie n'a de sens que si $\vec{a_e} = \vec{a'_e}$. Expliquez pourquoi il en est ainsi.

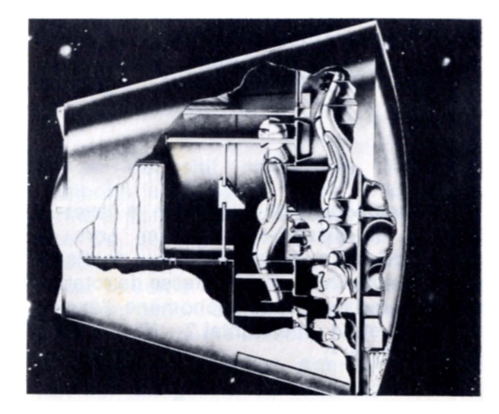
3. Expliquez, en évoquant les forces d'inertie, l'importance des ceintures de sécurité et des appuis-tête dans une automobile.

4. Lorsqu'une voiture traversant un carrefour est percutée sur le flanc gauche, comment est dirigée la force d'inertie subie par le conducteur, l'habitacle de la voiture étant pris comme référentiel ? Expliquez pourquoi une ceinture de sécurité est inefficace dans ce cas.

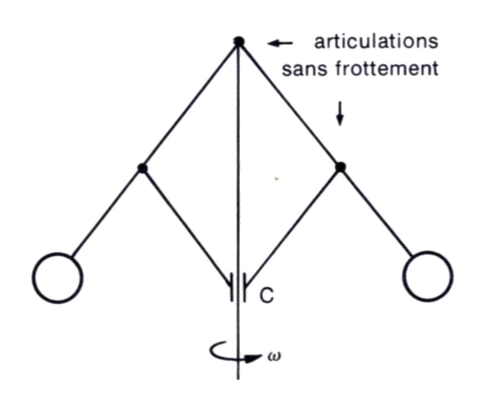
5. Lorsqu'une fusée s'élève en transportant un satellite habité, l'accélération atteint plusieurs fois l'accélération de la pesanteur. Pourquoi les cosmonautes doivent-ils se coucher perpendiculairement au vecteur accélération ?

6. Expliquez pourquoi on peut parler de « pesanteur artificielle » à l'intérieur d'une fusée accélérée ou dans une station orbitale en rotation sur elle-même.

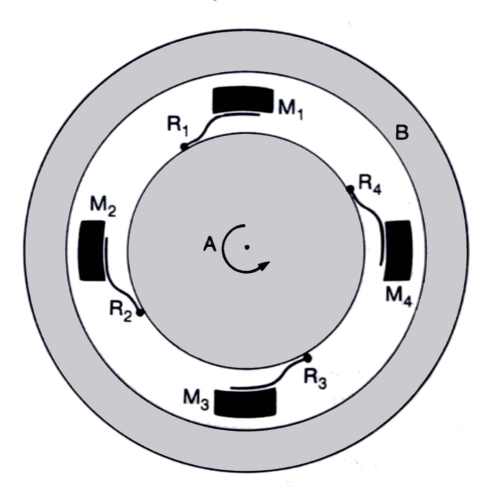
7. La photo ci-dessous représente une capsule spatiale au retour dans l'atmosphère. La surface extérieure bombée représente le bouclier thermique. Quel est son intérêt ? Comment les vecteurs vitesse et accélération sont-ils orientés ? Expliquez pourquoi les cosmonautes sont adossés à la paroi qui porte le bouclier thermique.



8. Le dispositif schématisé ci-dessous est appelé « régulateur à boules ». Fixé sur l'axe d'un moteur, il peut servir à en réguler le fonctionnement, le coulisseau C étant relié à la commande du moteur. Précisez comment agit le dispositif, suivant que le moteur tourne trop vite ou trop lentement, par rapport à la rotation souhaitée.



9. La figure ci-dessous schématise un « embrayage centrifuge », destiné à transmettre la rotation entre deux pièces tournantes (A) et (B) de même axe. Les masselottes M_1, M_2, M_3, M_4 sont reliées à la pièce (A) par quatre lames de ressorts. Expliquez le fonctionnement du dispositif.



10. Expliquez pourquoi le phénomène d'impesanteur serait observable par les passagers d'un ascenseur qui tomberait en chute libre assez longtemps.

Applications immédiates.

11. Au démarrage d'une voiture, la vitesse passe de 0 à 36 km/h en 5 secondes. En admettant que l'accélération est constante, quelle est la force d'inertie qui appuie contre son siège un passager pesant 75 kg ?

12. Une voiture percute un arbre à 72 km/h : la voiture se déforme et l'arbre se couche, de sorte que l'habitacle se déplace de un mètre entre le début du choc et la fin du mouvement. Quelle est l'accélération moyenne de l'habitacle et quelle est la force d'inertie subie par un passager pesant 60 kg ? Comparez cette force au poids du passager.

13. Comparez l'accélération d'une fusée à l'accélération de la pesanteur au sol, lorsque le poids apparent d'un corps suspendu dans la fusée est double de son poids au sol, dans les deux cas suivants :

a) La fusée est à une altitude faible et monte verticalement.

b) La fusée est loin de la Terre, en un lieu où le champ de gravitation G est égal à $g/2$, son vecteur accélération fait un angle de 90° avec le vecteur champ de gravitation $\vec{G}$.

Réponses : **a)** $a = g$; **b)** $a = 1{,}94\ g$.

14. Une personne prend l'ascenseur en tenant à la main un ressort de raideur $k = 100$ N/m auquel est accroché un corps de masse $m = 200$ g.
L'accélération de la pesanteur est $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.
On demande l'allongement du ressort dans les cas suivants, en supposant que toute oscillation transitoire s'est amortie :

a) l'ascenseur est à l'arrêt ;

b) l'ascenseur monte en accélérant (accélération : $a = 1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) ;

c) l'ascenseur monte à vitesse constante ;

d) l'ascenseur monte en freinant (accélération : $a = -1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) ;

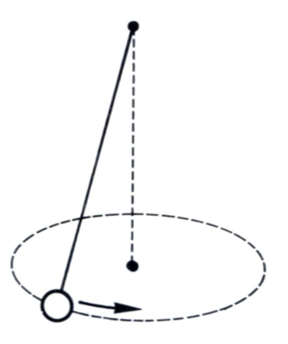
e) mêmes questions que **b) c)** et **d)** lorsque l'ascenseur descend.

15. Un pendule simple (petite bille suspendue à un fil de longueur L) est mis en rotation autour d'un axe vertical qui passe par le point de suspension.

a) Quelle est la vitesse angulaire ω lorsque le fil dévie d'un angle θ ?

b) Montrez que le fil ne dévie pas quand ω est trop petit et calculez la vitesse angulaire critique ω_0 pour laquelle le fil commence à dévier.
Application numérique : $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $L = 10$ cm. Calculez ω_0 en tours par minute.

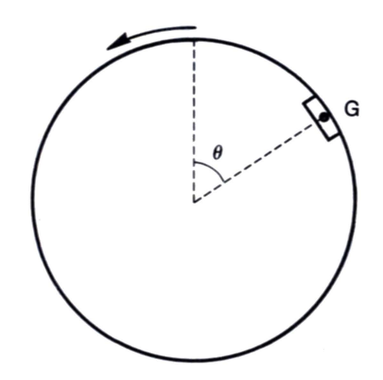
Réponses : **a)** $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L\cos\theta}}$;
b) $\omega_0 = 94{,}6$ t/min.



16. Le tambour d'une machine à laver le linge a un diamètre de 40 cm. Lors de l'essorage, le linge reste collé aux parois en permanence. Quelle est la vitesse de rotation minimale qui permet ce phénomène, l'axe de rotation étant horizontal ? (On donne $g = 9{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$).

17. Dans une machine à laver, le tambour qui contient le linge a un diamètre de 40 cm et tourne avec une vitesse angulaire constante de 1 tour par seconde.

a) En considérant le tambour comme référentiel, indiquez les expressions vectorielles littérales des forces qui s'exercent sur une pièce de linge dont le centre de masse G est collé à la paroi (figure ci-dessous).



b) Le point G se projette sur l'axe de rotation en O, et on note θ l'angle de OG avec la verticale ascendante. On peut admettre que la pièce de linge reste attachée à la paroi tant que la résultante du poids et de la force d'inertie reste orientée vers l'extérieur du tambour. Pour quelle valeur de θ la pièce de linge commence-t-elle à se détacher de la paroi ? (On prend $g = 9{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$).

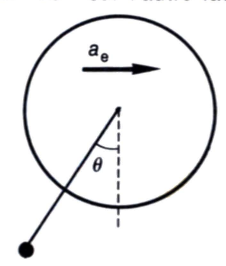
Réponse : **b)** $\theta \approx 36°20'$.

Exercices expérimentaux.

18. a) Construisez un accéléromètre au moyen d'un fil, une petite boule et un disque découpé dans un carton.

b) En vue de graduer l'appareil, calculez de quel angle θ le pendule dévie lorsque l'accéléromètre est tenu dans un véhicule d'accélération constante a, le vecteur accélération $\vec{a}$ étant horizontal et parallèle au plan du disque.

c) Graduez le disque en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ sur une face, et en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ sur l'autre face.



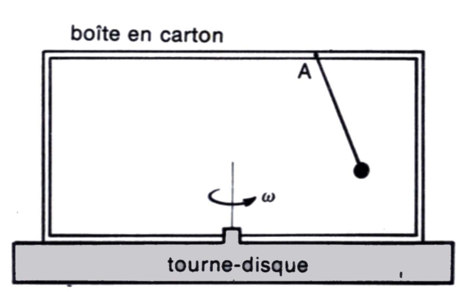
d) Employez l'accéléromètre dans une voiture : vous obtiendrez l'équilibre approximatif du pendule en laissant frotter légèrement le fil contre le disque. Demandez au conducteur de passer de 0 km/h à 90 km/h en accélérant le plus régulièrement possible.
Avec votre montre, évaluez la durée de ce mouvement et en même temps, évaluez l'accélération moyenne avec l'accéléromètre.

e) Calculez l'accélération moyenne à partir de la durée du mouvement et de la vitesse finale. Comparez à l'indication de l'accéléromètre.

19. Procurez-vous un pèse-personne et emportez-le dans un ascenseur. Posez le pèse-personne au sol et montez dessus avant de faire démarrer l'ascenseur. Notez vos observations quand l'ascenseur se met en marche et quand il s'arrête, dans un trajet montant puis dans un trajet descendant. Interprétez.

20. Déposez une gomme sur une feuille de papier posée horizontalement sur une table, puis tirez la feuille vers vous, d'abord lentement, puis d'un coup sec.
Interprétez vos observations, en prenant le papier comme référentiel. Pour simplifier le problème, vous supposerez que vous communiquez à la feuille une accélération constante $\vec{a}$, et que la réaction du papier sur la gomme comporte une composante horizontale (force de frottement) qui est au plus égale à βmg, β étant un coefficient constant et m la masse de la gomme.
Quelle est la valeur critique de l'accélération au-delà de laquelle la gomme glisse sur la feuille ?

21. Procurez-vous une boîte en carton rigide ou une boîte en polystyrène de 20 à 30 cm de longueur.
Couchez-la latéralement et fixez-la sur la platine d'un tourne-disque, après avoir enlevé le couvercle.
Fixez un petit pendule (fil, pâte à modeler) à la paroi supérieure comme l'indique la figure ci-dessous, après avoir tracé quelques traits au fond de la boîte, en vue d'apprécier commodément les déviations du pendule.
Étudiez qualitativement comment varie la déviation angulaire du pendule en fonction de la vitesse de rotation du tourne-disque (33, 45 et 78 tours/min), puis en fonction de la distance du point de suspension A à l'axe de rotation. Vous observez que des mesures quantitatives seraient difficiles à effectuer, en raison de la rotation rapide du disque ; imaginez une méthode qui permettrait ces mesures (on ne demande pas de la mettre en œuvre).

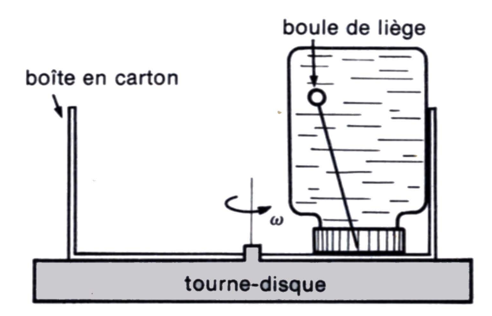


22. Le dispositif schématisé ci-dessous comporte un bocal de verre rempli d'eau, fermé avec un couvercle auquel on a accroché un petit pendule à boule de liège (fixation au moyen de pâte à modeler). Le bocal retourné est calé à l'intérieur d'une boîte en carton et celle-ci est fixée sur la platine d'un tourne-disque.

a) Réalisez ce montage. **Attention ! il pourrait être dangereux de renverser de l'eau sur le tourne-disque branché sur 220 V.**

b) Faites tourner la platine et observez le sens de déviation du pendule.

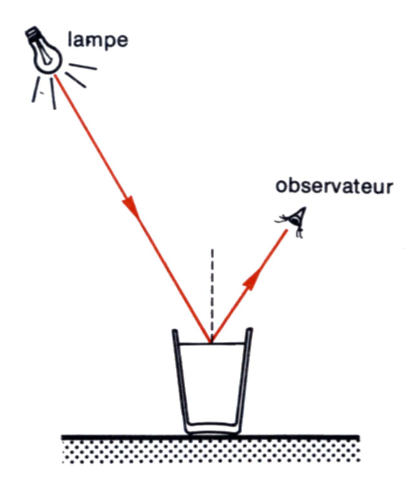
c) Expliquez votre observation d'un point de vue qualitatif.
Remarque : dans une écrémeuse, les gouttelettes de crème en suspension dans le lait ont une densité inférieure à 1 et se comportent donc comme la boule de liège : elles montent et se rassemblent vers l'axe de rotation.



Approfondissement.

Les exercices signalés par un carré rouge □ présentent une plus grande difficulté que les autres.

23. a) Dans un wagon restaurant, des voyageurs prenant une boisson constatent que le liquide se met en mouvement au démarrage du train : la surface libre s'incline d'un angle θ qui varie d'abord rapidement en oscillant puis se stabilise à peu près au voisinage d'un angle θ_0. On admet que l'accélération du train est constante pendant les deux premières minutes, la vitesse passant de 0 à 100 km/h. Quelle est la valeur de θ_0 ? (on prend $g = 9{,}80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

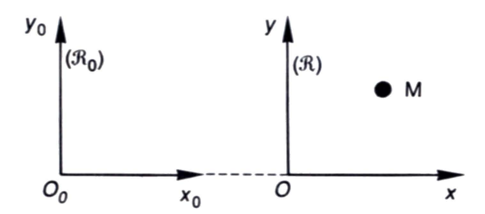


b) L'angle obtenu est faible, de sorte que l'effet n'est pas très visible si l'on se contente d'observer le niveau du liquide sur le bord du verre.
Un voyageur astucieux regarde le reflet d'une lampe dans la surface du liquide (figure ci-dessus).
Complétez la figure pour établir le principe d'une mesure assez précise de l'angle d'inclinaison.

24 Deux systèmes d'axes $O_0\,x_0\,y_0$ et Oxy sont solidaires respectivement d'un référentiel galiléen (R_0) et d'un référentiel non galiléen (R). Leurs positions sont précisées sur la figure ci-dessous. On suppose que (R) est en translation uniforme par rapport à (R_0) et on note $\vec{a_e}$ l'accélération de O par rapport à (R_0).

a) Soit M une particule mobile, avec l'accélération $\vec{a_0}$ par rapport à (R_0) et $\vec{a}$ par rapport à (R).
En dérivant deux fois la relation vectorielle $\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM}$ trouvez la relation entre $\vec{a_e}$, $\vec{a_0}$ et $\vec{a}$.

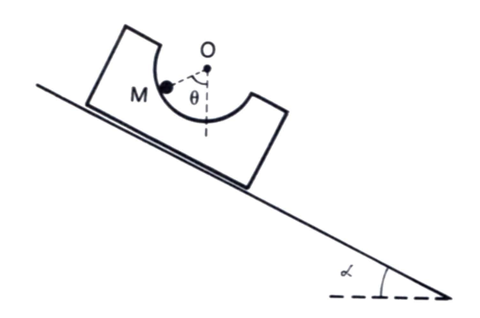
b) La particule, de masse *m*, est soumise à une force d'action $\vec{F}$. Quelle est la relation entre $\vec{F}$ et $\vec{a_0}$? En déduire l'expression vectorielle du produit $m\vec{a}$, connaissant $\vec{F}$ et $\vec{a_e}$.
Vous observez ainsi que le mouvement dans (R) peut se trouver en appliquant la relation $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$, en incluant dans la somme des forces une force d'inertie convenable.



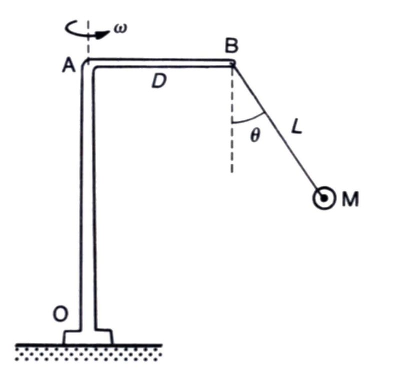
c) Application : une petite boule de masse *m* est accrochée à un fil de longueur *L*, fixé au plafond d'une voiture de chemin de fer. La boule étant immobile à l'instant $t = 0$, le train démarre, avec une accélération constante *A*. Montrez que le pendule s'écarte de la verticale. Calculez la déviation angulaire maximale θ_M en fonction de *A* et de l'accélération de la pesanteur *g*. Calculez numériquement θ_M lorsque $A = g/10$.

Décrivez qualitativement le mouvement ultérieur du pendule.

25. Un bloc parallélépipédique glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle α. Dans une cavité hémisphérique à la partie supérieure du bloc se trouve une petite bille M. Soit O le centre de la cavité hémisphérique et θ l'angle de *OM* avec la verticale. Lorsque la bille est en équilibre relatif, la réaction du bloc passe par O (sinon sa composante tangente à la sphère produirait un mouvement de la bille).
Quelle est la relation entre θ et α lorsqu'il en est ainsi ? En simplifiant la relation obtenue, montrez que $\theta = \alpha$.



26. Un pendule constitué d'une petite boule suspendue à un fil de longueur *L* est accroché à une potence OAB comme l'indique la figure ci-dessous. La distance *AB* est notée *D*. La potence est mise en rotation autour du segment *OA* disposé verticalement, à la vitesse angulaire ω : on observe que le fil *BM* dévie d'un angle θ.



a) Évaluez ω en fonction de *D*, *L*, θ et *g* (accélération de la pesanteur).

b) Application numérique : on prend $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $L = D = 0{,}1$ m.
Calculez ω lorsque $\theta = 30°$ et $\theta = 60°$.

Vers quelle limite tend le rapport $\frac{\omega}{\theta}$ lorsque θ tend vers zéro ?
En déduire un tracé approximatif de la courbe représentant ω en fonction de θ.

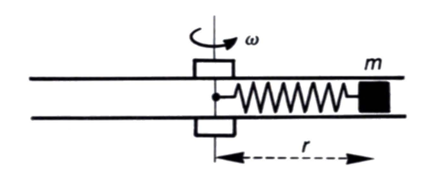
27 Dans un tube tournant à vitesse angulaire constante ω autour d'un axe fixe Δ (perpendiculaire au tube), coulisse sans frottement une masselotte de masse *m*, reliée à l'axe par un ressort de raideur *k* et de longueur au repos *l*.

a) La masselotte se stabilise à la distance *r* de l'axe. Déterminez *r* en écrivant la condition d'équilibre relatif de la masse *m* soumise à la force élastique et à la force d'inertie.

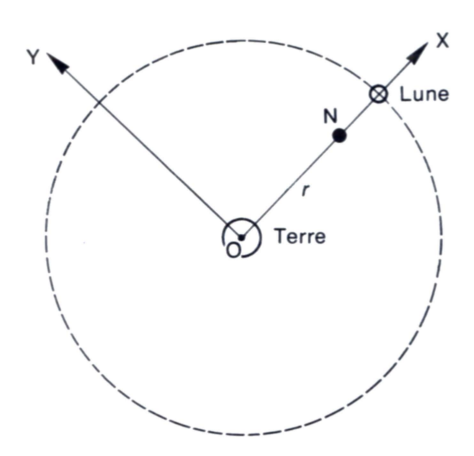
b) Les valeurs de *k* et *m* étant fixées, quelle est la vitesse angulaire maximale ω_0 au-delà de laquelle aucun équilibre n'est possible ?

c) Application numérique : $k = 100$ N/m et $m = 40$ g. Calculez ω_0. Quelle est la raideur du ressort ? Sachant que $l = 10$ cm, quel est l'allongement du ressort lorsque $\omega_0 = 5\,\pi$ rad/s ?

d) Représentez sur un même graphique l'allure des courbes qui représentent, en fonction de *r*, l'énergie potentielle E_{p_1} associée à la force élastique, l'énergie potentielle E_{p_2} associée à la force d'inertie, et enfin la somme $E_p = E_{p1} + E_{p2}$.
Quel point de cette dernière courbe correspond à la position d'équilibre relatif ?



28. Dans le référentiel galiléen géocentrique, la Lune décrit autour de la Terre une trajectoire à peu près circulaire, de rayon $R = 380\,000$ km, la période de révolution étant $T = 27,3$ jours.



On donne les masses de la Terre et de la Lune :
$M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg et $M_L = 7,34 \times 10^{22}$ kg.

a) Un véhicule spatial décrit la ligne des centres de la Terre et de la Lune, puis s'immobilise sur cette ligne en un point N, à la distance r du centre O de la Terre.
Exprimez, en fonction de m, T et r, la force d'inertie qui s'exerce sur le véhicule spatial, dans un référentiel d'axes OX, OY, OZ qui tournent avec la Lune comme le montre la figure ?

b) Écrivez l'expression littérale de la force de gravitation exercée sur la masse m par la Terre et la Lune.

c) Quelle est la condition d'équilibre de la masse m dans le repère OXYZ ? Le point N correspondant est appelé « point neutre ». Calculez numériquement la distance de N au centre de la Terre, et au centre de la Lune. On rappelle la constante de gravitation universelle : $K = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI.

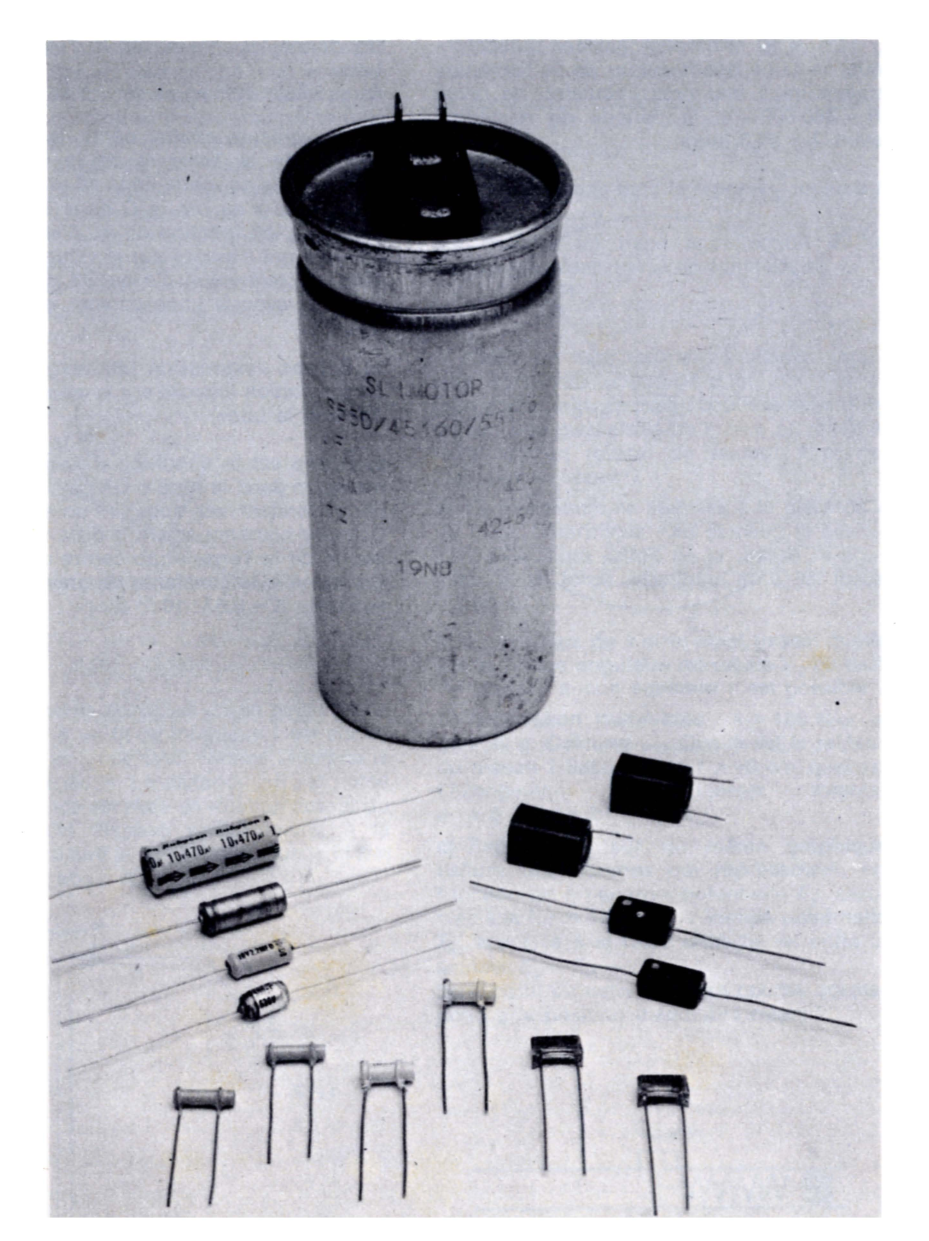
d) Soit N′ le point où les forces de gravitation exercées par la Terre et la Lune se compensent exactement. Calculez numériquement la distance $r' = ON'$, puis la distance NN'. Quel est le point (N ou N′) qui vous paraît le plus important pour la navigation spatiale ?

29 Exprimez le champ de pesanteur $\vec{g}$ à la surface de la Terre (supposée sphérique, de rayon R) en fonction de la latitude λ. Déterminez le petit angle ε que fait $\vec{g}$ avec le champ de gravitation $\vec{G}$. A quelle latitude l'angle ε est-il le plus grand et quelle est alors sa valeur ?

Réponse : $\varepsilon = \dfrac{\omega^2 R}{g} \sin \lambda \cos \lambda$;

ε est maximal quand $\lambda = \dfrac{\pi}{4}$ et $\varepsilon_M = \dfrac{\omega^2 R}{2\,g} \approx 6'$.

7 Condensateurs.



Quelques modèles de condensateurs.

I. Généralités.

1. Condensateur plan dans l'air.
2. Principes de fabrication des condensateurs.
3. Représentation d'un condensateur sur un schéma.

II. Capacité.

1. Mise en évidence de la charge d'un condensateur.
2. Variation de la charge avec la différence de potentiel appliquée.
3. Énergie emmagasinée par un condensateur.

III. Utilisation pratique des condensateurs.

1. Examen à l'oscillographe de la mise en charge et de la décharge d'un condensateur à travers une résistance.
2. Associations de condensateurs.
3. Capacité d'un condensateur plan.
4. Exemples de condensateurs usuels.

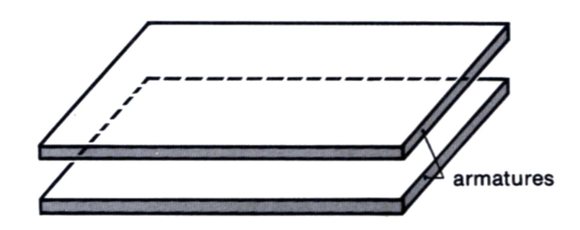
Nous allons étudier ici un type d'élément de circuit d'un usage courant en électronique et en électrotechnique : le condensateur. Nous montrerons que son comportement s'explique en le caractérisant par une nouvelle grandeur, sa capacité.

I. Généralités.

1. Condensateur plan dans l'air.

a) Définitions.

L'ensemble de deux plaques conductrices parallèles constitue un **condensateur.** Chacune des plaques est appelée **armature** (figure 1). En pratique, la distance entre les armatures est petite devant leurs dimensions.



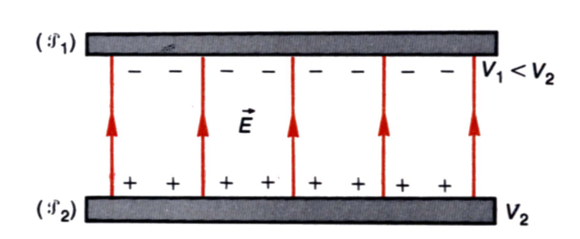
1. Un condensateur plan est formé de deux conducteurs plans parallèles.

b) Rappel : relation entre champ électrique et différence de potentiel.

Vous avez appris, en Classe de Première, qu'une différence de potentiel U, appliquée entre deux plaques conductrices parallèles, a pour effet d'électriser les deux plaques avec des charges de signes contraires. Ces charges engendrent un champ électrique $\vec{E}$, perpendiculaire aux plaques et orienté dans le sens des potentiels décroissants (figure 2).
La distance entre les armatures d'un condensateur est faible, comparée aux dimensions des plaques. Dans ces conditions, on admettra que le champ électrique est pratiquement constant dans tout le volume intérieur : $\vec{E}$ est uniforme. Ce n'est que très près des bords que le champ varie.
La valeur du champ électrique dépend de la distance d entre les deux armatures. Elle s'exprime par la formule :

$$\boxed{E = \frac{U}{d}}\ .$$

La différence de potentiel U étant exprimée en volt et la distance d en mètres, l'unité de champ électrique est le volt par mètre (V/m ou $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$).



2. Le champ électrique entre les armatures est uniforme ; il est orienté dans le sens des potentiels décroissants.

2. Principes de fabrication des condensateurs.

a) Condensateurs à lame diélectrique.

• Dans les condensateurs usuels, il est fréquent qu'une lame d'**isolant** (ou **diélectrique**) soit disposée entre les armatures.
Si le diélectrique remplit tout l'espace intérieur, la relation entre tension et champ électrique ($U = Ed$) s'applique encore.

• L'intérêt des diélectriques réside, en particulier, dans le fait qu'ils permettent de réduire commodément la distance entre armatures : il est difficile d'approcher deux lames métalliques, dans l'air, à une distance de quelques micromètres, sans risquer un contact accidentel entre ces armatures ; en revanche, il est facile de « prendre en sandwich » une lame diélectrique très fine entre deux plans métalliques. Nous en verrons l'utilité plus loin.

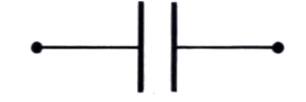
• Il faut éviter d'appliquer une tension trop élevée, sans quoi le champ électrique est susceptible d'ioniser localement le milieu isolant : alors, un courant électrique apparaît et le diélectrique est détérioré (phénomène de « claquage »). On appelle **rigidité diélectrique** le champ électrique maximum admissible sans claquage. Pour les isolants d'usage courant, la rigidité diélectrique est de l'ordre de quelques kilovolts par millimètre à quelques dizaines de kilovolts par millimètre.

b) Forme du condensateur.

L'ensemble formé par les deux armatures et la lame diélectrique intercalée peut être déformé notablement, par exemple en l'enroulant en forme de cylindre. De cette façon, l'encombrement du condensateur diminue. Ainsi, les condensateurs utilisés en radioélectricité ont couramment des dimensions de l'ordre du centimètre. Des détails technologiques à ce sujet seront exposés en fin de chapitre.

3. Représentation d'un condensateur sur un schéma.

Le symbole représentatif (figure 3) évoque la structure du condensateur : deux armatures séparées par un milieu isolant.



3. Représentation symbolique d'un condensateur.

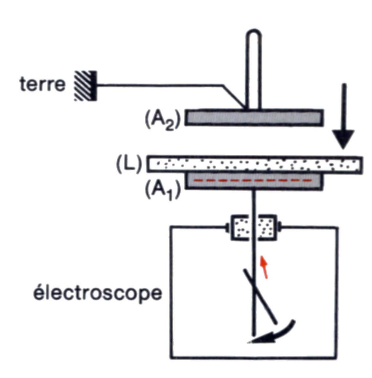
II. Capacité.

1. Mise en évidence de la charge d'un condensateur.

a) Une expérience d'électrostatique.

• **Description de l'expérience :** Réalisons le dispositif représenté à la figure 4. Un électroscope sur lequel est fixé un plateau conducteur (A_1) a été préalablement chargé (par influence ou par contact), son boîtier étant mis à la Terre : initialement, l'aiguille de l'électroscope dévie (lorsqu'il s'agit d'un électroscope à feuilles, celles-ci sont écartées). Posons sur le plateau une lame diélectrique (L) et approchons un deuxième plateau métallique (A_2), relié à la Terre. Nous constatons que l'aiguille de l'électroscope se rapproche de la position verticale, au cours de l'opération.

• **Interprétation :** Nous avons formé un condensateur dont les armatures sont les plateaux (A_1) et (A_2). Initialement, on a chargé le conducteur formé par le plateau A_1, la tige de l'électroscope et son aiguille. L'aiguille dévie du fait de la répulsion des charges portées par la tige et par l'aiguille. En fin d'opération, l'aiguille ne dévie pratiquement plus parce que des charges ont quitté l'ensemble tige-aiguille pour se diriger vers (A_1) : **toute la charge initiale s'est « condensée » au niveau de l'armature (A_1).** Ainsi s'explique le nom **« condensateur »** attribué à l'ensemble (A_1, L, A_2).

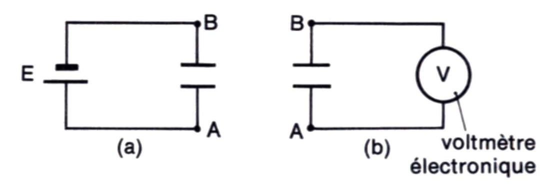


4. Lors de l'approche du plateau (A_2), les charges portées par l'électroscope ont tendance à migrer vers le plateau A_1 (« condensation » de l'électricité).

b) Charge d'un condensateur au moyen d'un générateur de courant continu.

• **Expérience :** (figure 5).
Un condensateur de bornes A et B est connecté aux pôles d'un générateur de courant continu, de f.é.m. E, par exemple une pile. Il est ensuite débranché, puis on le connecte à un voltmètre de très grande résistance interne (voltmètre électronique).
On constate que la tension U entre A et B est restée égale à E. Par la suite, on observe une lente diminution de U.

• **Interprétation :**
En branchant la pile, des charges viennent se placer sur les armatures : $+Q$ sur l'armature reliée au pôle (+), et $-Q$ sur l'armature reliée au pôle (−). A l'équilibre, la tension aux bornes du condensateur est égale à la tension à vide du générateur : $V_A - V_B = E$.

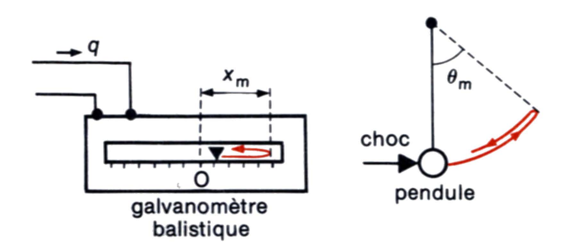


5. Après avoir été connecté à un générateur de f.é.m. E, il subsiste aux bornes du condensateur une tension égale à E : le condensateur est chargé.

Quand le condensateur n'est plus connecté, les charges subsistent et créent toujours le même champ électrique entre les armatures, de sorte que la différence de potentiel reste inchangée. Par la suite, le condensateur se décharge lentement, soit à travers le voltmètre, soit à travers le diélectrique (un isolant n'est jamais parfait, il conduit toujours un peu l'électricité) : ainsi s'explique la lente diminution de U.

2. Variation de la charge avec la différence de potentiel appliquée.

Les armatures positive et négative du condensateur portent des charges $+Q$ et $-Q$. La valeur de Q est appelée **charge du condensateur.**



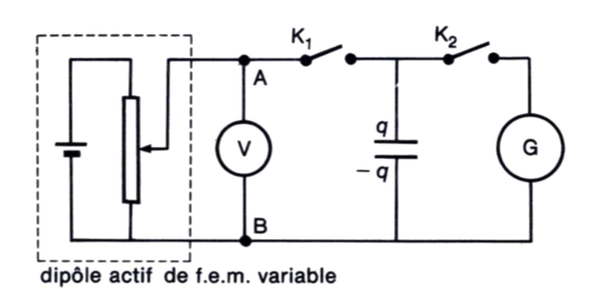
6. Fonctionnement du galvanomètre balistique comparé à un pendule soumis à un choc.

a) Galvanomètre balistique.

Dans l'expérience qui suit, nous mesurerons la charge d'un condensateur au moyen d'un galvanomètre balistique. Il s'agit d'un galvanomètre spécialement adapté pour des mesures de quantités d'électricité. Lorsqu'une charge q traverse le galvanomètre pendant un intervalle de temps très bref, le spot est mis en mouvement, puis revient à sa position d'équilibre au bout d'un temps plus ou moins long.

Nous admettrons que la déviation maximale du spot est proportionnelle à la quantité d'électricité qui a traversé le galvanomètre.

Il est possible de comparer le fonctionnement du galvanomètre balistique avec celui d'un pendule dans les conditions suivantes (figure 6) : lorsque le pendule est mis en mouvement sous l'effet d'un choc, il s'écarte de la position d'équilibre d'autant plus que le choc a été plus fort.



7. Dispositif pour étudier la charge d'un condensateur en fonction de la tension appliquée.

b) Expérience.

• **Le schéma** du dispositif est donné à la figure 7. Une pile et un potentiomètre sont branchés de manière à constituer un dipôle actif (AB) de f.é.m. variable. Un voltmètre, connecté entre A et B, permet de mesurer la différence de potentiel U appliquée au condensateur lorsque l'interrupteur K_1 est fermé.

• **Une mesure** est effectuée de la façon suivante : les interrupteurs K_1 et K_2 étant ouverts, on ajuste le potentiomètre pour obtenir la tension U souhaitée ; après avoir relevé la valeur de la tension, on ferme K_1, pour charger le condensateur, puis on ouvre à nouveau K_1 et on ferme K_2 ;

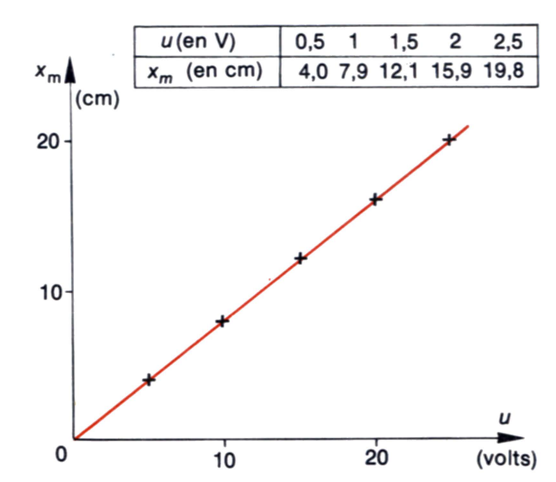
on relève la valeur de la déviation maximale x_m du spot. Les valeurs de U et de x_m sont portées dans un tableau de mesure. L'opération est répétée pour plusieurs valeurs de U, espacées régulièrement, sans dépasser la tension nominale (tension maximale recommandée).

• **La représentation graphique** des résultats (figure 8) montre que la déviation du spot est proportionnelle à la tension appliquée :

$$x_m \propto U.$$

Comme la déviation x_m est elle-même proportionnelle à la charge du condensateur, on en déduit : $Q \propto U$.

En conclusion, l'expérience montre que la charge d'un condensateur est proportionnelle à la tension appliquée.



u (en V)	0,5	1	1,5	2	2,5
x_m (en cm)	4,0	7,9	12,1	15,9	19,8

8. Tableau de mesures et courbe représentative de x_m (déviation maximale du spot) en fonction de U (tension appliquée au condensateur).

c) Capacité.

• Le facteur de proportionnalité (noté C) entre Q et U est appelé **capacité du condensateur.** La relation entre Q et U s'écrit :

$$\boxed{Q = CU}.$$

• **L'unité SI de capacité est le farad, noté F.** Les condensateurs usuels ont toujours une capacité beaucoup plus petite que 1 F, de sorte que les capacités sont souvent exprimées en microfarad (µF), voire en nanofarad (1 nF = 10^{-9} F) ou en picofarad (1 pF = 10^{-12} F).

• Sur les condensateurs, la valeur de la capacité est généralement indiquée, en clair (valeur numérique) ou en code (usage de couleurs, comme pour les résistances).

Relation entre la charge d'un condensateur et la tension à ses bornes :

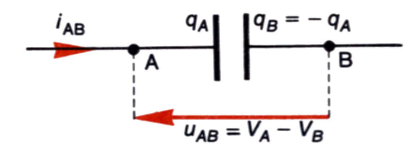
$$Q = CU$$

La capacité C s'exprime en farad (symbole F).

d) Relations algébriques caractéristiques d'un condensateur (figure 9).

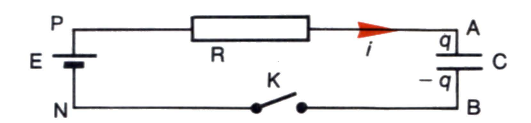
• On peut écrire algébriquement la relation entre charge et tension. En effet, si A et B sont les bornes d'un condensateur, notons respectivement q_A et q_B les charges des armatures reliées à A et B. Lorsque $V_A > V_B$, la charge q_A est positive, et q_B est négative, opposée à q_A. Nous pouvons donc écrire : $q_A = -q_B = C(V_A - V_B)$.

• Introduisons l'intensité i_{AB} du courant qui pénètre dans le condensateur à la borne A. Lorsque i_{AB} est positif, q_A augmente, et d'après la définition de l'intensité, on a : $i_{AB} = \dfrac{dq_A}{dt}$ ou $i_{AB} = C\dfrac{d(V_A - V_B)}{dt}$.

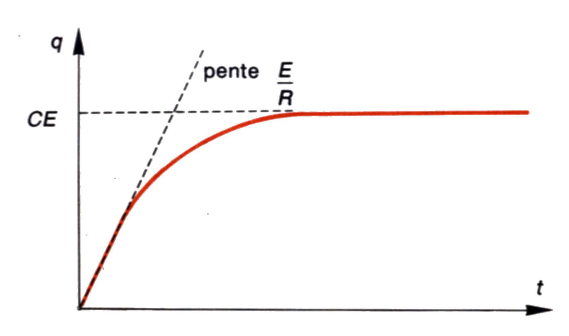


9. Relations algébriques vérifiées par un condensateur inséré dans un circuit :

$q_A = C(V_A - V_B)$ et $i_{AB} = \dfrac{dq_A}{dt}$.



10. Circuit de mise en charge d'un condensateur à travers une résistance. L'interrupteur K a été fermé à l'instant $t = 0$.



11. Variation de la charge d'un condensateur, en fonction du temps, lorsqu'il est connecté à un générateur de f.é.m. E par l'intermédiaire d'une résistance R (montage de la figure 11).

Exercice : Étudier la variation de la charge d'un condensateur de capacité C, initialement déchargé, lorsqu'on le met en série avec un générateur de f.é.m. constante E et de résistance interne négligeable, et avec une résistance R.

Solution :

- **Recherchons une équation vérifiée par la charge q.**

Avec les notations indiquées sur la figure, nous pouvons écrire les différences de potentiel aux bornes des éléments de circuit :

$$V_p - V_A = Ri\,, \quad V_A - V_B = \frac{q}{C}, \quad V_B - V_N = 0 \quad \text{et} \quad V_p - V_N = E\,.$$

$$\text{Or :} \quad (V_p - V_A) + (V_A - V_B) + (V_B - V_N) = V_p - V_N\,,$$

$$Ri + \frac{q}{C} + 0 = E\,.$$

En remarquant que $i = \dfrac{dq}{dt}$, nous obtenons :

$$\boxed{R\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E\,.}$$

Ainsi, nous n'aboutissons pas directement à l'expression de q en fonction de t, mais à une équation entre q et sa dérivée (équation différentielle).

- **Interprétation rapide de l'équation.**

L'examen de deux cas limites permet d'obtenir l'allure de la courbe $q = f(t)$.

— Au début de l'opération ($t = 0$) on a $q = 0$ et par suite, $\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{E}{R}$.

— A la fin ($t \to \infty$), la charge ne varie plus, donc $\dfrac{dq}{dt} = 0$ et par suite $q = CE$.

- **Résolution complète de l'équation.** Transformons :

$$RC\,\frac{dq}{dt} + (q - CE) = 0 \quad \text{d'où} \quad RC\,\frac{d(q - CE)}{dt} + (q - CE) = 0$$

par suite
$$\frac{1}{(q - CE)}\,\frac{d}{dt}(q - CE) = -\,\frac{1}{RC}.$$

Prenons les primitives des deux membres, en remarquant que le premier membre est de la forme $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ qui s'intègre suivant $\text{Log}\,|f(t)|$:

$$\text{Log}\,|\,q - CE\,| = -\,\frac{t}{RC} + A \quad (A\ :\ \text{constante d'intégration}).$$

Mais la charge q reste inférieure à CE ; par suite : $\text{Log}\,(CE - q) = -\,\dfrac{t}{RC} + A\,.$

La constante A se détermine en notant que $q = 0$ pour $t = 0$ (condition initiale) :

$$\text{Log}\,CE = A\,. \quad \text{Par suite :} \quad \text{Log}\,\frac{CE - q}{CE} = -\,\frac{t}{RC} \quad \text{ou} \quad \frac{CE - q}{CE} = e^{-t/RC}$$

$$\boxed{q = CE(1 - e^{-t/RC})\,.}$$

3. Énergie emmagasinée par un condensateur.

a) Existence.

Lorsqu'un condensateur est chargé, il possède une énergie potentielle, due à l'interaction des charges portées par les armatures. Lorsque le condensateur se décharge à travers une résistance, le courant produit un dégagement de chaleur par effet Joule : une énergie, initialement emmagasinée dans le condensateur, a été fournie au milieu extérieur sous forme de chaleur. Contrairement aux habitudes nous n'appellerons pas E cette énergie pour éviter une confusion avec la f.é.m., mais W. La décharge d'un condensateur sera revue d'un point de vue expérimental au chapitre 14.

b) Expressions de l'énergie emmagasinée.

Lorsque la charge de l'armature A passe de q_A à $q_A + dq_A$ pendant un intervalle de temps dt, l'intensité qui pénètre en A dans le dipôle (AB) est :

$$i_{AB} = \frac{dq_A}{dt}, \quad \text{d'où} \quad dq_A = i_{AB}\, dt\,.$$

On sait (voir cours de Première) que la puissance électrique reçue par le dipôle (AB) vaut :

$$\mathcal{P} = u_{AB}\, i_{AB} = r i_{AB}^2 - e i_{AB}\,.$$

L'énergie reçue pendant dt est donc :

$$dW = \mathcal{P}\, dt = (V_A - V_B)\, dq_A = \frac{q_A}{C}\, dq_A = \frac{1}{2\,C}\, d(q_A^2)\,.$$

Lorsque la charge q_A passe progressivement de 0 à Q, la somme des énergies reçues est :

$$W = \frac{1}{2\,C}\int_0^{Q^2} d(q_A^2) = \frac{Q^2}{2\,C}.$$

Nous obtenons ainsi **l'énergie emmagasinée lorsque la charge du condensateur est Q.** Compte tenu de la relation $Q = CU$, nous pouvons écrire trois expressions de W :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\, CU^2 = \frac{1}{2}\, QU}\,.$$

Energie emmagasinée par un condensateur :

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\, CU^2 = \frac{1}{2}\, QU$$

Exercice : Faire le bilan des énergies échangées dans un circuit lorsqu'un condensateur est mis en série avec un générateur de f.é.m. constante E et une résistance R.

Solution : Le schéma de la figure 11 convient, et nous pouvons utiliser le résultat partiel qui a été déduit de l'exercice de la page 116 : $Ri + \frac{q}{C} = E$.

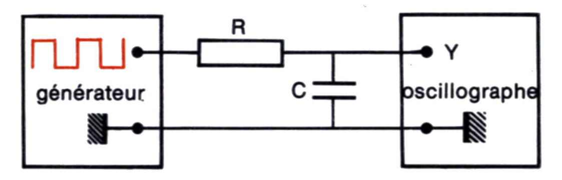
Multiplions les deux membres par idt (égal à dq) :

$$Ri^2\,dt + \frac{1}{C}\,qdq = Eidt\,, \qquad Ri^2\,dt + d\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = Eidt\,.$$

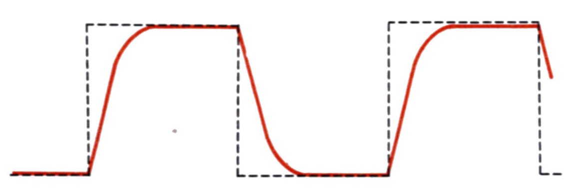
Les trois termes de cette équation sont dans l'ordre : l'énergie électrique reçue par la résistance (énergie qui se dégage ensuite sous forme de chaleur : effet Joule), augmentation d'énergie emmagasinée par le condensateur, énergie fournie par le générateur.
En conclusion, l'énergie fournie par le générateur est en partie emmagasinée dans le condensateur et le reste est dissipé par effet Joule.

III. Utilisation pratique des condensateurs.

1. Examen à l'oscillographe de la mise en charge et de la décharge d'un condensateur à travers une résistance.



12. Mise en charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance (dispositif expérimental). La masse O_1 du générateur de signaux carrés doit être reliée à la masse O_2 de l'oscillographe.



13. Signal observé sur l'oscillographe. En pointillés, le signal observé lorsque $R = 0$ représente la tension délivrée par le générateur.

Réalisons le montage représenté à la figure 12.

- Le générateur délivre une tension $u(t)$ périodique dite « tension carrée » ou en « créneaux » : pendant une demi-période, $u(t) = E$; et pendant la demi-période suivante, $u(t) = 0$.
- La masse de l'oscillographe (O_2) doit être reliée à la masse du générateur (O_1). En effet, les masses des appareils sont parfois reliées au fil neutre du secteur : si l'on permutait les entrées O_2 et Y de l'oscillographe, le condensateur serait mis en court-circuit par le neutre du secteur.
- La figure 13 montre l'allure du signal observé sur l'écran de l'oscillographe. En pointillés est représenté le signal obtenu lorsque $R = 0$, c'est-à-dire la tension appliquée $u(t)$.

La mise en charge et la décharge ne sont pas instantanées. Il est possible de démontrer que les courbes observées sont des exponentielles.

• Le temps $t_{1/2}$ nécessaire pour que la charge (ou la décharge) se fasse à moitié, est facile à mesurer avec un oscillographe dont la base de temps (balayage horizontal) est étalonnée. On trouve que $t_{1/2}$ est proportionnel à R et à C (plus exactement $t_{1/2} \approx 0{,}7\,RC$). L'interprétation qualitative est simple : lorsque R augmente, le courant passe plus difficilement, donc la mise en charge est plus lente ; lorsque C augmente, la charge finale ($Q = CE$) est plus grande, il faut donc plus de temps pour l'atteindre.

2. Associations de condensateurs.

Remarque préliminaire. On reconnaît qu'un dipôle (AB) se comporte comme un condensateur si les tests suivants se vérifient :
— Une tension U constante appliquée au dipôle ne produit aucun courant permanent.
— Lors de la mise sous tension $U = V_A - V_B$, il pénètre en A une charge Q et il sort en B la même charge Q.
— Q et U sont proportionnels : $Q = CU$; on dit alors que C est la capacité du dipôle.

a) Condensateurs en parallèle (figure 14).

Considérons le dipôle (AB) formé de deux condensateurs, de capacités C_1 et C_2, branchés en parallèle.
Lorsqu'une tension U est appliquée à leurs bornes, les charges des condensateurs sont :

$$Q_1 = C_1 U \quad \text{et} \quad Q_2 = C_2 U.$$

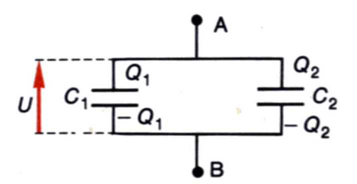
La somme des charges des deux condensateurs est :

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)\, U.$$

Lors de la mise sous tension, cette charge Q pénètre en A dans le dipôle (AB) et la même charge sort en B. On peut donc dire que le dipôle (AB) se comporte comme un condensateur unique de capacité :

$$\boxed{C = C_1 + C_2}.$$

Ainsi les capacités s'ajoutent pour deux condensateurs en parallèle : cette loi d'association est comparable à celle de deux conductances G_1 et G_2 en parallèle.



14. Condensateurs en parallèle. Le dipôle (AB) est équivalent à un condensateur de capacité $C = C_1 + C_2$.

b) Condensateurs en série (figure 15).

Soient C_1 et C_2 les capacités de deux condensateurs, connectés en série pour former un dipôle (AB). Supposons que les condensateurs ne portent initialement aucune charge.

Une tension $U = V_A - V_B$, appliquée entre A et B se partage en $U_1 = V_A - V_M$ et $U_2 = V_M - V_B$.

Les condensateurs se chargent, il apparaît sur les armatures Q_1 et $-Q_1$, Q_2 et $-Q_2$. Mais le conducteur formé par les armatures liées au point M reste globalement neutre :

$$-Q_1 + Q_2 = 0 \quad \text{ou} \quad Q_2 = Q_1 .$$

Notons Q la valeur commune de Q_1 et Q_2. Exprimons les différences de potentiel :

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}$$

d'où :

$$U = U_1 + U_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right).$$

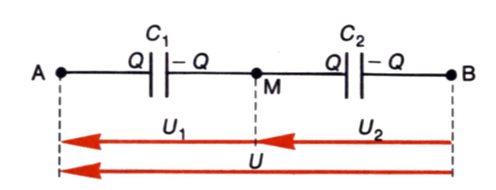
Pour le dipôle (AB), il est entré la charge Q en A, et il est sorti la même charge en B. De plus, il y a proportionnalité entre U et Q. Le dipôle (AB) se comporte donc comme un condensateur unique.

La capacité du condensateur équivalent est telle que $U = \dfrac{Q}{C}$.

Par suite :

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} .$$

Remarquons que cette loi d'association est comparable à celle de deux conductances en série $\dfrac{1}{G} = \dfrac{1}{G_1} + \dfrac{1}{G_2}$.



15. Condensateurs en série. Le dipôle AB est équivalent à un condensateur unique de capacité C donnée

par : $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$.

3. Capacité d'un condensateur plan.

a) Condensateur plan dans le vide.

Nous admettrons sans démonstration l'expression de la capacité d'un condensateur plan dont les armatures, baignant dans le vide ont une aire S et sont écartées de d : $\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$.

Dans cette formule, ε_0 est la **permittivité du vide,** qui a été introduite en classe de Première, à propos de la loi de Coulomb. Rappelons que sa valeur, en unités SI est telle que :

$$\frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0} \approx 9\,.\,10^9 \text{ SI}, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\,\pi\,.\,10^9}.$$

b) Condensateur à lame diélectrique.

- Nous admettrons que l'interposition d'un diélectrique dans tout l'espace compris entre les armatures conduit à multiplier la capacité par un coefficient numérique ε_r :

$$\boxed{C = \varepsilon_r\,\varepsilon_0 \frac{S}{d}}.$$

- Le coefficient ε_r est un nombre sans dimension, appelé **permittivité relative** du diélectrique ou **constante diélectrique.**
- Quelques valeurs de ε_r pour des diélectriques usuels sont consignées dans le tableau ci-contre, ainsi que les rigidités diélectriques correspondantes (champ électrique qui produit le claquage).

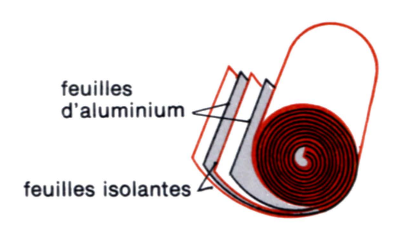
La valeur de ε_r est toujours supérieure à 1. Dans le cas de l'air, on prend $\varepsilon_r = 1$ en première approximation. Les constantes diélectriques les plus élevées s'observent avec des **céramiques,** isolants minéraux artificiels, obtenus en mélangeant à froid des oxydes métalliques pulvérulents et en les agglomérant par chauffage à haute température : ainsi le mélange mole à mole de dioxyde de titane TiO_2 et d'oxyde de baryum (BaO) donne un solide de structure ionique (Ba^{++}, TiO_3^{--}), le titanate de baryum, de constante diélectrique proche de 1 000.

- **Remarque.** Pour réduire l'encombrement d'un condensateur plan, on est parfois amené à déformer les armatures. Nous admettrons que la formule du condensateur plan reste applicable, pourvu que l'épaisseur de diélectrique reste constante et suffisamment faible.

Capacité d'un condensateur plan :

$$C = \varepsilon_0\,\varepsilon_r \frac{S}{d}$$

Isolant	Permittivité relative	Rigidité diélectrique moyenne en kV/mm
Air sec (conditions normales)	1,006 $\approx$ 1	4
Papier ordinaire	2 à 5	20
Papiers imprégnés	2 à 5	30 à 80
Mica	6,5 à 9	70
Polyéthylène	2,2	18
Alumine	9	1 000
Titanate de baryum	$\approx$ 1 000	5



16. Structure d'un condensateur au papier.

4. Exemples de condensateurs usuels.

a) Condensateur au papier ; optimisation des dimensions.

Les caractéristiques essentielles d'un condensateur sont sa capacité et sa tension nominale.
On veut obtenir, par exemple, $C = 1\ \mu\text{F}$, le condensateur étant utilisable sous 1 000 V. Pour plus de sécurité, on se fixe une tension maximale $U_m = 2\,000$ V. Soit E_m le champ électrique maximum tolérable par le condensateur (rigidité diélectrique).
L'épaisseur de l'isolant devra être :

$$d = \frac{U_m}{E_m}.$$

La capacité étant $C = \varepsilon_r\ \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$, la surface doit être :

$$S = \frac{dC}{\varepsilon_r\ \varepsilon_0}.$$

Supposons qu'on emploie comme diélectrique du papier imprégné, avec $\varepsilon_r = 5$ et $E_m = 40$ kV/mm soit $4\ .\ 10^7$ V/m. Calculons d et S :

$$d = \frac{2\,000}{4\quad 10^7} = 5\ .\ 10^{-5}\ \text{m} \quad \text{soit} \quad 0{,}05\ \text{mm}\,,$$

$$S = \frac{5\ .\ 10^{-5} \times 10^{-6} \times 36\ \pi\ .\ 10^9}{5} \approx 1{,}13\ \text{m}^2\,.$$

On conçoit qu'un tel condensateur serait très encombrant si les armatures restaient planes. Le problème est résolu en enroulant deux rubans de papier disposés alternativement avec deux rubans conducteurs en aluminium (figure 16).

b) Condensateur électrolytique.

• **Principe :** Une électrolyse s'accompagne toujours d'une réaction d'oxydation à l'anode. Lorsque celle-ci est en aluminium, et si l'électrolyte est bien choisi, l'oxydation peut conduire à la formation d'une mince couche d'oxyde Al_2O_3 à la surface de l'anode, puis l'électrolyse cesse, car l'alumine est un isolant. Il s'est formé un condensateur : l'anode et l'électrolyte en sont les armatures, et l'alumine Al_2O_3 constitue la lame diélectrique.

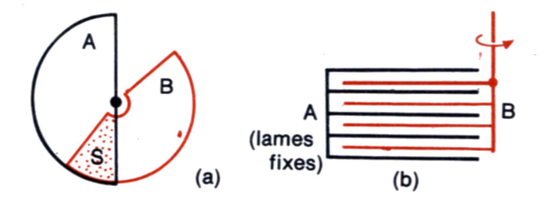
17 a) Oxydation d'un ruban d'aluminium en vue de la construction d'un condensateur électrolytique.
b) Un condensateur électrolytique.
Lorsqu'il est inséré dans un circuit, la borne (+) doit être reliée au pôle (+) du générateur.

• **Construction :** Un ruban d'aluminium, relié au pôle (+) d'un générateur est passé dans un bain d'électrolyte, dans lequel trempe une électrode reliée au pôle (−). Le ruban « s'anodise » : la couche d'alumine se forme à sa surface. L'enroulement de ce ruban avec une bande de papier imprégné d'électrolyte permet de confectionner un condensateur de faible encombrement. En raison de la finesse de la couche d'alumine, il est possible d'obtenir ainsi de grandes capacités.

• **Précaution d'emploi :** Un tel condensateur est polarisé : il faut éviter de relier le ruban « anodisé » au pôle (−) d'un générateur, sans quoi l'alumine subit une réduction et le condensateur se trouve rapidement hors d'usage : après disparition de l'alumine, l'électrolyse se poursuit avec dégagement gazeux et échauffement, de sorte que le condensateur finit par exploser.

c) **Condensateur variable à air** (figure 18).

Il s'agit d'un condensateur à capacité variable. Deux groupes de plaques tournent l'une par rapport à l'autre : on obtient ainsi une variation continue de *S*, surface totale des armatures en regard. En général, la capacité d'un tel condensateur ne dépasse pas le nanofarad. Dans le domaine de la radioélectricité, le condensateur à air, autrefois très employé, a été supplanté par d'autres systèmes. Toutefois, il reste utile dans certains dispositifs.



18. Condensateur variable à air.
a) Schéma de principe. La surface en regard *S* est variable à volonté en tournant l'armature B.
b) Les lames A et B vues en coupe, constituent ici 10 condensateurs en parallèle.
c) Photographie d'un condensateur à air.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- Un condensateur est constitué de deux plaques conductrices appelées ________, séparées par un ________.
- Le champ électrique E à l'intérieur s'exprime en fonction de la différence de potentiel U entre les armatures, et de l'épaisseur d par la relation ________. Il ne doit pas dépasser une certaine valeur appelée rigidité ________, sans quoi le condensateur est détérioré (phénomène de ________).
- La charge d'un condensateur est ________ à la différence de potentiel appliquée entre les ________ : $Q = C \times$ ________. Le facteur de proportionnalité C est la ________ du condensateur. Elle s'exprime en ________ (symbole ________), dans le système international d'unités.
- L'énergie ________ par un condensateur est proportionnelle au ________ de la différence de potentiel entre les armatures.
- Lorsque deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 sont en série, le dipôle obtenu est équivalent à un condensateur de capacité C donnée par la formule ________. Si les mêmes condensateurs sont mis en parallèle, la capacité obtenue est : ________.
- La formule $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ donne la capacité d'un condensateur ________ d'épaisseur ________ et de ________ S, les armatures étant dans le vide. Le coefficient ε_0 est la ________ du vide. Elle vaut ________. Lorsque l'espace entre les armatures est rempli par un isolant, la capacité est multipliée par un coefficient ε_r appelé ________ ou ________ de l'isolant.

Petites questions.

1. Pour quelles raisons a-t-on souvent intérêt à introduire un diélectrique entre les armatures d'un condensateur ?

2. Pourquoi est-il important de connaître la rigidité diélectrique de l'isolant, lors de la fabrication d'un condensateur ?

3. Pour obtenir la capacité la plus grande possible à partir de plusieurs condensateurs, doit-on les mettre en série ou en parallèle ?

4. Lorsqu'on dispose de trois condensateurs identiques qui supportent chacun une tension maximale de 10 V, est-il possible de les associer de telle sorte qu'on puisse appliquer une tension 25 volts ?

5. Pourquoi dit-on qu'un condensateur électrolytique est « polarisé » ?

Applications immédiates.

6. Deux plaques conductrices de surface 1 dm^2 sont disposées parallèlement dans l'air à 1 mm l'une de l'autre.

a) Quelle est la capacité du condensateur ainsi obtenu et quel est le champ électrique qui règne entre les armatures quand la différence de potentiel est de 1 kV ?

b) Comment les résultats précédents sont-ils modifiés lorsque l'espace compris entre les armatures est rempli d'un diélectrique de permittivité relative $\varepsilon_r = 10$?

7. On dispose une fine couche métallique sur le verre d'une bouteille de vin de Bordeaux, à l'intérieur et à l'extérieur.

a) Évaluez l'ordre de grandeur de la capacité du condensateur obtenu.

b) Ce type de condensateur supporte des tensions très élevées ; il a été utilisé dès le 18e siècle pour les expériences d'électrostatique, sous le nom de « bouteille de Leyde », car l'invention en revient à un savant hollandais qui vivait à Leyde : Van Musschenbroek (1692-1761). Quelle est l'énergie emmagasinée (ordre de grandeur) lorsque la bouteille est chargée au moyen d'une machine électrostatique, sous 50 kV environ.

8. On dispose d'un rouleau de ruban d'étain de 5 cm de largeur et d'un ruban de papier de même largeur et de 5 μm d'épaisseur. Sur quelle longueur doit-on disposer deux feuilles d'étain de part et d'autre d'une feuille de papier pour obtenir un condensateur de 1 μF ? (pour le papier, $\varepsilon_r \simeq 5$).

9. Quelle capacité doit-on brancher en parallèle avec 10 μF pour obtenir 15 μF ? L'association obtenue est branchée en série avec un troisième condensateur. Quelle doit-être sa capacité pour obtenir à nouveau 10 μF ?

Réponses : 5 μF et 30 μF.

10. On dispose d'un grand nombre de condensateurs identiques de capacité 0,2 μF, supportant 50 V. Quelle association doit-on faire pour obtenir une capacité de 0,5 μF, supportant 200 V ?

Réponse : mettre en parallèle 10 séries de 4 condensateurs.

11. Indiquez toutes les façons de connecter trois condensateurs identiques de capacité C entre deux points A et B. Déterminez dans chaque cas la capacité équivalente et l'énergie emmagasinée lorsque la tension entre A et B est U. (Les trois condensateurs sont initialement déchargés).

12. Trois condensateurs de 5 μF, 10 μF et 20 μF sont initialement déchargés. On les met en série et on leur applique 100 V.

a) Quelle est la charge de chacun des condensateurs ?

b) Quelles sont les différences de potentiel correspondantes ?

c) Calculez l'énergie totale emmagasinée.

13. Entre deux plaques planes d'aire 0,1 m^2 sont disposées deux feuilles de papier d'épaisseur 0,05 mm, et de constante diélectrique égale à 5.

a) Quelle est la capacité du condensateur obtenu ?

b) Le condensateur est mis en série avec un générateur de f.é.m. $E = 100$ V, un interrupteur et un galvanomètre balistique. Celui-ci dévie de 12,0 cm lorsqu'on ferme l'interrupteur pour charger le condensateur. Puis en maintenant l'interrupteur fermé on retire rapidement une feuille de papier : l'épaisseur du condensateur se trouve divisée par 2. Quelle est la déviation du galvanomètre balistique au cours de cette opération ?

14. Pour évaluer grossièrement la surface des armatures et l'épaisseur d'isolant d'un condensateur du commerce, on peut opérer de la façon suivante : on suppose que la tension de claquage est double de la tension de fonctionnement préconisée (dite « tension nominale »). Suivant l'aspect du condensateur, il est possible d'avoir une idée du diélectrique employé, et donc de connaître la permittivité relative et la rigidité diélectrique (vous utiliserez le tableau de valeurs de la page 121). Avec ces indications, évaluez les ordres de grandeur de l'épaisseur de diélectrique et de la surface des armatures pour les condensateurs suivants :

a) condensateur papier : capacité 1 μF, tension nominale 400 V.

b) condensateur au mica : capacité 500 pF ; tension nominale 300 volts.

c) condensateur électrolytique à couche d'alumine ($\varepsilon_r = 9$) ; capacité 500 μF ; tension nominale 12 V. Ici, la rigidité diélectrique est exceptionnellement grande : 1 000 kV/mm.

Approfondissement.

Les exercices signalés par un carré rouge □ présentent une plus grande difficulté que les autres.

15. Supposez que votre livre de physique ait une feuille sur deux qui soit métallisée.

a) Comment faut-il connecter les feuilles conductrices pour obtenir un condensateur de capacité la plus grande possible ?

b) Évaluez alors **l'ordre de grandeur** de la capacité obtenue (il nous faut évaluer rapidement l'épaisseur de chaque feuille, puis rechercher dans un tableau de valeurs l'ordre de grandeur de la constante diélectrique du papier).

16. Il faut se garder d'appliquer la formule de Coulomb $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}$ pour calculer la force qui s'exerce entre les armatures d'un condensateur plan, supposées distantes de d, car la formule de Coulomb s'applique à deux charges ponctuelles. La formule correcte est $F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$, où S est la surface d'une armature.

a) Calculez la force qui s'exerce quand on applique une tension de 100 V à un condensateur plan de capacité $C = 10^{-9}$ F, pour une surface $S = 1$ dm^2.

b) Calculez aussi la force (fausse) qu'on obtiendrait par la formule de Coulomb.

17. On dispose de deux condensateurs portant l'indication 0,5 µF ± 5 %.
Cela signifie que la valeur exacte de la capacité peut s'écarter, au plus de 5 %, de la valeur indiquée.

a) Les deux condensateurs sont mis en parallèle. Quelle est la valeur approchée de la capacité ? De combien la valeur exacte peut-elle s'en écarter ?

b) Mêmes questions si les condensateurs sont mis en série.

18. Deux plaques conductrices parallèles constituent un condensateur plan dans l'air, de capacité C.

a) Le condensateur est chargé sous une tension U puis on l'isole du générateur qui a servi à cette opération. Ensuite, on introduit entre les armatures un diélectrique de permittivité relative ε_r.
Quelle est la nouvelle tension U' entre les armatures ?

b) Pour vérifier le résultat obtenu, est-il possible de mesurer U et U' au moyen de n'importe quel voltmètre ? Quelle précaution doit-on prendre ?

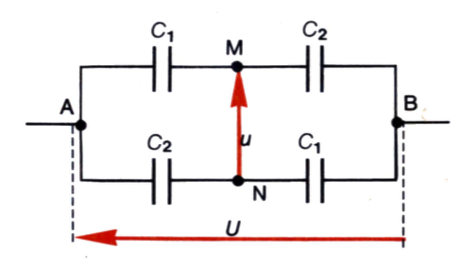
19. On réalise le montage de la figure ci-dessous. Les condensateurs étant initialement déchargés, on applique entre A et B une tension $U = V_A - V_B$.

a) Quelle est la tension $u = V_M - V_N$ qui apparaît entre les points M et N ? On l'exprimera en fonction du rapport $x = \frac{C_2}{C_1}$.

b) Représentez graphiquement la fonction $u(x)$, en limitant le domaine d'étude aux valeurs physiquement acceptables : $x \geqslant 0$.

On calculera en particulier u pour $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

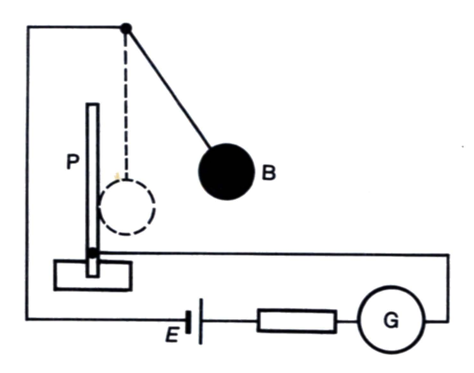
Réponse : **a)** $u = \frac{U(1-x)}{2(1+x)}$.



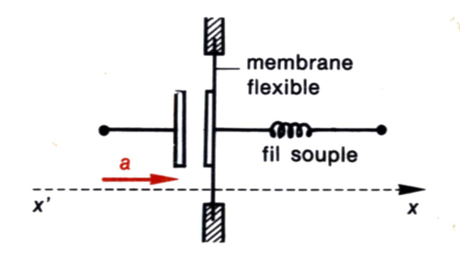
20. a) Un condensateur de 0,1 µF, chargé sous 2 volts, se décharge totalement dans un galvanomètre balistique. La déviation du spot est de 80 mm. Calculez la sensibilité du galvanomètre, en coulomb par millimètre.

b) Ce galvanomètre est introduit dans le montage représenté ci-dessous. Le circuit se ferme pendant un bref instant, lorsque la boule B choque la plaque P. On admet que l'intensité est constante pendant la durée τ du choc ; sa valeur est $I = \frac{E}{R}$, où R est la résistance du circuit.
Calculez la durée du choc, sachant que $E = 2$ V, $R = 10^3$ Ω et $x = 30$ mm.

Réponses : **a)** $s = 2{,}5 \cdot 10^{-9}$ C/mm,
b) $\tau = 3{,}75 \cdot 10^{-5}$ s.



21. Principe d'un accéléromètre.
Un condensateur plan est constitué par deux armatures de surface S baignant dans l'air. L'une est fixe et l'autre, mobile, est collée à une membrane flexible. En l'absence de toute autre force extérieure, la distance entre les armatures est e. Lorsqu'une force $\vec{f}$ s'exerce perpendiculairement à l'armature mobile, on observe un déplacement $x = \frac{f}{k}$ (k est la « raideur » de la membrane).



a) Exprimez la capacité C_x du condensateur en fonction de ε_0, S, e, k et f, en distinguant suivant le sens de la force $\vec{f}$.

b) Le dispositif est placé dans un véhicule qui subit une accélération $\vec{a}$ perpendiculaire aux armatures. On note a_x la mesure algébrique de $\vec{a}$ sur un axe dirigé de l'armature fixe vers l'armature mobile.
Celle-ci ayant une masse m, quelle est la force d'inertie qu'elle subit ? En déduire le déplacement de la membrane et la capacité du condensateur.

c) On remarque que la mesure de a_x se ramène à la mesure de la capacité C_x. Quelle est la plus grande accélération mesurable (avec $a_x > 0$) lorsque $e = 1$ mm et $\frac{k}{m} = 10^4\ \text{s}^{-2}$?

22. Un condensateur de capacité C est mis en série avec un ampèremètre et un générateur de tension carrée périodique, de fréquence N et d'amplitude E (la tension est alternativement E et zéro pendant chaque demi-période).
On admet que l'ampèremètre indique la valeur moyenne de l'intensité, quotient de la charge qui passe pendant une période par la durée d'une période.
En maintenant E constant, on fait varier N.
Sans faire aucun calcul, tracez l'allure de la courbe qui représente l'intensité lue en fonction de la fréquence (on admettra que la mise en charge et la décharge du condensateur ont toujours la même durée pratique τ).

23 Le dispositif schématisé ci-dessous permet de mettre en évidence l'énergie emmagasinée dans un condensateur. Lors de la décharge à travers une résistance R, la chaleur dégagée provoque la dilatation de l'air, à pression constante, et l'index de mercure se déplace dans un tube horizontal de section s.
Le condensateur est une « bouteille de Leyde » (voir exercice 7) de capacité 10^{-9} F, chargé sous 70 kV.

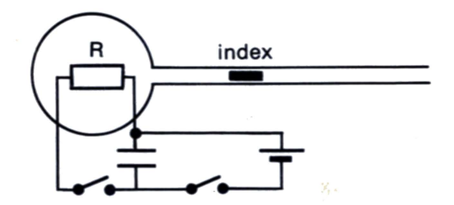
a) Quelle est la quantité de chaleur Q dégagée dans la résistance ?

b) Exprimez la variation de température ΔT en fonction de Q, de la capacité calorifique molaire à pression constante C_p et du nombre de mole de gaz n.

c) En déduire la variation de volume ΔV du gaz, en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits.
De quelle longueur l'index se déplace-t-il ?

On donne : $C_p = \frac{7}{2} R$, $P = 1$ bar et $s = 1\ \text{mm}^2$.

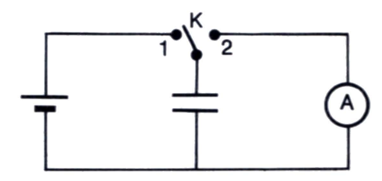
Réponses : **a)** $Q = 2{,}45$ J ;
b) $\Delta x = 7{,}0$ cm.



24 Dans le montage de la figure ci-dessous, $E = 100$ V et $C = 1\ \mu$F. Le commutateur K est fermé alternativement en position 1 puis en position 2 (l'opération peut être très rapide, réalisée par un dispositif électronique). On commute 50 fois par seconde en position 1 et 50 fois en position 2.

a) En admettant que la mise en charge et la décharge sont toutes deux complètes à chaque opération, déterminez l'intensité indiquée par l'ampèremètre (il affiche, en fait, la valeur moyenne de l'intensité).

b) Expliquez comment on peut s'assurer que la mise en charge et la décharge sont complètes, en agissant sur la fréquence de commutation.



25 Deux condensateurs de capacité C et C' ont été chargés sous des tensions différentes U et U'. On connecte entre elles les armatures positives, de même que les armatures négatives : la charge totale se répartit de telle sorte que la tension aux bornes soit la même pour les deux condensateurs.

a) Quelle est la tension commune à laquelle on aboutit ?

b) Exprimez l'énergie initiale et l'énergie finale. L'énergie s'est-elle conservée ? Interprétez.

8 Le champ magnétique.

I. Actions magnétiques.

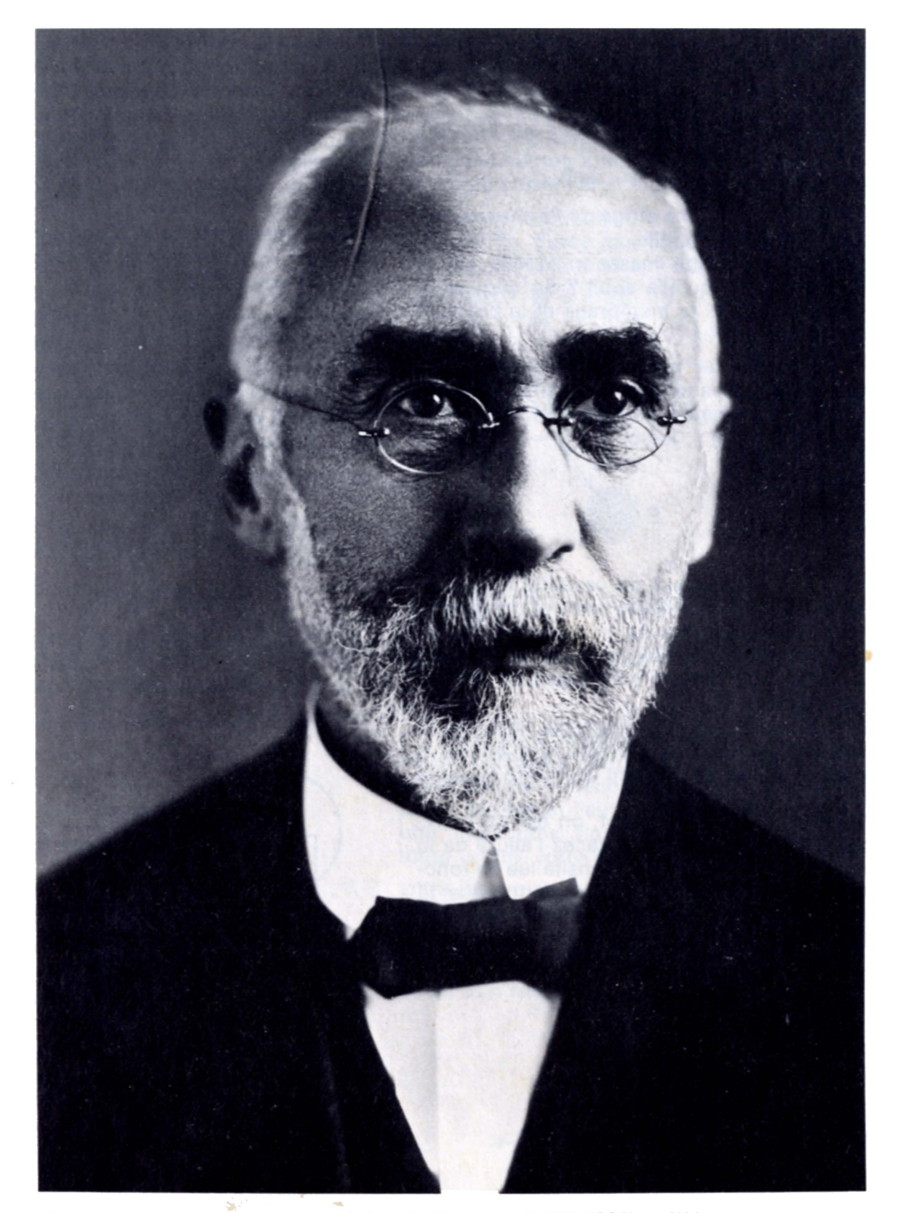
1. Mise en évidence.
2. Différents effets d'un champ magnétique.
3. Sources de champ magnétique.
4. Notions sur l'origine des phénomènes magnétiques.

II. Description quantitative du champ magnétique.

1. Caractère vectoriel du champ.
2. Unités et ordres de grandeurs.

III. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique.

1. Force magnétique.
2. Influence du champ magnétique sur la vitesse.
3. Étude d'un mouvement particulier.
4. Étude expérimentale.
5. Quelques applications pratiques.



Hendrick-Anton Lorentz, physicien hollandais (1853-1928), célèbre pour ses travaux dans les domaines de l'électrodynamique et de la relativité restreinte.

L'attraction d'une pièce de fer par un aimant est une expérience familière qui relève du magnétisme, branche de la physique illustrée par bien des phénomènes.
Après avoir défini le vecteur champ magnétique, nous examinerons en détail son action sur une charge ponctuelle en mouvement.

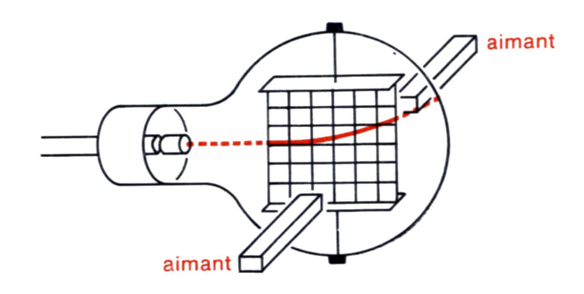
I. Actions magnétiques.

1. Mise en évidence.

a) Expérience.

Nous utilisons le dispositif représenté à la figure 1. Dans une grande ampoule où l'on a fait le vide, un « canon à électrons » permet d'obtenir un faisceau fin d'électrons. La trajectoire est visualisée sur une plaque verticale rendue fluorescente lorsqu'elle est frôlée par le faisceau. Les électrons peuvent être déviés au moyen d'un champ électrique, ainsi que vous l'avez étudié au chapitre 3.
A présent, considérons l'action d'un aimant.

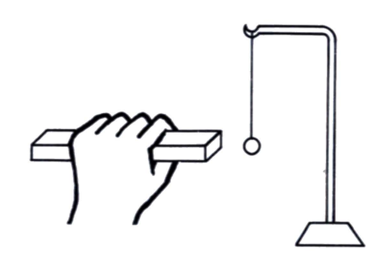
- Approchons un barreau aimanté (aimant droit) perpendiculairement au faisceau et à la plaque fluorescente. On observe que les électrons sont déviés : ils décrivent une courbe dans le plan de la plaque.
- Retournons l'aimant bout pour bout et approchons-le de l'ampoule. On observe que le faisceau est incurvé en sens contraire du précédent essai : si les électrons étaient déviés vers le haut, ils sont maintenant déviés vers le bas.
- Approchons un second aimant identique au premier en position symétrique, à l'arrière de l'ampoule. Selon le sens dans lequel ce deuxième aimant est tenu, le faisceau est incurvé davantage ou beaucoup moins. Dans ce dernier cas, il est même possible d'annuler la déviation des électrons pour une certaine position des aimants : tout se passe comme si leurs actions se compensaient exactement.



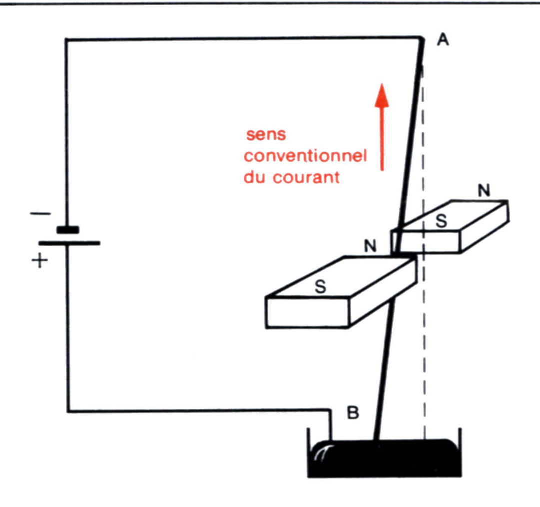
1. Déviation d'un faisceau d'électrons par action de deux aimants droits.

b) Interprétation.

- Les propriétés de l'aimant ne sont certainement pas dues à un champ électrique. Pour s'en convaincre, nous pouvons approcher l'aimant d'un pendule électroscope (figure 2) : aucun mouvement de la boule n'est observable.
- Nous appellerons **champ magnétique la région de l'espace** où l'action de l'aimant se fait sentir. On dit aussi que les électrons sont **soumis** au **champ magnétique** de l'aimant.



2. Un aimant n'attire pas un pendule électroscope : il ne crée pas de champ électrique.



3. Un aimant exerce une force sur une portion de circuit parcouru par un courant.

• Rappelons que la dénomination « champ électrique » désigne à la fois une région de l'espace et une grandeur vectorielle associée à cette région. Peut-on définir ici un vecteur champ magnétique ? Il semble que oui, d'après nos premières expériences : en effet, la déviation du faisceau électronique est orientée dans une direction précise, elle est plus ou moins importante suivant la distance de l'aimant, et elle peut être compensée par un deuxième aimant.
Nous pouvons conclure pour l'instant, que **le champ magnétique présente un caractère vectoriel.** Toutefois, la définition quantitative du vecteur associé ne peut pas encore être explicitée, car les renseignements dont nous disposons sont insuffisants.

2. Différents effets d'un champ magnétique.

a) Action sur un faisceau d'électrons : voir figure 1.

b) Action sur un circuit parcouru par un courant. (expérience de la figure 3). Ce type d'action sera étudié en détail au prochain chapitre.

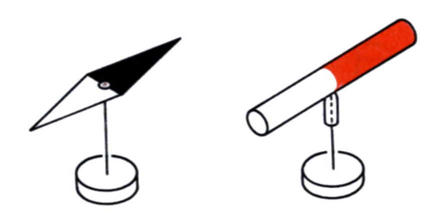
c) Action sur un aimant.
Deux aimants permanents exercent entre eux des actions. Le champ magnétique d'un aimant exerce une action sur un autre aimant. Nous utiliserons couramment dans la suite un petit aimant mobile autour d'un axe vertical : **aiguille aimantée** ou **bâtonnet aimanté** (figure 4).

d) Attraction du fer.
Cet effet est bien connu : par exemple, un aimant attire des clous.

3. Sources de champ magnétique.

Pour vérifier qu'un système crée un champ magnétique, nous pouvons maintenant utiliser une aiguille aimantée : il suffit de l'approcher du système et d'observer si, oui ou non, une action se produit. Ainsi, on met en évidence les sources de champ suivantes :

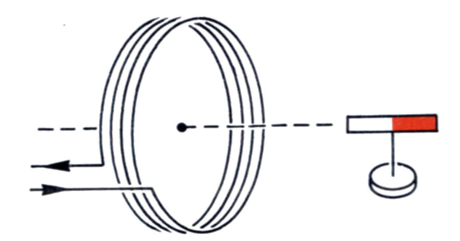
a) Un aimant.
Notons que les actions magnétiques exercées par un aimant (par exemple l'attraction de clous ou de limaille de fer) sont plus importantes au niveau de certaines régions de la matière aimantée qu'on appelle les régions polaires de l'aimant ou, plus communément, les pôles.



4. Aiguille aimantée et bâtonnet aimanté : ce sont de petits aimants mobiles autour d'un axe vertical.

b) Un circuit parcouru par un courant.

Lorsqu'un bâtonnet aimanté est approché d'une bobine parcourue par un courant, il s'oriente dans une direction précise qui dépend du point où l'on se place (figure 5) et de l'intensité du courant. L'action cesse lorsqu'on annule le courant.



5. Une bobine parcourue par un courant crée un champ magnétique ; on observe une action sur une aiguille aimantée, lorsqu'on établit le courant.

c) Un électro-aimant.

Une bobine enroulée sur un cylindre de fer doux constitue un électro-aimant (figure 6). On observe des effets nettement plus intenses qu'avec la bobine seule. Le barreau de fer se comporte comme un aimant, tant que le courant passe, puis cette propriété disparaît quand on fait cesser le courant.

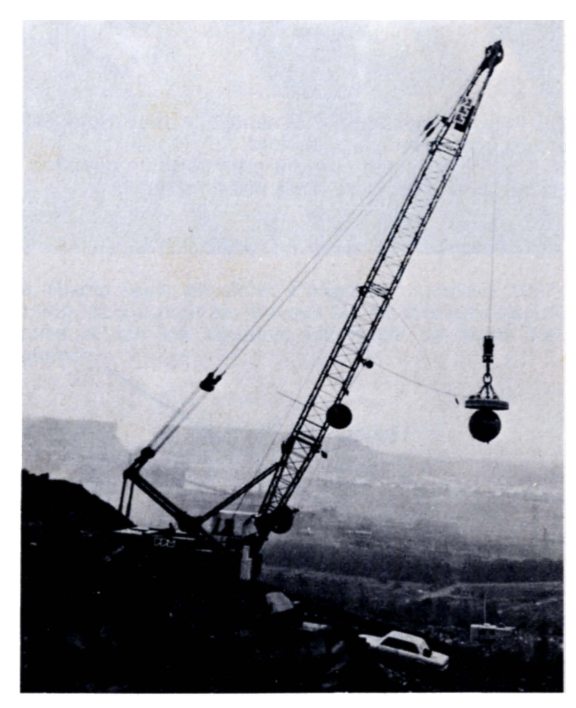
d) La Terre.

Placé loin de tout aimant et de tout circuit parcouru par un courant, un bâtonnet aimanté s'oriente dans la direction Sud-Nord. Cela prouve que la Terre exerce une action : s'il n'en était pas ainsi, le bâtonnet aimanté serait en équilibre indifférent et on pourrait l'arrêter dans n'importe quelle orientation.

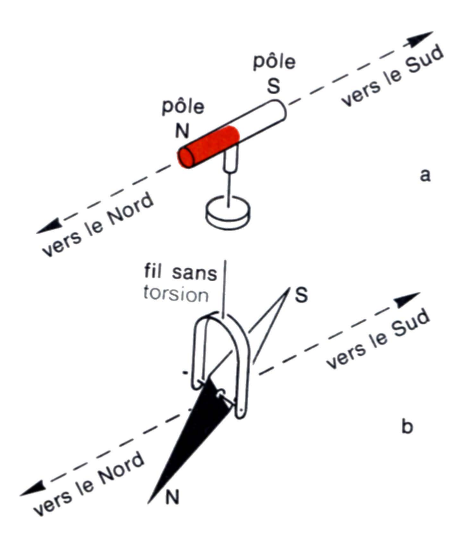
4. Notions sur l'origine des phénomènes magnétiques.

La diversité des phénomènes magnétiques est manifeste : ils font intervenir aussi bien des courants que des aimants, des faisceaux d'électrons, ou même la Terre toute entière. En réalité, si l'on y regarde de près, tous les objets magnétiques présentent quelque chose en commun : ils contiennent **des particules électrisées en mouvement.** C'est évident en ce qui concerne un faisceau d'électrons. On sait qu'un fil métallique parcouru par un courant contient aussi des électrons qui se déplacent. En ce qui concerne le champ magnétique des aimants, son origine est plus profonde : les physiciens ont montré qu'il provient du mouvement des particules constitutives des atomes, surtout des électrons qui tournent autour des noyaux atomiques. En ce qui concerne la Terre, son champ magnétique n'est pas expliqué de façon définitive, mais on ne doute pas qu'il s'explique en se ramenant aux types précédents : mouvements de convection entraînant des charges, aimantation locale de la matière au cœur de la Terre...

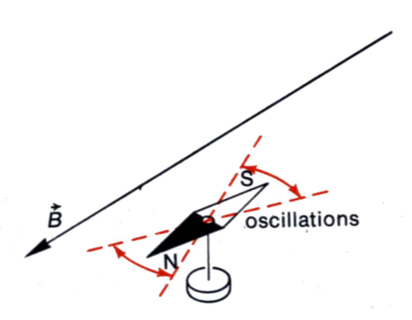
En conclusion, retenons que tout phénomène magnétique a pour origine l'interaction de charges en mouvement.



6. Un électro-aimant est susceptible d'exercer des actions magnétiques importantes.



7a. Pôles d'un bâtonnet aimanté : le pôle Nord est celui qui s'oriente vers le Nord.
b. Aiguille aimantée pouvant prendre toute direction. Sa position d'équilibre n'est pas horizontale.



8. La position d'équilibre indique la direction et le sens du champ magnétique $\vec{B}$. Le module de $\vec{B}$ est d'autant plus grand que les oscillations de l'aiguille sont plus rapides.

II. Description quantitative du champ magnétique.

1. Caractère vectoriel du champ.

a) Orientation d'une aiguille aimantée.

• Une aiguille aimantée, mobile autour d'un axe vertical, s'oriente dans le champ terrestre suivant la direction Sud-Nord. En distinguant par deux couleurs différentes (noir et rouge par exemple) les deux bouts de l'aiguille, on observe que c'est toujours la même extrémité qui se dirige vers le Nord : on l'appelle **pôle Nord de l'aiguille aimantée.** L'autre extrémité est appelée **pôle Sud** (figure 7a).

• **Expérience :** Une aiguille aimantée libre (figure 7b) qui peut s'orienter dans toutes les directions grâce à une suspension appropriée, s'immobilise dans le champ terrestre suivant une direction qui n'est pas horizontale. Elle se dispose pratiquement dans le plan vertical Nord-Sud ou plan méridien. En réalité, des observations précises montreraient un léger écart avec le plan méridien.

• Une aiguille aimantée libre, approchée d'un aimant prend une orientation qui n'est plus nécessairement dans le plan méridien : le champ magnétique de l'aimant se superpose à celui de la Terre. En remplaçant l'aimant par une bobine parcourue par un courant, on fait une observation analogue ; en réduisant l'intensité progressivement, on remarque que l'aiguille se rapproche du plan méridien, le champ terrestre devenant peu à peu prépondérant.

b) Oscillations d'une aiguille aimantée.

• Lorsqu'une aiguille aimantée horizontale est écartée de sa position d'équilibre, puis abandonnée, elle revient à l'équilibre à la suite de quelques oscillations plus ou moins rapides (figure 8).

• La fréquence des oscillations augmente lorsqu'on déplace l'aiguille en l'approchant d'un pôle d'aimant, c'est-à-dire vers une région où le champ magnétique a des effets plus importants. Nous pourrons dire que **les oscillations sont d'autant plus rapides que le champ magnétique est plus intense.**

c) Conclusion : vecteur champ magnétique.

L'orientation d'une aiguille aimantée et ses oscillations au voisinage de la position d'équilibre montrent que le champ magnétique a toutes les caractéristiques d'une grandeur vectorielle : **direction, sens et intensité.**

Nous noterons $\vec{B}$ le vecteur représentatif, appelé **vecteur champ magnétique.**

- **La direction** de $\vec{B}$ en un point est celle que prend une petite aiguille aimantée libre, placée en ce point.
- **Le sens** de $\vec{B}$ est celui du bipoint $\overrightarrow{SN}$ qui va du pôle Sud vers le pôle Nord de l'aiguille aimantée.
- **Le module** de $\vec{B}$ (noté B, sans flèche) est d'autant plus grand que l'aiguille aimantée oscille plus rapidement au voisinage de sa position d'équilibre. Nous apprendrons plus loin à mesurer sa valeur, dite « valeur du champ magnétique ».

2. Unité et ordres de grandeurs.

a) Unité.

Dans le Système International d'unités, la valeur d'un champ magnétique s'exprime en **tesla** (symbole T).

b) Champ magnétique terrestre.

Son orientation et sa valeur sont variables suivant l'endroit où l'on se place. A Paris, au niveau du sol, la composante horizontale $\vec{B}_H$ du champ magnétique terrestre a une valeur voisine de

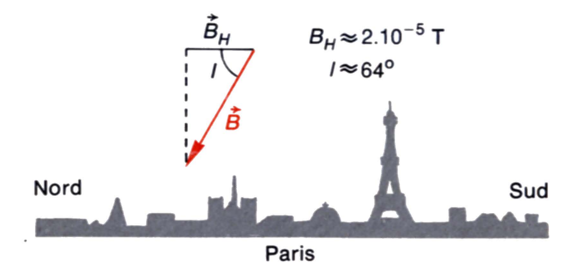
$$B_H \approx 2 \,.\, 10^{-5}\ \mathrm{T}\,.$$

Toujours à Paris, le vecteur $\vec{B}$ pointe vers le sol et fait un angle de 64° avec le plan horizontal. Cet angle, appelé **inclinaison** du champ terrestre, varie suivant le lieu. Sur l'ensemble de la France métropolitaine, la composante horizontale B_H ainsi que l'inclinaison restent voisines de leurs valeurs à Paris.

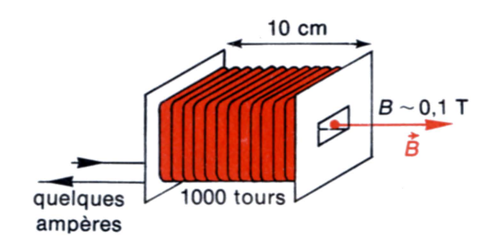
Notons aussi que $\vec{B}_H$ n'est pas exactement dirigé vers le Nord géographique, mais sa direction s'éloigne du méridien d'un angle petit (quelques degrés) appelé **déclinaison.** La valeur de cet angle varie avec le lieu et au cours du temps. Il faut la connaître pour pouvoir s'orienter avec précision au moyen d'une boussole. C'est pourquoi elle est indiquée sur les cartes détaillées (cartes IGN, par exemple).



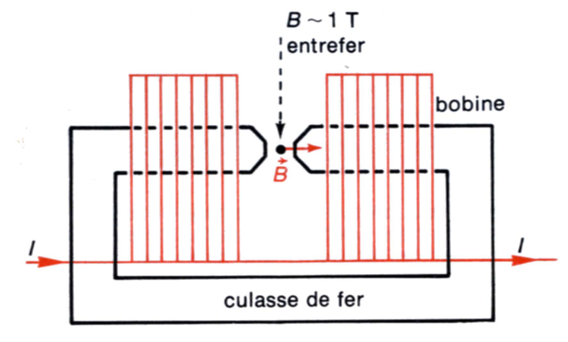
9. Nikola Tesla, physicien d'origine yougoslave (1857-1943), connu pour ses travaux sur les moteurs électriques et sur les courants alternatifs de haute fréquence.



10. Le champ magnétique terrestre, à Paris. Les valeurs indiquées restent approximativement valables sur tout le territoire de France métropolitaine.



11. Ordre de grandeur du champ magnétique créé par une bobine.



12. Un électro-aimant, construit pour obtenir un champ magnétique intense, dans un petit entrefer.

c) Autres exemples.

• **Circuit parcouru par un courant.** La valeur du champ magnétique croît avec l'intensité du courant, mais celle-ci est limitée en raison de l'effet Joule. Par exemple, avec une bobine constituée de 1 000 tours de fil conducteur enroulés autour d'un cylindre allongé, de 10 cm de longueur, on obtient à l'intérieur un champ de l'ordre de 0,1 T en faisant passer un courant de quelques ampères.

• **Électro-aimants.** Pour obtenir un champ important avec un électro-aimant, il faut que la **culasse** de fer se referme presque sur elle-même, en laissant juste un petit espace ouvert appelé **entrefer** (figure 12).
Dans ces conditions, on peut atteindre des champs magnétiques de l'ordre de quelques teslas dans l'entrefer.

• **Aimants permanents.** Les aimants permanents habituels, droits ou en fer à cheval, donnent des champs de l'ordre de 0,01 à 0,1 T. Dans de petits entrefers, on atteint des champs de l'ordre de 1 T avec les meilleurs aimants permanents : tel est le cas des aimants de hauts-parleurs, par exemple.

• **Bobines supraconductrices.** A très basse température (quelques kelvins), certains métaux et alliages deviennent supraconducteurs : leur résistivité s'annule et par suite il n'y a plus d'échauffement par effet Joule. On peut alors faire passer des courants très intenses et obtenir ainsi des champs magnétiques plus grands qu'avec les meilleurs électro-aimants.
Pour l'instant, l'usage des bobines supraconductrices est très limité, en raison de la difficulté d'entretenir de très basses températures.

Conclusion. Retenons que les valeurs des champs magnétiques sont le plus souvent inférieures à 1 tesla. Il est important de se rappeler les ordres de grandeurs pour vérifier des résultats d'exercices numériques : par exemple, si vous trouvez qu'un aimant permanent crée un champ de 100 teslas, vous vous êtes certainement trompé(e) dans vos calculs.

III. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique.

1. Force magnétique.

a) Expression vectorielle.

Lorsqu'une particule chargée est en mouvement dans un champ magnétique, elle est soumise à une force, dite **force magnétique.** Celle-ci a été étudiée en premier par le physicien hollandais Lorentz, c'est pourquoi on l'appelle parfois **force de Lorentz,** et son expression vectorielle est la **formule de Lorentz,** que nous admettrons :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

où q est la charge portée par la particule, $\vec{v}$ sa vitesse et $\vec{B}$ le champ magnétique appliqué.

Provisoirement, vous pouvez considérer que cette formule permet une définition précise de $\vec{B}$ (puisque $\vec{F}$, q et $\vec{v}$ sont des grandeurs déjà définies). Nous allons montrer qu'elle est bien en accord avec les résultats de l'expérience.

b) Caractéristique du vecteur force.

Le produit $q\vec{v}$ est un vecteur qui caractérise la particule, alors que $\vec{B}$ représente le champ. Explicitons les caractéristiques du produit vectoriel :

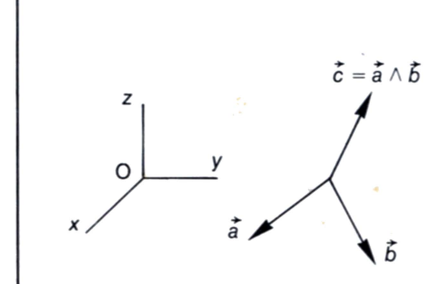
• **Direction :** $\vec{F}$ est perpendiculaire au plan défini par les directions de $\vec{v}$ et de $\vec{B}$.

• **Sens :** Le trièdre formé par $q\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{F}$ est direct. Cela signifie qu'il est de même sens que le trièdre de référence Oxyz habituel avec Ox vers l'avant de la feuille, Oy vers la droite et Oz vers le haut. En pratique le sens de $\vec{F}$ peut se trouver à partir d'une règle mnémotechnique comme la règle des trois doigts de la main droite, la règle de la main droite ou la règle de l'observateur d'Ampère (figure 14). Il faut vous habituer à l'une ou l'autre de ces règles.

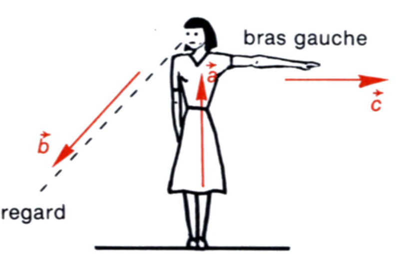
• **Module.** En notant α l'angle de $q\vec{v}$ avec $\vec{B}$, le module de la force vaut :

$$F = |q| vB \sin \alpha .$$

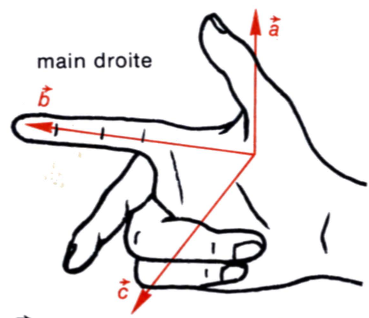
Remarquons, en particulier, que la force magnétique est nulle lorsque le champ est colinéaire à la vitesse ($\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$). Elle est maximale lorsque le champ est transversal au mouvement, c'est-à-dire perpendiculaire au vecteur vitesse $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$.



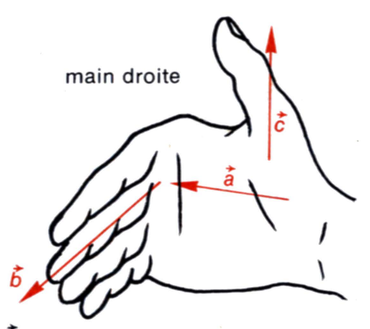
a) Le trièdre ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) a même sens que O*xyz*.



b) Un observateur disposé suivant $\vec{a}$ et regardant suivant $\vec{b}$; le vecteur $\vec{c}$ est indiqué par son bras gauche.



c) $\vec{a}$ est suivant le pouce de la main droite, et $\vec{b}$ suivant l'index ; alors $\vec{c}$ est suivant le majeur.



d) $\vec{a}$ est dans la paume de la main droite et $\vec{b}$ suivant les doigts. Alors $\vec{c}$ est indiqué par le pouce.

13. Différentes façons de trouver le sens du vecteur $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$. Il faut vous familiariser avec l'une des méthodes.

a) Le trièdre ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) a même sens que O*xyz*.

b) Un observateur disposé suivant $\vec{a}$ et regardant suivant $\vec{b}$; le vecteur $\vec{c}$ est indiqué par son bras gauche.

c) $\vec{a}$ est suivant le pouce de la main droite, et $\vec{b}$ suivant l'index ; alors $\vec{c}$ est suivant le majeur.

d) $\vec{a}$ est dans la paume de la main droite et $\vec{b}$ suivant les doigts. Alors $\vec{c}$ est indiqué par le pouce.

2. Influence du champ magnétique sur la vitesse.

Appliquons le **théorème de l'énergie cinétique.** Pendant un intervalle de temps dt, la particule se déplace de $\vec{dl} = \vec{v}dt$ et la variation d'énergie cinétique est égale au travail de la force magnétique :

$$dE_c = \vec{F} \cdot \vec{dl} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt\,.$$

Or, la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est à tout instant perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$. Il en résulte que le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{v}$ est nul, et par suite :

$$dE_c = 0 \quad \text{d'où} \quad E_c = \text{cte}\,.$$

L'énergie cinétique $\frac{1}{2} mv^2$ est constante, par suite la valeur de la vitesse ne varie pas.
En particulier, il est impossible de mettre en mouvement une particule électrisée par application d'un champ magnétique.
Toutefois, la force magnétique s'exerçant transversalement est susceptible d'incurver une trajectoire, et par suite **la direction du vecteur vitesse peut varier.**

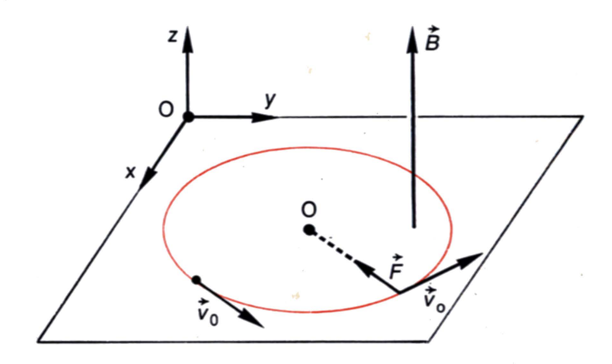
3. Étude d'un mouvement particulier.

Nous supposons que la particule électrisée, de charge q, se déplace dans **un champ uniforme,** c'est-à-dire dans une région de l'espace où le vecteur $\vec{B}$ est partout le même (même direction, même sens et même module). Le mouvement est étudié à partir d'un instant que nous prenons comme origine des dates ; on suppose de plus que **le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ à l'instant $t = 0$ est perpendiculaire à $\vec{B}$.**

a) Recherche de la trajectoire.

• Nous savons déjà que la vitesse v est constante : elle reste égale à v_0. Nous aurons donc déterminé complètement le mouvement lorsque nous connaîtrons la trajectoire.
A cette fin, appliquons la relation fondamentale de la dynamique du point matériel, sous la forme :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$



14. Trajectoire d'une particule électrisée dans un champ uniforme, avec $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ perpendiculaires.

où m est la masse de la particule et $\vec{a}$ le vecteur accélération. Par suite :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

• Soit Oz un axe de vecteur unitaire $\vec{k}$, parallèle à $\vec{B}$. La composante a_z de l'accélération est $a_z = \vec{a}\,.\,\vec{k}$. Or $\vec{a}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, et $\vec{k}$ lui est parallèle. Par suite $\vec{a}$ et $\vec{k}$ sont perpendiculaires entre eux et $a_z = 0$. Intégrons deux fois :

$$v_z = \text{cte} = v_{z0} = 0 \quad (\text{car } \vec{v}_0 \text{ est perpendiculaire à } \vec{B})$$

et par suite : $z = \text{cte}$.

Le mouvement a donc lieu dans un plan perpendiculaire à Oz : **la trajectoire est plane, dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$.**

• Le vecteur vitesse $\vec{v}$ restant perpendiculaire à $\vec{B}$, le module de l'accélération vaut :

$$a = \frac{|q|}{m}vB.$$

Écrivons les composantes normale et tangentielle de $\vec{a}$:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{|q|}{m}vB.$$

De cette dernière expression, nous tirons **le rayon de courbure**

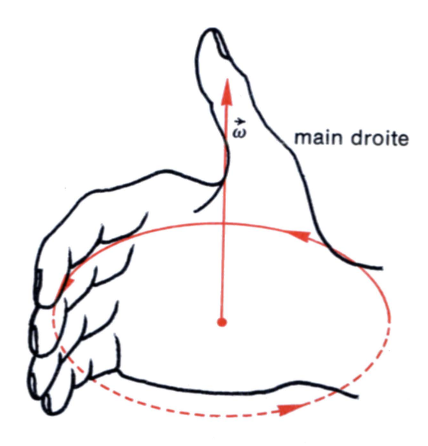
$$\boxed{R = \frac{mv}{|q|B}}.$$

Or, m, q, v et B ne varient pas ; il en résulte que le rayon de courbure est constant. La seule courbe qui présente cette propriété est le cercle : **la trajectoire est circulaire.**

Conclusion : Le mouvement est circulaire et uniforme, dans un plan perpendiculaire à la direction du champ magnétique.

b) Étude de la vitesse angulaire.

• **Rappel :** En classe de Première, nous avons appris à représenter la vitesse angulaire par un vecteur, $\vec{\omega}$, de module égal à ω, porté par l'axe du cercle, et dont le sens est défini par une règle arbitraire : celui de la progression d'une vis ou d'un tire-bouchon qui tourne dans le sens du mouvement. Il est possible aussi d'utiliser la main droite disposée suivant le cercle, l'extrémité des doigts indiquant le sens du mouvement ; le pouce indique alors le sens de $\vec{\omega}$ (figure 15).



15. Règle de la main droite pour trouver le sens du vecteur vitesse angulaire.

• **Comparaison du sens de $\vec{B}$ et du sens de $\vec{\omega}$.**
Supposons connus le sens de $\vec{B}$ et la trajectoire. La force magnétique $\vec{F}$ est centripète, puisqu'elle entretient un mouvement circulaire uniforme. Nous en déduisons le sens de $q\vec{v}$, tel que le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ soit direct, puis le sens du mouvement, ce qui nous permet de représenter le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ (figure 16).
Nous constatons que $\vec{\omega}$ **et $\vec{B}$ sont de même sens quand la charge est négative, et de sens contraires quand la charge est positive.**

• **Relation entre $\vec{\omega}$ et $\vec{B}$.**
Exprimons le module ω :

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m}.$$

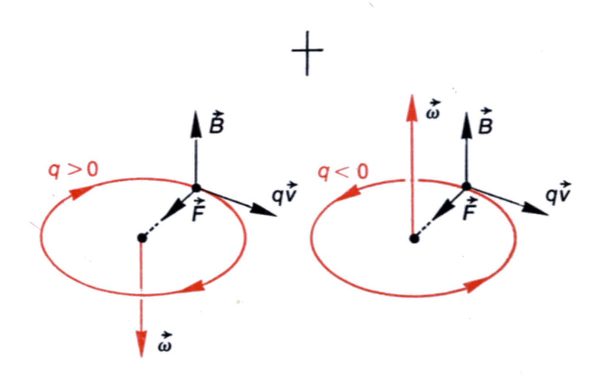
$\vec{\omega}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires. Leur sens est le même quand q est négatif. Par suite le vecteur $\vec{\omega}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}}.$$

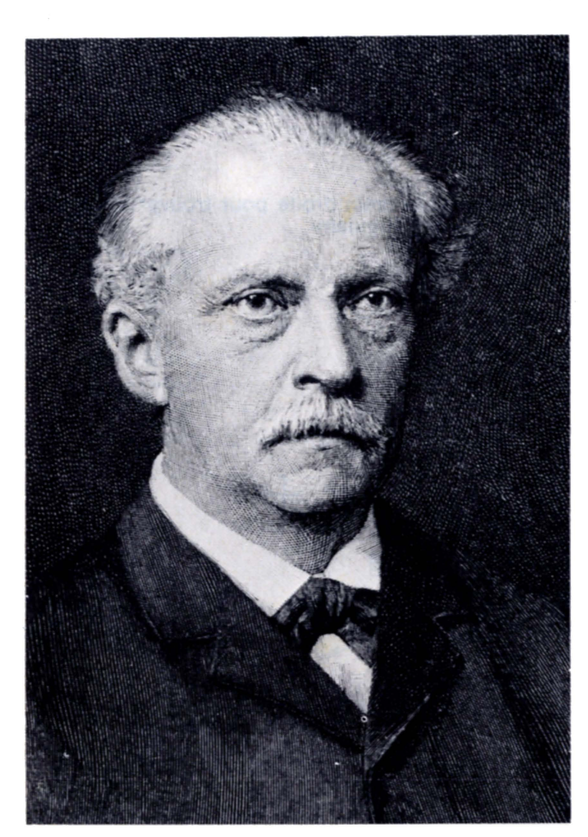
• **Remarque.** La relation précédente peut encore s'écrire :

$$\vec{B} = -\frac{m}{q}\vec{\omega}.$$

Sous cette forme, on peut la considérer comme **une relation de définition du vecteur champ magnétique $\vec{B}$,** à partir d'autres grandeurs déjà connues : masse, charge et vitesse angulaire.



16. Le sens de parcours dépend du signe de la charge. Lorsque $q > 0$, les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{\omega}$ sont de sens contraires.



17. Hermann von Helmholtz, physicien allemand (1821-1894), auteur de travaux importants en électricité, en optique et en acoustique.

4. Étude expérimentale.

a) Dispositif.

La figure 18 représente le dispositif utilisé.

• **Deux bobines de Helmholtz** servent à obtenir un champ uniforme. Il s'agit de bobines circulaires de rayon *R*, comportant le même nombre de spires et disposées à la distance *R* l'une de l'autre. Ces bobines sont parcourues par le même courant, dans le même sens. Elles créent un champ pratiquement uniforme dans un assez grand volume autour du centre du dispositif. Pour s'en assurer, on déplace une aiguille aimantée entre les bobines. Le champ est uniforme tant que l'aiguille garde la même direction et que ses petites oscillations restent de même période.

• **Une grande ampoule** contenant un **gaz sous faible pression** est munie d'un **canon à électrons.** Le faisceau électronique frappant les atomes du gaz raréfié provoque une luminescence. (L'effet lumineux étant faible, il est nécessaire de faire l'obscurité dans la salle).

• La vitesse des électrons peut être modifiée en agissant sur la tension accélératrice U du canon à électrons. Nous savons la calculer, par application du théorème de l'énergie cinétique.

$$\frac{1}{2} mv^2 = |q|\, U \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{\frac{2\,|q|\,U}{m}}.$$

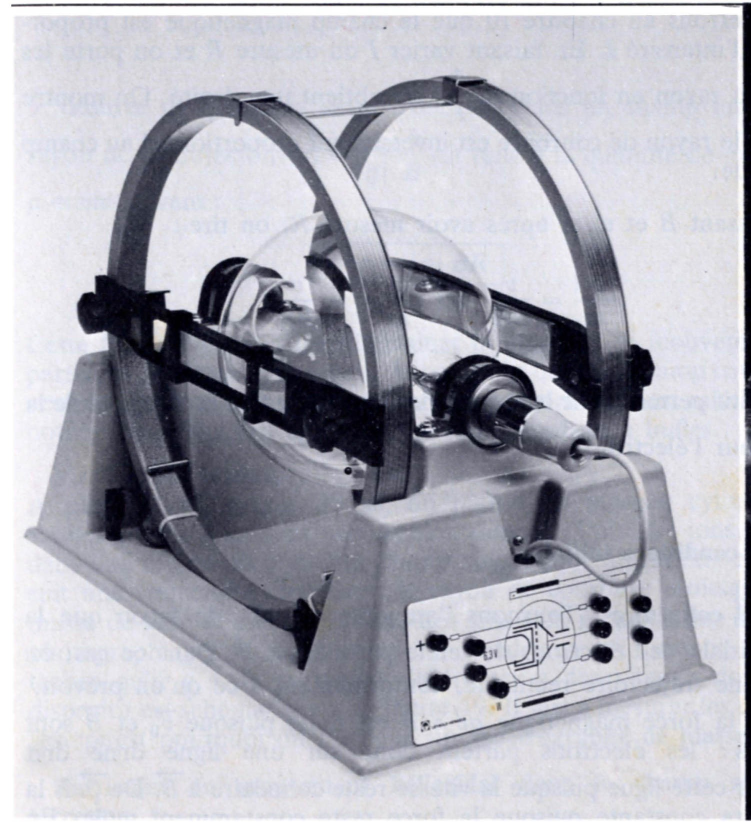
• Le champ magnétique B est obtenu en fonction de l'intensité du courant dans les bobines en utilisant une formule donnée par le constructeur du dispositif. On peut aussi le mesurer au moyen d'un appareil approprié.

b) Observations et mesures.

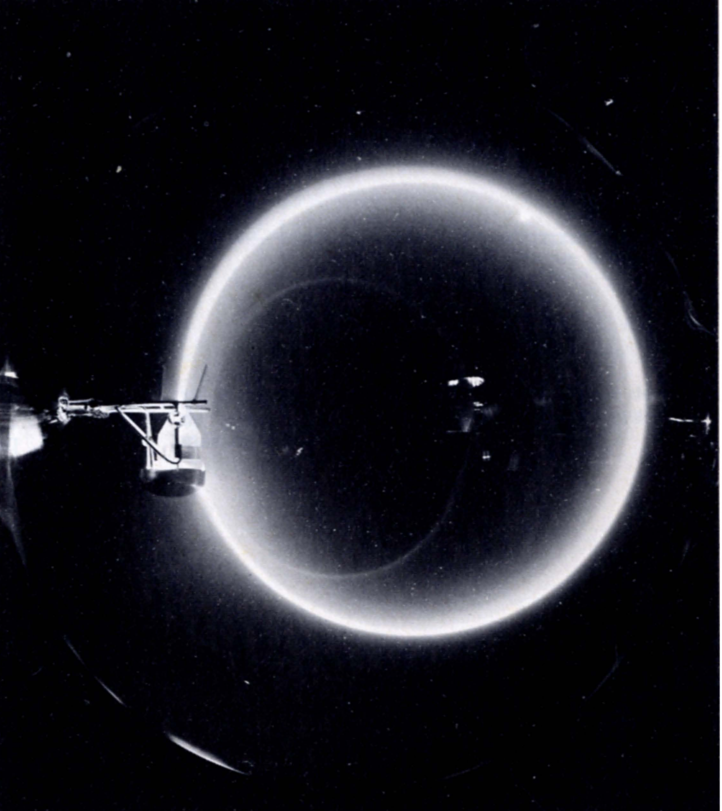
• L'ampoule est orientée de façon que la vitesse initiale des électrons soit perpendiculaire au champ magnétique. On observe bien une trajectoire circulaire dont le rayon varie lorsqu'on modifie la tension accélératrice U ou l'intensité de courant I dans les bobines.

• Le rayon R de la trajectoire est proportionnel à la vitesse, elle-même proportionnelle à $\sqrt{U}$: $R = \dfrac{m\ v}{|q|\,B}$,

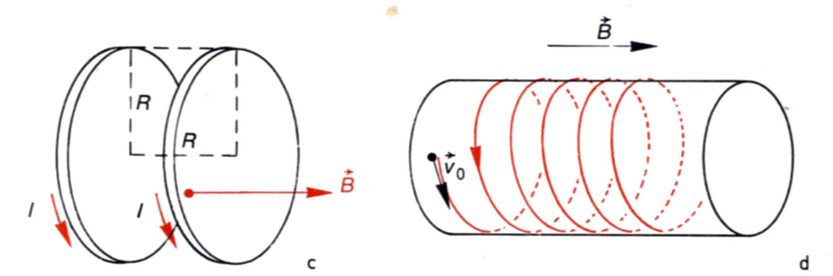
Il est facile de vérifier que R est proportionnel à $\sqrt{U}$: on fait plusieurs mesures, en portant sur un graphique les valeurs de R en fonction de $\sqrt{U}$; les points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine.



a



b



18. Étude expérimentale de la trajectoire des électrons dans un champ uniforme.

a) Dispositif expérimental.

b) Trajectoire circulaire (photographiée dans l'obscurité.

c) Bobines de Helmholtz : elles créent un champ uniforme dans un grand volume.

d) Trajectoire hélicoïdale, obtenue lorsque $\vec{B}$ et $\vec{v_0}$ ne sont pas perpendiculaires.

• Nous verrons au chapitre 10 que le champ magnétique est proportionnel à l'intensité I. En faisant varier I on mesure R et on porte les valeurs du rayon en fonction de $\frac{1}{I}$: on obtient une droite. On montre ainsi que le rayon de courbure est inversement proportionnel au champ magnétique.

• Connaissant B et v, et après avoir mesuré R, on tire :

$$\frac{|q|}{m} = \frac{v}{BR} \quad \text{ou} \quad \frac{q}{m} = -\frac{v}{BR}.$$

Le dispositif permet donc la mesure de $\frac{q}{m}$, quotient de la charge et de la masse, pour l'électron.

c) Autres conditions initiales.

• **$\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ colinéaires.** Tournons l'ampoule de 90°, de façon que la vitesse initiale des électrons devienne parallèle à $\vec{B}$. Dans ce cas, on observe une trajectoire rectiligne, conformément à ce qu'on prévoit. En effet, la force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est nulle puisque $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ sont colinéaires : les électrons partent donc sur une ligne droite, et restent sur cette ligne puisque la vitesse reste colinéaire à $\vec{B}$. De plus la vitesse sera constante puisque la force reste constamment nulle. En conclusion, **le mouvement est rectiligne et uniforme.**

• **$\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ de directions quelconques.** A partir de la position qui donne une trajectoire circulaire, tournons légèrement l'ampoule. On observe que les électrons décrivent **une hélice circulaire** (courbe analogue au filetage d'une vis).
En projection sur un plan perpendiculaire à $\vec{B}$, le mouvement est circulaire ; en projection sur une parallèle à $\vec{B}$, le mouvement est évidemment rectiligne.
Il est possible de démontrer que les deux mouvements projetés se font à vitesse constante : ils correspondent aux cas particuliers déjà étudiés : mouvement rectiligne uniforme parallèlement à $\vec{B}$ et mouvement circulaire uniforme dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$.

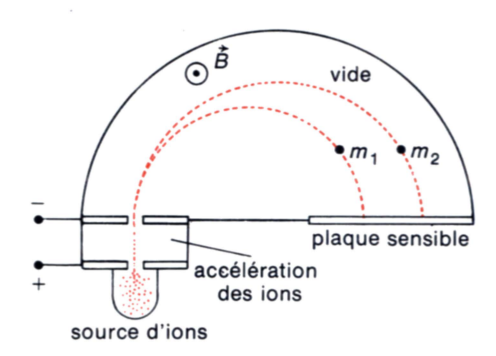
5. Quelques applications pratiques.

• **Mesures de quantités de mouvement.** Dans un champ uniforme, le rayon de la trajectoire $R = \frac{m}{|q|}\frac{v}{B}$ est relié à la quantité de mouvement $p = mv$ suivant :

$$\boxed{p = |q|\,BR}\ .$$

Cette formule permet de déterminer la quantité de mouvement d'une particule par mesure du rayon de courbure dans un champ connu. Nous verrons dans un chapitre ultérieur que cette mesure est mise en œuvre notamment dans des appareils appelés **chambres à bulles.**

• **Mesures de masses.**
A partir d'une source d'ions, on réalise un pinceau cylindrique en accélérant ces ions sous une tension donnée. Puis, les ions pénètrent dans une région où règne un champ magnétique uniforme : chaque ion suit une trajectoire circulaire, le rayon de courbure croissant avec la masse de l'ion et avec sa vitesse. Les ions sont recueillis sur une plaque photographique sensible après un demi-tour et forment autant de taches qu'il y a de particules différentes à des vitesses données. Le dispositif est schématisé sur la figure 19. Il sert à mesurer les masses des ions, c'est pourquoi on l'appelle un **spectrographe de masse.**



19. Schéma de principe d'un spectrographe de masse de type simple. Les ions sont séparés suivant leurs masses et leurs charges.

• **Particules en mouvement hélicoïdal dans le champ magnétique terrestre.**
Le Soleil émet en permanence un flux de particules chargées, appelé « vent solaire ». Lorsque ces particules parviennent au voisinage de la Terre avec des vitesses pas trop élevées, elles sont « piégées » par le champ magnétique terrestre et décrivent des trajectoires hélicoïdales. Leur concentration est particulièrement grande dans des zones encerclant la Terre, qu'on appelle **les ceintures de radiations.** Celles-ci ont été découvertes et étudiées grâce aux satellites artificiels.

• **Déviation d'un faisceau d'électrons.**
Dans le tube d'un **téléviseur,** un faisceau d'électrons forme sur l'écran un spot qui se déplace rapidement en parcourant un grand nombre de lignes. La déviation du faisceau n'est pas obtenu par un champ électrique, comme dans l'oscillographe, mais par des bobines qui créent un champ magnétique. Ce champ n'est d'ailleurs pas uniforme.

Exercice. Dans un spectrographe de masse, des ions de charge q sont accélérés par une tension U, leur vitesse initiale étant nulle. Ils pénètrent dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire à la vitesse acquise.

a) Déterminer la charge massique $\frac{q}{m}$ d'un ion en fonction de U, B et du rayon R de la trajectoire circulaire décrite dans le champ.
b) Application numérique : $B = 0,1$ T ; $U = 4\,800$ V ; $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Exprimez numériquement la relation entre la masse m (exprimée en unité de masse atomique : u) et le rayon de courbure R (exprimé en mètre). On donne 1 u. = $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg (masse voisine de celle d'un nucléon).
c) Les ions arrivent sur une plaque sensible après avoir décrit des demi-cercles. Deux taches se forment à 118,3 cm et à 121,7 cm de la fenêtre d'admission des ions. En déduire les masses des ions correspondants, exprimées en u. Les ions sont en fait des ions chlorure Cl^-. La masse atomique molaire du chlore étant 35,5 g, quelles sont les proportions isotopiques du chlore ?

Solution :

a) La vitesse d'un ion s'obtient par le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m v^2 = |q| U \quad \text{d'où} \quad v^2 = \frac{2|q|U}{m}.$$

Le rayon de courbure est $R = \dfrac{mv}{|q|B}$.

Éliminons v :

$$R^2 = \frac{m^2}{q^2 B^2}\left(\frac{2|q|U}{m}\right) = \frac{m}{|q|}\frac{2U}{B^2}$$

d'où :

$$\frac{|q|}{m} = \frac{2U}{B^2 R^2}.$$

b) De la formule précédente nous tirons :

$$\frac{m}{R^2} = \frac{|q|B^2}{2U} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4\,800} = 1,66 \cdot 10^{-25} \text{ SI}.$$

Par suite, lorsque m est exprimé en u. et R en mètre : $m = 100\,R^2$.

c) Les deux rayons valent :

$$R_1 = \frac{1,183}{2} = 0,591\,5 \text{ m} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{1,217}{2} = 0,608\,5 \text{ m}.$$

par suite les masses sont : $m_1 = 100(0,591\,5)^2 \simeq 35,0$ u. et
$m_2 = 100(0,608\,5)^2 \simeq 37,0$ u.

On est en présence des isotopes $^{35}_{17}Cl$ et $^{37}_{17}Cl$. D'après la valeur de la masse molaire atomique, on voit qu'il y a 75 % de chlore 35 et 25 % de chlore 35 dans le chlore naturel.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- Le pôle Nord d'une aiguille aimantée est l'extrémité qui se dirige vers le pôle ______ de la Terre.
- La position d'équilibre d'une aiguille aimantée libre de prendre n'importe quelle orientation indique la ______ et le ______ du champ magnétique. Le module du champ est d'autant plus ______ que les oscillations de l'aiguille sont plus rapides.
- L'unité de champ magnétique est le ______ (symbole ______). Les champs les plus élevés, obtenus avec des électro-aimants, sont de l'ordre de ______ .
- Une particule de charge q, mobile dans un champ magnétique $\vec{B}$ avec la vitesse $\vec{v}$, est soumise à la force $\vec{F}$ = ______ . Le trièdre formé par $q\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{F}$ est ______ , c'est-à-dire de même sens que le ______ de référence Oxyz. La direction de $\vec{F}$ est ______ à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.
- Lorsqu'une particule n'est soumise qu'à une force magnétique, son énergie cinétique est ______ .
- Dans un champ $\vec{B}$ uniforme, la trajectoire d'une particule chargée est un cercle, à condition que B soit ______ à la vitesse initiale. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, la trajectoire est une ______ ou une ______ .
- Dans le cas d'une trajectoire circulaire, le rayon R est relié à la charge q et aux valeurs de la quantité de mouvement p et du champ $\vec{B}$ par l'expression : R = ______. La vitesse angulaire a pour expression vectorielle $\vec{\omega}$ = ______ .

Applications immédiates.

1. A Paris, le champ magnétique terrestre $\vec{B}$ possède une composante horizontale $B_H = 2 . 10^{-5}$ T et l'inclinaison est de 64°. Quelle est la valeur de B ?

2. On appelle pôles magnétiques de la Terre les points du globe où le champ $\vec{B}$ est vertical. Ils ne sont pas confondus avec les pôles géographiques mais s'en éloignent de près de 20° en latitude ; l'un est au Nord du Canada, l'autre entre l'Australie et l'Antarctique ; leurs positions varient d'ailleurs lentement au cours du temps.
Expliquez le comportement d'une boussole emportée par une expédition polaire de l'Australie au pôle Sud géographique.

3. Au niveau du sol, sur l'Équateur, le champ magnétique terrestre est à peu près horizontal et vaut en moyenne : $3 . 10^{-5}$ T. Lorsqu'on s'élève verticalement, le champ magnétique varie approximativement en $1/r^3$, r étant la distance au centre de la Terre. Quel est le champ magnétique ressenti au niveau d'un satellite géostationnaire qui gravite à l'altitude de 35 700 km dans le plan équatorial ? (Rayon terrestre $R = 6\,370$ km).

4. Un voyageur qui traverse un désert a perdu sa piste à la suite d'une tempête de sable. Il sait qu'il est à 20 km d'une oasis, exactement au sud, et décide d'employer une boussole pour y parvenir. Ne connaissant pas la valeur de la déclinaison, il se fie à l'aiguille aimantée. Il parvient ainsi à 1 km à l'est de l'oasis lorsqu'il aperçoit les palmiers. « Ouf ! » dit-il, et il calcule sans retard la déclinaison magnétique, en prévision de sa prochaine étape.
Quelle valeur trouve-t-il ?

5. Un petit aimant droit, orienté dans la direction Est-Ouest, crée sur son axe un champ magnétique $\vec{B}_1$ porté par l'axe. En un point situé à trois mètres du centre de l'aimant, ce champ vaut $1{,}0 . 10^{-5}$ T. Le champ terrestre $\vec{B}_0$ se compose vectoriellement avec $\vec{B}_1$.

a) Quel est le champ magnétique B résultant ?

b) Comment s'oriente l'aiguille aimantée d'une boussole ? Quel angle fait-elle avec la direction Nord-Sud ?

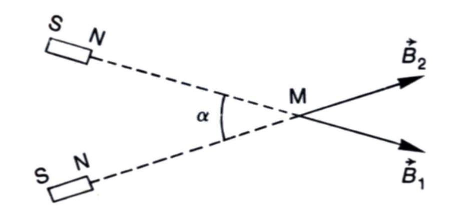
c) Que se passe-t-il quand on retourne l'aimant bout pour bout ?

6. Deux petits aimants, disposés comme le montre la figure ci-dessous, créent en un point M deux champs de même module : $B_1 = B_2$. Les axes des aimants font entre eux un angle α.

a) Quel est le champ résultant, en fonction de α ?

b) Quel est le nouveau champ résultant quand on a retourné bout pour bout l'un des aimants ?

c) Transformez les résultats précédents en supposant que α est petit (α^2, exprimé en rad² est petit devant 1). Application numérique : $B_1 = B_2 = 10^{-4}$ T et $\alpha = 0{,}1$ rad. Calculez les deux valeurs du champ résultant.



7. Un électron décrit un cercle dans un champ magnétique de 0,1 T. Évaluez le nombre de tours effectués en une seconde. On donne

$q_e = -1{,}6 . 10^{-19}$ C et $m_e = 0{,}91 . 10^{-30}$ kg.

8. Une particule α (noyau d'hélium ${}^4_2He^{2+}$) tourne sur un cercle dans un champ de 0,8 T.

a) Calculez la vitesse angulaire en rad . s⁻¹, sachant que la masse d'une particule est de 4 u. (unité de masse atomique) avec 1 u ≃ $1{,}67 . 10^{-27}$ kg. Quelle est la durée de 1 tour ?

b) Déterminez la vitesse des particules lorsque le rayon de la trajectoire est de 0,4 m.

Approfondissement.

Les exercices signalés par un carré rouge □ présentent une plus grande difficulté que les autres.

9. On se propose de comparer le poids $\vec{P}$ et la force magnétique $\vec{F}_m$ qui s'exercent sur un proton du rayonnement cosmique proche de l'atmosphère terrestre. Vous essaierez de retrouver les valeurs numériques nécessaires (ordres de grandeur) en faisant appel à votre mémoire.

a) Les protons cosmiques très énergétiques ($E_c > 10^9$ eV) ont une vitesse proche de la vitesse de la lumière.
Calculez le rapport P/F_m pour ces protons.

b) Quelle devrait être l'ordre de grandeur de la vitesse pour que le poids égale la force magnétique ?

Réponses : **a)** $\sim 3 . 10^{-16}$; **b)** ~ 3 mm/s.

10. Un noyau de radium 222 est susceptible de se désintégrer par radioactivité, en libérant une particule α, c'est-à-dire un noyau d'hélium ${}^4_2He$. Les particules α émises par un échantillon de radium sont envoyées dans un champ magnétique $B = 1$ T.
La vitesse initiale étant perpendiculaire au champ $\vec{B}$, on observe que la trajectoire circulaire a un rayon de 0,74 m.

a) Quelle est la quantité de mouvement des particules α ?

b) Quelle est leur énergie en MeV (méga-électron-volt), sachant que la masse de la particule est $m = 6{,}70 . 10^{-27}$ kg ?

Réponses : **a)** $1{,}18 . 10^{-19}$ kg . m . s⁻¹ ;
b) 6,6 MeV.

11. Pour étudier le mouvement d'un électron (masse m, charge q) dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, on rapporte l'espace à un repère orthonormé $Oxyz$. Le champ $\vec{B}$ est parallèle à Oy et de même sens. A l'instant $t = 0$, la vitesse $\vec{v}$ est dans le plan yOz et fait un angle aigu α avec Oy.

a) La trajectoire est hélicoïdale. Précisez les caractéristiques du cylindre sur lequel s'enroule l'hélice : direction de l'axe et rayon de la base (faites une figure).

b) Quelle est la vitesse des électrons, en projection sur l'axe du cylindre ?

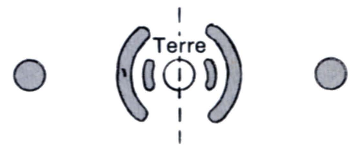
c) Combien de fois (N) l'hélice s'enroule-t-elle sur le cylindre en 1 seconde ?

12. a) L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, un proton ($q = + 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) a une vitesse $\vec{v}$ dont les composantes exprimées en m/s sont : 0 ; 10^6 ; 0.
La particule est mobile dans un champ magnétique dont les composantes (en tesla) sont : 0 ; 0 ; 10^{-3}.
Déterminez la force subie par l'électron.

b) Par suite d'une erreur d'ajustement, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{B}$ ont des directions légèrement différentes. Leurs composantes sont : $\vec{v}(10^4$; 10^6 ; 0) et $\vec{B}(10^{-5}$; 0 ; $10^{-3})$.
Déterminez les nouvelles composantes de la force magnétique, ainsi que son module.
De quel angle le vecteur force a-t-il tourné ?
(On rappelle qu'un produit vectoriel $\vec{C} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ a pour première composante $C_x = a_y b_z - a_z b_y$; les deux autres composantes s'en déduisent par une substitution circulaire des indices.)

Réponses : **a)** $F = 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ N, suivant Ox ;
b) $\vec{F}$ a tourné de 0,014 rad.

13. Ceintures de radiations.
La Terre présente trois ceintures de radiations représentées ci-dessous dans un plan méridien (il faut faire tourner la figure autour de l'axe polaire pour engendrer les ceintures complètes, qui présentent une symétrie de révolution autour de l'axe polaire.



ceintures de radiations

a) La ceinture la plus basse est entre 2 400 et 5 600 km de la Terre. Pour déterminer l'ordre de grandeur du champ magnétique qui y règne, on se place à 3 200 km d'altitude (soit un demi-rayon terrestre), on considère que le champ à la surface de la Terre est $3 \cdot 10^{-5}$ T et on admet que ce champ décroît en $1/r^3$, où r est la distance au centre du globe terrestre. Quel est le champ magnétique B calculé dans ces conditions ?

b) Cette ceinture contient essentiellement des protons et des électrons ; les énergies cinétiques sont de l'ordre de 10^8 eV pour les protons (masse $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg) et de 10^5 eV pour les électrons (masse $m_e \approx 0{,}91 \cdot 10^{-30}$ kg). Calculez les rayons des trajectoires circulaires décrites dans le champ magnétique par les protons et les électrons.

14. Déflection d'un faisceau d'électrons par un champ magnétique.
Un faisceau d'électrons de vitesse $\vec{v}$ pénètre en O dans un domaine (en grisé sur la figure ci-contre) où règne un champ $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{v}$. Ce domaine est, par exemple, l'entrefer d'un électro-aimant à pièces polaires rectangulaires ; le champ règne sur une longueur d et on néglige les « effets de bords » : la valeur du champ passe brutalement de B à O à la limite de l'entrefer.

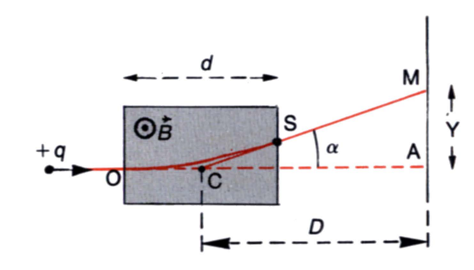
a) Le faisceau étant dévié vers le haut, quel est le sens de $\vec{B}$: (vers l'avant ou vers l'arrière de la feuille) ? Exprimez le rayon de courbure de la trajectoire.

b) La valeur de $\vec{B}$ n'étant pas très grande, le faisceau est peu dévié et sort du champ en un point S. Quel est l'angle de déviation α ?

c) Le faisceau frappe un écran en (M). Montrez que la droite SM passe à peu près par le centre C du champ.

d) L'écran est perpendiculaire à la direction initiale du faisceau et la distance de C à l'écran est D. Calculez la distance de déviation sur l'écran $Y = AM$.

e) Application numérique : le faisceau a été obtenu à partir d'un canon à électrons, avec une tension accélératrice de 1 000 V. Les distances sont $d = 2$ cm, $D = 20$ cm et $Y = 2$ cm. Calculez la valeur du champ magnétique.



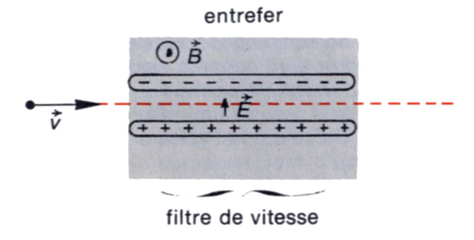
15. Un faisceau de particules électrisées pénètre avec une vitesse $\vec{v}$ entre deux plaques conductrices parallèles qui exercent un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et transversal.
On superpose un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire à $\vec{v}$ et $\vec{E}$ (figure page suivante).

a) Exprimez la résultante de la force électrique et de la force magnétique à l'instant où les particules pénètrent dans les deux champs.

A quelle condition le faisceau d'électrons traverse-t-il les deux champs en ligne droite ?

b) Quelle est la vitesse des particules qui traversent en ligne droite lorsque $B = 0{,}1$ T et $E = 100$ V/cm ?

c) Indiquez le sens de déviation des particules dont la vitesse est un peu plus grande, ou un peu plus petite.
Pourquoi le dispositif est-il appelé « filtre de vitesse » ?



16 Des particules de masse *m*, de charge *q* et de vitesse $\vec{v}$ pénètrent dans un spectrographe de masse où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{v}$ (figure ci-contre).

a) On suppose que la vitesse $\vec{v}$ à l'entrée dans le champ est orthogonale à la plaque sensible qui reçoit les particules. Déterminez la distance *D* entre le point d'impact M_0 et la fente d'entrée $F = D_0 = FM_0$.

b) La vitesse *v* étant remplacée par $v(1 + \varepsilon)$, le point d'impact est M_1. Calculez la distance $M_0 M_1$.

c) La vitesse est à nouveau *v*, mais le vecteur vitesse initiale n'est plus orthogonal à la plaque sensible : on suppose qu'il a tourné d'un angle petit α. Le point d'impact étant M_2, calculez la distance $M_0 M_2$.

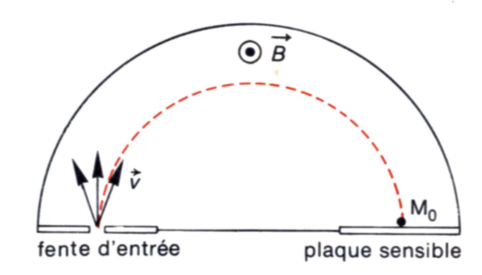
d) Au cours d'une expérience, des noyaux d'hélium ($^4_2He^{++}$) traversent la fente d'entrée avec des vitesses légèrement dispersées autour de la valeur moyenne *v*, et orientées dans un cône de demi-angle au sommet α, l'axe du cône étant perpendiculaire à la plaque sensible. On donne : $1{,}99 \times 10^6 < v(\text{m/s}) < 2{,}01 \times 10^6$

$$\alpha = 0{,}01 \text{ rad} \; ; \quad B = 0{,}1 \text{ T} \; ;$$

$$m = 4 \times 1{,}67 \, . \, 10^{-27} \text{ kg} \; ;$$

$$q = 2 \times 1{,}60 \, . \, 10^{-19} \text{ C}.$$

On observe sur la plaque sensible une tache. Déterminez la distance du centre de la tache à la fente d'entrée, puis déterminez la largeur de la tache.





Pierre Simon de Laplace, savant français (1749-1827), célèbre pour ses importants travaux touchant aussi bien à la physique qu'à l'astronomie et aux mathématiques.

9 Actions magnétiques sur les circuits.

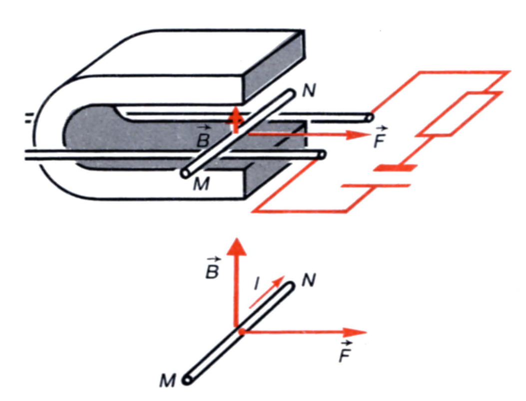
I. Force agissant sur un élément de circuit.

1. Loi de Laplace.
2. Application à la mesure d'un champ : balance de Cotton.
3. Applications diverses.
4. Effet Hall.

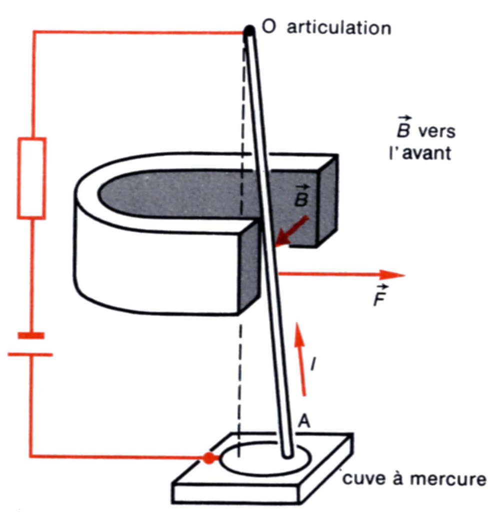
II. Couple agissant sur un circuit.

1. Circuit rectangulaire.
2. Généralisation : circuit de forme quelconque.
3. Comparaison d'un circuit avec un aimant.
4. Action d'un champ non uniforme.

Un champ magnétique est susceptible d'agir sur les charges mobiles dans un circuit parcouru par un courant. Il en résulte la possibilité de déplacer des éléments de circuits. Ce phénomène trouve de nombreuses applications, notamment dans les moteurs, les haut-parleurs, etc...



1. La barre MN repose sur deux rails horizontaux. Plongée dans le champ magnétique $\vec{B}$, elle se met à rouler lorsqu'on fait passer un courant.



2. La barre OA est articulée en O. Plongée dans le champ $\vec{B}$, elle est déviée lorsqu'on établit le courant I.

I. Force agissant sur un élément de circuit.

1. Loi de Laplace.

a) Expériences.

Les expériences schématisées aux figures 1 et 2 montrent des éléments de circuits qui se déplacent dans des champs magnétiques.
Observations : Les forces disparaissent lorsqu'on fait cesser le courant ou lorsqu'on éloigne l'aimant qui crée le champ magnétique. Elles sont perpendiculaires au champ magnétique et au brin de circuit déplacé. De plus, elles s'inversent lorsqu'on inverse le sens du courant ou le sens du champ magnétique.

b) Expression de la force magnétique.

Considérons une portion MN d'un fil conducteur, par exemple un fil métallique, parcouru par un courant (figure 3). Lorsqu'un champ magnétique $\vec{B}$ est appliqué, chaque électron mobile, de charge q, est soumis à la force magnétique :

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B},$$

$\vec{v}$ étant la vitesse des électrons dans le fil. Tous les électrons du brin MN ayant la même vitesse sont soumis à la même force ; leur nombre étant n, la force totale est :

$$\vec{F} = n\vec{f} = nq\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Les paramètres n et $\vec{v}$ n'étant pas connus, relions-les à l'intensité I du courant et à la longueur l du brin de fil ($\overrightarrow{MN} = \vec{l}$). Le temps nécessaire pour que tous les électrons mobiles dans le brin sortent en M est $\Delta t = \frac{l}{v}$ et leur charge totale est $Q = nq$; l'intensité s'écrit donc :

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{nqv}{l}.$$

On peut donc identifier nqv avec Il, ou vectoriellement $nq\vec{v}$ avec $I\vec{l}$, en notant $\vec{l}$ le vecteur $\overrightarrow{MN}$.
Par suite, la force magnétique qui agit sur le brin $\vec{l}$ vaut :

$$\boxed{\vec{F} = I\,\vec{l} \wedge \vec{B}}.$$

Cette expression constitue la **loi de Laplace.**

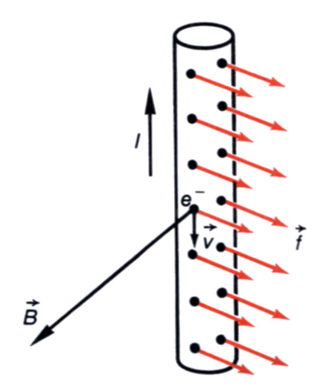
• **Remarque :** Lorsque le brin de fil est maintenu immobile, les cations du réseau métallique sont fixes et ne subissent donc pas de forces magnétiques. Pourtant, l'expérience montre que les électrons ne sont pas extraits du conducteur. Il faut donc admettre que les électrons subissent de la part du réseau la force $-\vec{F}$; inversement, ils exercent sur le réseau l'action réciproque, c'est-à-dire une force $\vec{F}$. Tout se passe comme si l'ensemble du brin conducteur (cations + électrons) était soumis à la force $\vec{F}$.

• **Caractéristiques de la force.** La force de Laplace s'exprime par un produit vectoriel. **Sa direction** est perpendiculaire au champ $\vec{B}$ et au vecteur $\vec{l}$, c'est-à-dire au brin de fil. **Son sens** est tel que le trièdre $I\,\vec{l}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ soit direct (comme le trièdre de référence Oxyz) ; on le retrouve par l'un des moyens mnémotechniques illustrés à la page 136. Enfin, le **module** de $\vec{F}$ est

$$\boxed{F = B\,I\,l\,\sin\alpha}$$

où α est l'angle formé par $\vec{B}$ et le brin de fil.

• **Vérifications.** En revenant sur les expériences 1 et 2, on vérifie aisément une partie des caractéristiques de la force magnétique $\vec{F}$: direction et sens, augmentation de son module F avec I, diminution de F lorsque le champ n'est plus orthogonal au fil (il suffit d'incliner l'aimant).



3. Dans un brin de fil conducteur, chaque électron mobile est soumis à une force magnétique $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. La loi de Laplace exprime la somme vectorielle de ces forces :

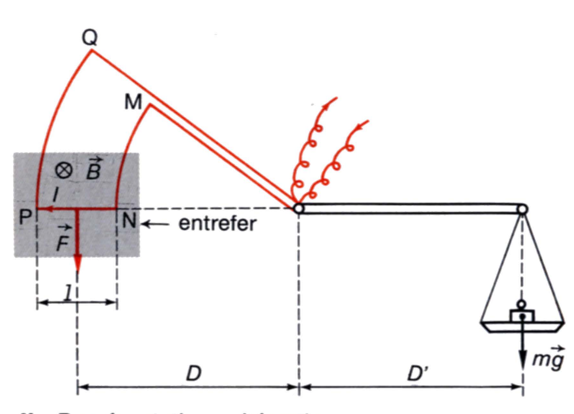
$$\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

Expression de la loi de Laplace :

$$\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$$

2. Application à la mesure d'un champ : balance de Cotton.

4a. Balance de Cotton.



4b. Représentation schématique.

• **Description** (figures 4a et b) :
L'un des bras de fléau porte un fil conducteur (OMNPQO) qui présente des parties rectilignes OM, NP et QO et deux brins MN et PQ formés de deux arcs de cercles centrés en O. L'autre bras de fléau supporte un plateau susceptible de recevoir des masses marquées. L'axe de rotation est l'horizontale passant par O et perpendiculaire au plan vertical qui contient le fil conducteur.
Le brin de conducteur PN est disposé perpendiculairement au champ magnétique à mesurer.
Sur la figure, on a représenté en grisé le domaine d'action du champ : c'est, par exemple, l'entrefer d'un électro-aimant.

• **Expression de l'équilibre.**
Nous supposons que la balance est en équilibre lorsque aucun champ n'est appliqué et lorsque le plateau de droite est vide.

Appliquons le champ $\vec{B}$ et faisons passer un courant d'intensité I dans le fil conducteur. Le champ exerce alors des forces magnétiques qui se calculent par la loi de Laplace.
Le brin PN, de longueur l, est perpendiculaire au champ : il est donc soumis à une force $\vec{F}$ de module $F = BIl$, dirigée vers le bas lorsque $\vec{B}$ et I sont orientés comme l'indique la figure. L'effet de cette force est déterminé par son moment par rapport à O, de valeur $\mathcal{M} = BIlD$.
Sur les brins PQ et MN s'exercent aussi des forces magnétiques. La loi de Laplace s'appliquant à une portion de conducteur rectiligne, il faut décomposer ici les brins circulaires en éléments de longueurs très petits, assimilables à de très petits segments de droites.
Sur un tel élément, de longueur dl, s'applique une force de module $BIdl$, orientée perpendiculairement à B et à l'élément de circuit. Cette force élémentaire est donc dirigée vers O et ainsi, son moment par rapport à l'axe de rotation est nul : elle est sans effet sur la rotation du fléau. Il en est de même de toutes les forces élémentaires qui s'exercent le long des brins MN et PQ.
Les actions magnétiques sont donc caractérisées uniquement par le moment $\mathcal{M} = BIlD$ qui tend à faire basculer vers le bas le bras de fléau gauche.

Pour équilibrer la balance, il faut ajouter dans le plateau de droite une masse m. Le moment de son poids est, en valeur absolue :

$$\mathcal{M}' = mgD' .$$

La condition d'équilibre du fléau mobile autour de l'axe est la suivante : la somme algébrique des moments doit être nulle ; les deux moments doivent donc avoir même valeur absolue :

$$BIlD = mgD' .$$

Le champ B se calcule donc par la formule :

$$B = \frac{mg}{Il} \frac{D'}{D} .$$

Le plus souvent, le constructeur de la balance réalise l'égalité de D et D', de sorte que le calcul de B se simplifie :

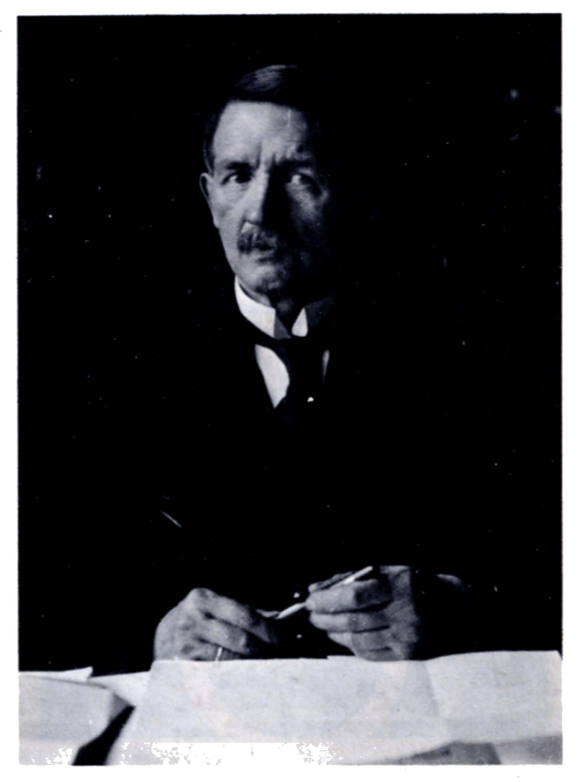
$$B = \frac{mg}{Il} .$$

• **Ordre de grandeur :** Prenons $l = 2$ cm, $I = 1$ A, $g = 9{,}80$ m . s^{-2} et $m = 1$ g. On a alors :

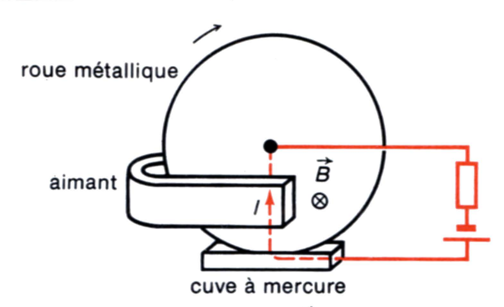
$$B = \frac{10^{-3} \times 9{,}80}{1 \times 2 \,.\, 10^{-2}} = 0{,}49 \text{ T} .$$

Si le champ était 1 000 fois plus faible, on ne pourrait guère augmenter I, et il faudrait donc une masse m de l'ordre de 1 mg.
Le plus souvent, la sensibilité de la balance n'atteint pas cette valeur. Nous voyons donc que la méthode n'est pas utilisable pour mesurer des champs très faibles. Elle a d'ailleurs été conçue par Aimé Cotton précisément pour mesurer le champ dans un gros électro-aimant.

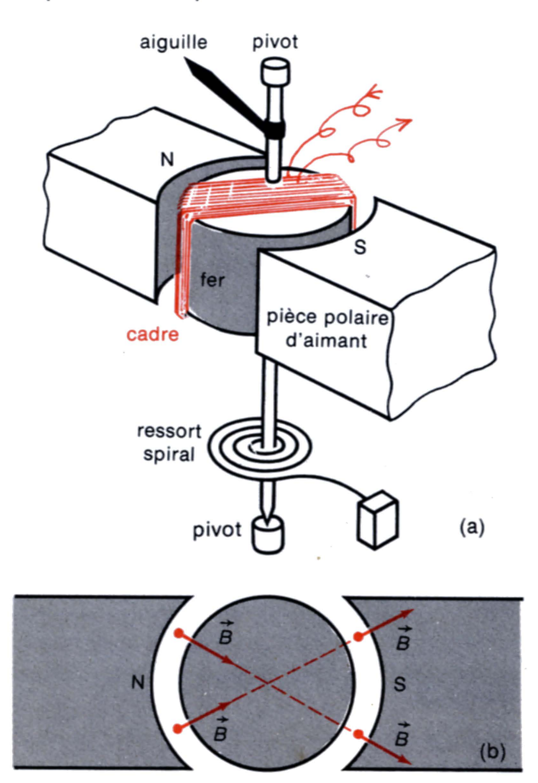
Remarque : Notons que pour obtenir l'équilibre, il sera plus facile d'agir sur l'intensité avec un rhéostat, plutôt que d'utiliser des masses marquées divisionnaires pour ajuster m.



Aimé Cotton, physicien français (1869-1951), connu pour ses travaux concernant les champs magnétiques intenses.



5. Roue de Barlow. Le champ $\vec{B}$ exerce une force qui fait tourner la roue. (Vérifiez que le sens de rotation indiqué est correct).



6. Schéma d'un micro-ampèremètre. **a.** Les pièces polaires de l'aimant et l'équipage mobile. **b.** Vue de l'entrefer en coupe. Le champ $\vec{B}$ passe toujours par l'axe : on dit qu'il est radial.

3. Applications diverses.

La loi de Laplace trouve de nombreuses applications dans divers dispositifs pratiques.

a) Moteurs.

• L'expérience de la figure 5 présente un archétype de moteur à courant continu, appelé roue de Barlow. Le circuit électrique se ferme dans la cuve à mercure et dans la plaque métallique circulaire. Le courant qui passe le long d'un rayon de la roue est soumis au champ magnétique créé par l'aimant, et la roue se met à tourner. Ensuite, un rayon est remplacé par un autre et la force de Laplace s'applique en permanence. La roue atteint une vitesse angulaire limite lorsque le moment des forces de frottement est exactement opposé au moment des forces magnétiques.

• Tous les moteurs fonctionnent suivant un principe comparable : les enroulements conducteurs solidaires du rotor sont mis en mouvement par un champ magnétique créé par le stator, constitué par un aimant permanent ou un électro-aimant. Dans les moteurs à courant alternatif, le champ magnétique varie : dans certains cas, sa direction est constante en tout point, mais sa mesure algébrique (sur un axe parallèle à sa direction) varie sinusoïdalement à la fréquence de 50 Hz ; dans d'autres types de moteurs, le stator crée un champ magnétique dont la direction tourne à la vitesse angulaire de 50 tours/s.

b) Appareils de mesures.

A la figure 6, on représente l'élément de base d'un **microampèremètre** à cadre mobile : une bobine rectangulaire (cadre), parcourue par le courant à mesurer, est soumise au champ magnétique d'un aimant permanent. Le cadre, solidaire d'une aiguille, est mobile autour d'un axe vertical. Il s'exerce un couple de rappel par un ressort spiral et un équilibre s'établit lorsque le moment des forces magnétiques est exactement opposé au moment du couple de rappel.
La forme cylindrique des pièces polaires de l'aimant et la présence d'un cylindre de fer fixe à l'intérieur du cadre font que le champ $\vec{B}$ le long des brins verticaux passe par l'axe de rotation : on dit qu'il est radial. Il exerce donc des forces orthogonales à l'axe et perpendiculaires au cadre. Les brins horizontaux sont en dehors de l'entrefer ; les forces qu'ils subissent sont d'effet négligeable.

Exercice.
a) Une spire rectangulaire (côté a et b) du cadre d'un microampèremètre est parcourue par un courant d'intensité I. Le champ magnétique $\vec{B}$ n'agit que sur les brins verticaux, de plus, il est toujours dans le plan du cadre, parallèle aux brins horizontaux ; Montrer que $\vec{B}$ exerce un couple de forces et calculer le moment de ce couple.
b) Le cadre est constitué de N spires. Le ressort spiral exerce un couple de rappel de valeur $C\theta$ lorsque le déplacement angulaire est θ.
En déduire l'expression du rapport $s = \frac{\theta}{I}$, qui représente la sensibilité de l'appareil, en radian par ampère.
c) Application numérique : l'aiguille tourne de 60° pour une intensité de 500 µA ; le cadre est constitué de 500 spires rectangulaires d'aire 3 cm² et la constante de rappel du ressort spiral vaut $C = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ N . m . rad⁻¹. Calculez le champ magnétique dans l'entrefer.
Solution.
a) D'après la loi de Laplace, la force qui s'exerce sur chaque brin vertical vaut : $f = BIa$. Les deux vecteurs forces sont orthogonaux au cadre et de sens contraires. Ils constituent donc un couple dont le moment est, en valeur absolue :

$$fb = BIab\,.$$

b) Pour N spires, le moment des forces magnétiques est multiplié par N :

$$\Gamma = NBIab\,.$$

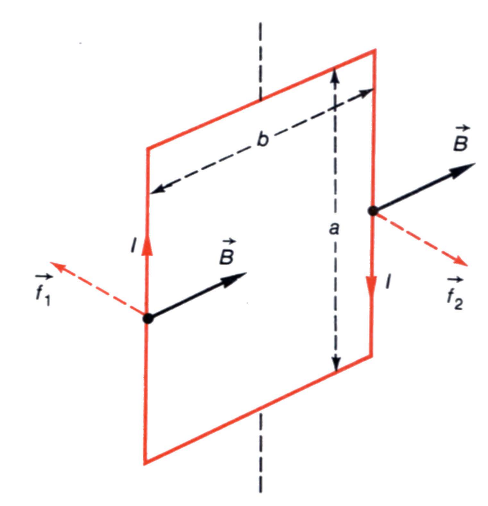
L'équilibre a lieu lorsque le couple de rappel et le couple magnétique ont des moments égaux en valeur absolue :

$NBIab = C\theta$ d'où la sensibilité $s = \frac{\theta}{I} = \frac{NBab}{C}$.

c) De l'équation d'équilibre, nous tirons $B = \frac{C\theta}{NIab}$

$$B = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-5} \times \frac{\pi}{3}}{500 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 3 \cdot 10^{-4}} \approx 0{,}21 \text{ T}\,.$$

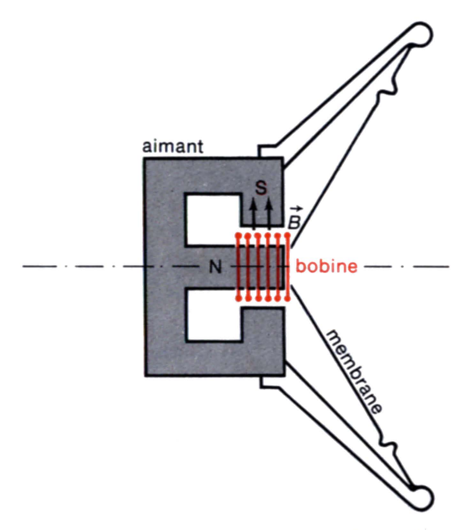
L'ordre de grandeur du champ est conforme à ce qu'on peut attendre d'un aimant permanent.



7. Forces qui s'exercent sur une spire, dans le cadre d'un micro-ampèremètre.

c) Haut-parleurs.

La figure 8 représente un haut-parleur électrodynamique. Le dispositif présente la symétrie de révolution, et le schéma est fait dans un plan passant par l'axe de révolution. Le champ magnétique est radial. Son support passe par l'axe, qu'il coupe à angle droit.
Quand la bobine est parcourue par un courant I, la force qui s'exerce sur un petit élément $\vec{dl}$ est $\vec{df} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}$: elle est perpendiculaire à l'élément $\vec{dl}$ et à $\vec{B}$; elle est donc parallèle à l'axe. Lorsque l'intensité I varie sinusoïdalement, la bobine se déplace et avec elle la membrane, qui émet alors un son de même fréquence que le courant.



8. Schéma d'un haut-parleur électrodynamique (type de haut-parleur le plus répandu).

4. Effet Hall.

a) Définition.

Jusqu'à présent, nous avons considéré l'action d'un champ magnétique sur un élément de circuit considéré comme un tout (ions fixes et charges en mouvement). Pourtant, à l'intérieur d'un élément de circuit, **l'application d'un champ magnétique modifie l'écoulement des charges mobiles par rapport aux ions fixes : ce phénomène s'appelle l'effet Hall.** Ce phénomène est très général : non seulement il apparaît chaque fois que l'on applique un champ magnétique à un circuit parcouru par un courant, mais il se manifeste aussi en raison du champ magnétique créé par le circuit lui-même. Toute étude rigoureuse du mouvement des charges dans un conducteur devrait en tenir compte, mais dans de nombreuses circonstances, cet effet passe inaperçu à cause de sa faible intensité.

b) Étude de l'effet Hall dans un cas simple.

L'étude quantitative peut être faite facilement pour un élément de circuit en forme de ruban de section rectangulaire (largeur l et épaisseur h). Le champ magnétique $\vec{B}$ appliqué est perpendiculaire au ruban, comme l'indique la figure 9. Nous supposerons que les charges mobiles sont des électrons (charge $q = -e$) qui se déplacent tous parallèlement aux bords du ruban avec la même vitesse v. Le champ magnétique exerce sur chaque électron une force $\vec{f_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, de module evB, dirigée comme le montre la figure. Sous l'action de telles forces, le bord arrière du ruban doit se charger négativement et le bord avant positivement. Les charges ainsi apparues créent un champ $\vec{E_H}$, ou champ de Hall, transversal, qui exerce sur chaque électron la force $\vec{f_e} = q\vec{E_H}$, de module eE_H. En régime permanent, les électrons mobiles se déplacent en ligne droite à vitesse constante. Les forces $\vec{f_m}$ et $\vec{f_e}$ se compensent donc exactement :

$$\vec{f_e} = -\vec{f_m}$$

d'où $eE_H = evB$, ou $$E_H = vB\,.$$

9. Effet Hall dans un ruban. Sous l'effet du champ $\vec{B}$, des charges mobiles sont déplacées transversalement : il apparaît une différence de potentiel entre les deux bords du ruban.

Entre les faces avant et arrière du ruban apparaît une différence de potentiel U_H, ou **tension de Hall,** reliée à E_H par l'expression :

$$E_H = \frac{U_H}{l}.$$

Par suite, la tension de Hall s'écrit :

$$\boxed{U_H = Blv}$$

Discussion.
Comme il fallait s'y attendre, l'effet est d'autant plus important que le champ magnétique appliqué est plus intense.
Nous notons aussi que la tension de Hall est proportionnelle à la vitesse des charges. Celle-ci est généralement proportionnelle à l'intensité du champ électrique $\overrightarrow{E}_0$ appliqué :

$$v = \mu E_0 .$$

Le facteur μ, qui dépend de la nature des charges mobiles et du milieu conducteur, est la **mobilité** des charges.
Or, en notant L la longueur du ruban et U la différence de potentiel appliquée, le champ E_0 s'exprime par : $E_0 = \frac{U}{L}$.

En admettant que le conducteur suit la loi d'Ohm, $U = RI = \rho \frac{L}{hl} I$

(où R est la résistance et ρ la résistivité).

Par suite : $E_0 = \frac{\rho}{hl} I$ et $v = \frac{\mu\rho}{hl} I$

Nous en déduisons :

$$U_H = Bl \frac{\mu\rho}{hl} I = \frac{\mu\rho}{h} IB$$

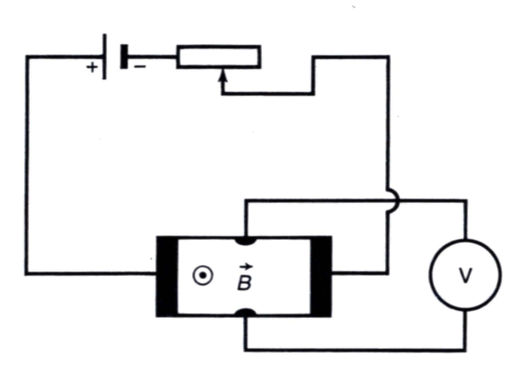
Observons que U_H est d'autant plus grand que h est plus faible, d'où l'intérêt d'utiliser un ruban mince.
Finalement lorsque la nature du ruban conducteur est fixée ainsi que son épaisseur, la tension de Hall est proportionnelle à l'intensité I et au champ appliqué.
En vue de l'utilisation pratique d'une plaquette à effet Hall, il suffira de retenir le résultat sous la formule suivante :

$$\boxed{U_H = kBI}$$

Remarque. Avec certains conducteurs, on observe **un effet Hall inversé :** la d.d.p. de Hall est dans le sens opposé de celui que l'on prévoit, considérant que la conductivité est due aux électrons qui se déplacent. **Tout se passe comme si** le courant électrique était transporté par des particules de charge positive. Ce phénomène a lieu avec des métaux tels que le fer, le zinc, et avec certains semiconducteurs. Il faut noter toutefois que ce sont toujours des électrons qui se déplacent, mais leur interaction avec le réseau cristallin crée l'illusion d'un déplacement de charges positives.

c) Application à la mesure de champs magnétiques.

L'effet Hall conduit à un moyen très commode pour mesurer un champ magnétique. Une plaquette de petites dimensions, alimentée par un courant électrique, est plongée dans le champ magnétique à étudier, perpendiculairement à ce champ. Entre deux points qui se font face sur les deux bords du ruban, on branche un voltmètre (figure 10). La tension mesurée est proportionnelle au champ magnétique.
En vue de mesures, il suffit d'étalonner le dispositif avec un champ dont on connaît la valeur.



10. Branchement d'une plaquette à effet Hall, en vue d'une mesure.

Remarques.

- La plaquette munie de ses fils de connection s'appelle une **sonde de Hall.** En lui associant un circuit d'alimentation et un voltmètre, on obtient un dispositif de mesure des champs magnétiques : on l'appelle un **teslamètre.** Dans certains dispositifs commercialisés, le voltmètre est directement gradué en tesla.
- On construit des plaquettes de très petites dimensions (quelques millimètres). Elles permettent d'étudier un champ magnétique qui n'est pas uniforme. Il suffit que le champ puisse être considéré comme uniforme dans la région où se trouve la plaquette. En comparaison avec la balance de Cotton, la sonde à effet Hall permet des mesures beaucoup plus ponctuelles.
- Pour mesurer des champs faibles, il faut améliorer au mieux la sensibilité du dispositif. Dans ce but, on utilise des plaquettes en semiconducteur (arseniure d'indium par exemple).

II. Couple agissant sur un circuit.

Dans toute cette partie de chapitre, nous nous limiterons, sauf indication contraire, à **l'action d'un champ uniforme.**

1. Circuit rectangulaire.

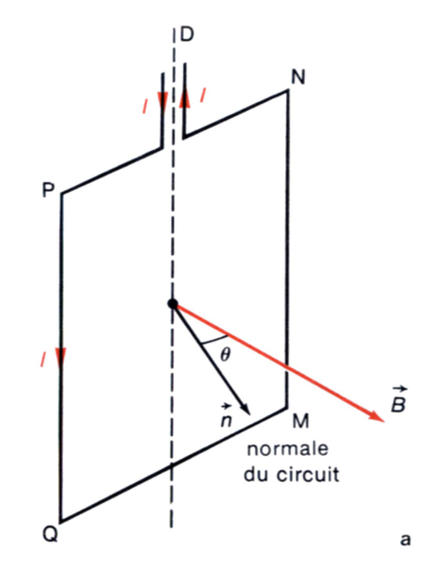
a) Étude d'un cas particulier.

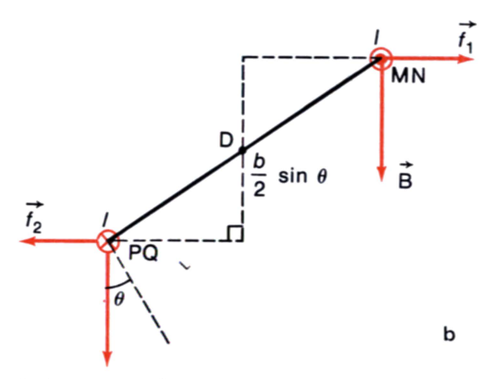
Considérons une spire rectangulaire MNPQ alimentée par un courant d'intensité I. Les dimensions sont MN = QP = a et MQ = NP = b.
Nous supposons d'abord que cette spire est mobile autour d'un axe (D) passant par le centre et parallèle aux côtés MN et PQ. On lui applique un champ uniforme $\vec{B}$ orthogonal à (D) et faisant un angle θ avec la normale ($\vec{n}$) au plan du circuit (figure 11a).
Les forces $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ qui s'exercent sur MN et PQ sont représentées sur la figure 11b : elles ont tendance à faire tourner le cadre. En revanche, les forces qui agissent sur NP et QM sont parallèles à (D) : elles ne peuvent donc pas produire de mouvement de rotation.
Revenons à $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$: ces deux forces sont opposées et ont pour valeur commune $f_1 = f_2 = BIa$.
Elles constituent un **couple** de forces. Nous noterons Γ_D la somme des moments des deux forces ou moment du couple, par rapport à D. En remarquant que les supports de $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ passent tous deux à une distance $\frac{b}{2}\sin\theta$ de l'axe de rotation, Γ_D s'écrit :

$$\Gamma_D = 2\,(BIa)\left(\frac{b}{2}\sin\theta\right) = BIab\sin\theta\,.$$

Le produit ab représente l'aire S de la spire. Par suite, le moment du couple par rapport à D s'écrit :

$$\Gamma_D = BIS\sin\theta\,.$$





11. Actions exercées sur un circuit rectangulaire.
a. Vue en perspective de la disposition du circuit par rapport au champ magnétique.
b. Vue du dessus : tracé des forces exercées sur MN et sur PQ.

b) Moment magnétique.

Dans l'expression de Γ_D, B représente le champ, le produit IS caractérise le circuit et θ dépend de l'orientation du circuit par rapport au champ.
Il est commode de regrouper IS dans une même notation $\mathfrak{M}$, appelée **moment magnétique** du circuit :

$$\mathfrak{M} = IS$$

d'où :

$$\Gamma_D = \mathfrak{M}B \sin \theta \,.$$

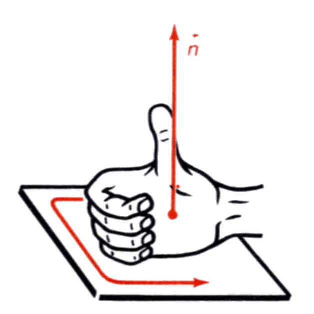
c) Expression vectorielle du moment des forces.

La dernière expression de Γ_D ressemble à l'expression du module d'un produit vectoriel, à partir des modules des vecteurs qui le composent. Nous pouvons effectivement introduire deux vecteurs $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ et $\overrightarrow{\Gamma_D}$ de façon à écrire le moment sous forme vectorielle.
Par définition, **le vecteur moment magnétique** est

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}} = IS\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface, dont le sens est donné par la règle de la main droite ou la règle du tire-bouchon, à partir du sens de parcours du courant (figure 12).
Le produit $\overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$ a précisément pour module Γ_D et il est orienté ici suivant l'axe de rotation ; on l'appelle **moment du couple** et on l'écrit :

$$\vec{\Gamma} = \overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B} \,.$$



12. Règle de la main droite pour orienter la normale au circuit, et obtenir le vecteur moment magnétique.

Remarque : la notation du moment du couple omet ici l'indice D. En fait, les vecteurs $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ et $\vec{B}$ sont définis indépendamment d'un axe de rotation et par suite, le produit vectoriel $\overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$ ne dépend pas de cet axe. Il se trouve que dans le cas présent, le module de $\vec{\Gamma}$ est égal à Γ_D. Ce résultat n'est pas général. Lorsque $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ et $\vec{B}$ ont une orientation quelconque par rapport à un axe orienté Δ, de vecteur unitaire $\vec{u}$, le moment par rapport à Δ a pour mesure algébrique sur l'axe :

$$\Gamma_\Delta = \vec{\Gamma} \,.\, u \,.$$

2. Généralisation : circuit de forme quelconque.

Moment magnétique d'un circuit :
$\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\overrightarrow{S}$

a) Moment magnétique.

• **Circuit plan.** Sur un circuit plan de forme quelconque, convenons d'un sens de parcours positif (figure 13). Le vecteur unitaire de la normale au circuit est alors orienté suivant la convention habituelle (tire-bouchon, ou règle de la main droite).
L'aire du circuit étant S, on définit le vecteur surface : $\overrightarrow{S} = S\vec{n}$.
Lorsque le circuit est parcouru par un courant d'intensité I (algébrique), on appelle moment magnétique, par définition, le vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\overrightarrow{S}}\,.$$

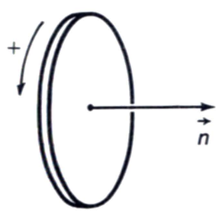
Son module s'exprime en ampère-mètre carré : A . m^2.

• **Lorsque le circuit n'est pas plan,** nous admettrons qu'il est encore caractérisé par un vecteur moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, proportionnel à l'intensité du courant qui le parcourt.

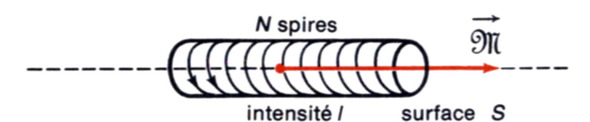
• **Cas d'une bobine cylindrique (solénoïde).**
Une bobine constituée de N spires enroulées régulièrement est assimilable à n circuits circulaires parcourus par le même courant. Le moment magnétique a pour module :

$$\mathcal{M} = NIS\,.$$

Il est orienté parallèlement à l'axe de la bobine, comme les moments magnétiques des spires considérées individuellement (figure 14).



13. L'orientation de la normale et le sens positif de parcours du circuit sont liés conventionnellement (utiliser la règle de la main droite, ou la règle du tire-bouchon).



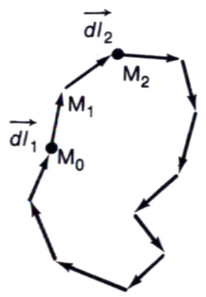
14. Moment magnétique d'un solénoïde. Sa valeur est $\mathcal{M} = NIS$.

b) Somme des forces subies par un circuit dans un champ uniforme.

Décomposons le circuit en petits éléments $\overrightarrow{\delta l}$, tous parcourus par le même courant I, placés dans le même champ $\overrightarrow{B}$. La somme des forces élémentaires le long du circuit est :

$$\overrightarrow{F} = \Sigma\, I\,\overrightarrow{\delta l} \wedge \overrightarrow{B} = I(\Sigma\,\overrightarrow{\delta l}) \wedge \overrightarrow{B}$$

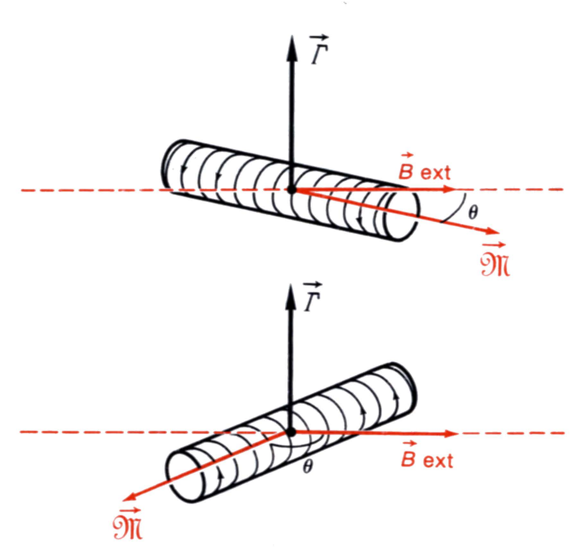
(en mettant I et $\overrightarrow{B}$ en facteurs). La somme des $\overrightarrow{\delta l}$ est la somme des vecteurs déplacements lorsqu'un point M parcourt le circuit tout entier : le résultat est $\vec{0}$ car la position finale est identique à la position initiale (figure 15). Par suite : $\overrightarrow{F} = \vec{0}$.



15. Lorsqu'on parcourt un circuit, la somme des vecteurs déplacements élémentaires $\Sigma\,\overrightarrow{dl_i}$ est nulle.

Couple exercé par un champ magnétique sur un circuit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$$



16. Bobine proche d'une position d'équilibre stable (a) et d'une position d'équilibre instable (b).

Conclusion : Lorsqu'un circuit parcouru par un courant est placé dans un champ uniforme, la somme des forces magnétiques qui s'exercent sur lui est nulle.
Il en résulte que l'accélération du centre d'inertie G est nulle : si G a initialement une vitesse nulle, il reste fixe. Par contre, nous avons vu, dans le cas d'un cadre rectangulaire, qu'une rotation autour de G est possible.

c) Moment du couple magnétique.

La somme vectorielle des forces appliquées étant nulle, celles-ci sont assimilables à un couple.
Nous admettrons que l'expression du moment du couple est toujours identique à celle que nous avons trouvée pour un cadre rectangulaire :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}}.$$

Le moment du couple magnétique par rapport à un axe orienté Δ, de vecteur unitaire $\vec{u}$ est :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_\Delta = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}}.$$

Autrement dit, Γ_Δ est la mesure algébrique de la projection de $\vec{\Gamma}$ sur l'axe Δ.

d) Positions d'équilibre.

Pour qu'une bobine parcourue par un courant reste immobile dans un champ $\vec{B}$, il faut que le couple magnétique $\vec{\Gamma}$ soit nul.

Or : $\Gamma = \mathfrak{M}B \sin \theta$.

$\vec{\mathfrak{M}}$ et $\vec{B}$ étant différents de 0, il faut que $\sin \theta = 0$, soit : $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.
Il faut donc que les vecteurs $\vec{\mathfrak{M}}$ et $\vec{B}$ soient colinéaires. Deux cas se présentent :

- **$\vec{\mathfrak{M}}$ et $\vec{B}$ colinéaires de même sens : équilibre stable.**

En effet, quand on écarte légèrement la bobine de cette position d'équilibre (figure 16a), le couple $\vec{\Gamma}$ qui apparaît tend à ramener la bobine vers l'équilibre. Il se produit de petites oscillations qui s'amortissent et pour finir, $\vec{\mathfrak{M}}$ et $\vec{B}$ sont à nouveau colinéaires.

• $\vec{\mathcal{M}}$ **et** $\vec{B}$ **colinéaires et de sens contraires : équilibre instable.**
En écartant légèrement la bobine de cette position d'équilibre (figure 16b), il apparaît un couple $\vec{\Gamma}$ dont l'effet est d'écarter la bobine encore davantage de l'équilibre. Des oscillations de grande amplitude se produisent et l'amortissement de ces oscillations conduit finalement à la position d'équilibre stable.

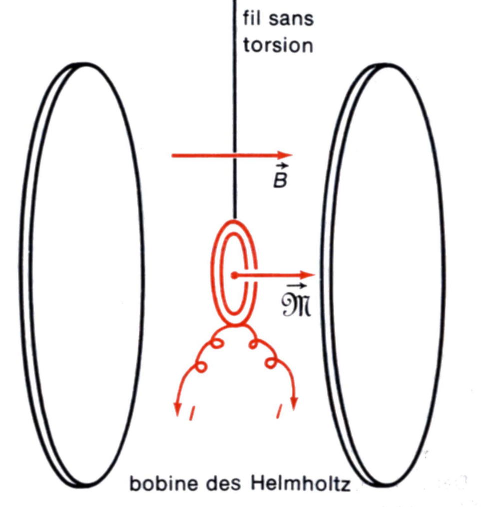
e) Vérification expérimentale de quelques résultats.

• **Expérience 1.** Suspendons une bobine circulaire à un fil très souple (qui peut se tordre sans exercer de couple de rappel notable) et envoyons un courant I au moyen de deux conducteurs fins très souples également. Ainsi, la bobine est astreinte à tourner autour d'un axe qui est matérialisé par le fil.
Lorsqu'on la place dans le champ horizontal créé par deux bobines de Helmholtz, on constate qu'elle s'oriente perpendiculairement au champ : le vecteur moment magnétique, orthogonal à la bobine, se dispose suivant une parallèle au champ (figure 17).

• **Expérience 2.** A partir de la situation précédente, tournons la bobine de 180° pour l'amener dans la position d'équilibre instable : elle quitte cette position, effectue d'amples oscillations amorties et finit par s'arrêter dans la position d'équilibre stable.

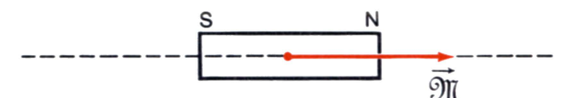
• **Expérience 3.** Remplaçons le fil de suspension souple par un fil plus raide, exerçant un couple de rappel élastique, et en l'absence de courant, orientons le plan de la bobine parallèlement au champ. Lorsque nous établissons le courant, la bobine tend à s'orienter comme dans les expériences précédentes, mais n'atteint pas la position d'équilibre stable ; elle s'arrête dans une position intermédiaire où s'équilibrent les deux couples antagonistes : couple magnétique et couple de torsion.

• **Expérience 4.** La bobine suspendue est remplacée par une autre, de forme différente mais de même moment magnétique (même valeur du produit NIS).
Si elle est disposée initialement comme dans l'expérience 3, on constate qu'elle tourne du même angle : c'est que le couple magnétique n'a pas changé, puisque $\mathcal{M}$ et B ont les mêmes valeurs. En revanche, on observe dans certains cas que les oscillations qui conduisent à l'équilibre ont une période différente de celle que l'on observait dans l'expérience 3. Cela tient à l'inertie du cadre : les moments d'inertie sont peut-être différents ; il est normal que les oscillations les plus lentes se produisent lorsque le moment d'inertie est le plus grand.

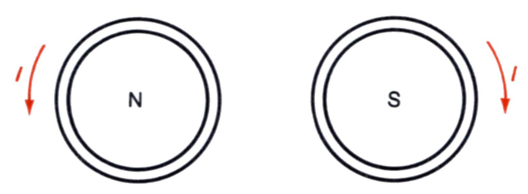


17. Étude expérimentale de l'orientation d'une bobine dans un champ magnétique uniforme.

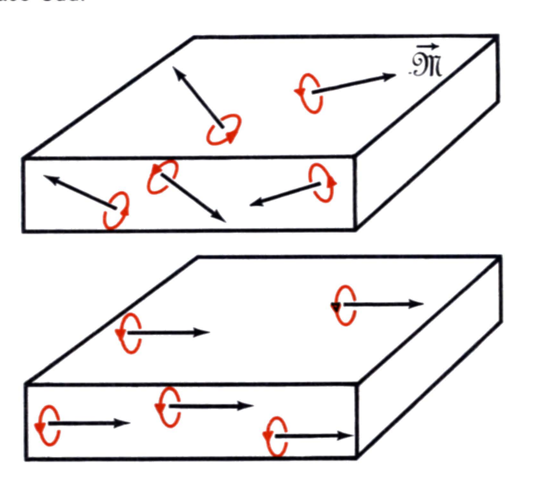
Un aimant se comporte comme un circuit ; il est caractérisé par son moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$.



18. Le moment magnétique d'un aimant droit est orienté longitudinalement, du pôle Sud vers le pôle Nord.



19. Par analogie avec un aimant, on définit la face Nord d'une bobine : c'est la face vers laquelle pointe le vecteur moment magnétique. L'autre face est la face Sud.



20. Dans la matière non aimantée, les moments magnétiques atomiques sont orientés au hasard : leur somme vectorielle est nulle. Au contraire, dans un milieu aimanté, une orientation privilégiée apparaît.

3. Comparaison d'un circuit avec un aimant.

a) Analogies.

• De même qu'un circuit, un aimant droit n'est pas déplacé lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique uniforme, mais on observe qu'il s'oriente : les actions qu'il subit se réduisent à un couple. Celui-ci peut être mesuré en l'équilibrant par un couple antagoniste connu, au moyen d'un fil de torsion. On constate que le couple magnétique est encore proportionnel à la valeur du champ $\vec{B}$ et au sinus de l'angle formé par $\vec{B}$ avec l'axe longitudinal de l'aimant droit ; le facteur de proportionnalité est appelé moment magnétique de l'aimant. De façon générale, **tout aimant peut être caractérisé par un moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$.** Placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, il subit un couple de moment :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}.$$

Dans le cas d'un aimant droit, le vecteur moment magnétique est dirigé longitudinalement et orienté du pôle sud vers le pôle nord (figure 18).

• Dans le champ magnétique terrestre, une bobine comme un aimant s'oriente de manière que le vecteur $\vec{\mathfrak{M}}$ pointe du sud vers le nord. Pour cette raison, on convient d'appeler **face nord** la face de la bobine qui s'oriente vers le nord, c'est-à-dire dans le sens du champ terrestre : c'est la face par laquelle sort le vecteur moment magnétique. Lorsqu'on la regarde, on voit le courant circuler dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (figure 19). L'autre face est qualifiée de **face sud.**

b) Interprétation des analogies.

La rotation d'un électron autour du noyau, au sein d'un atome, est comparable au mouvement d'un électron le long d'une spire conductrice : on peut lui associer un moment magnétique. Les particules (électrons, noyaux) qui constituent l'atome ont elles-mêmes un moment magnétique, comme si elles étaient constituées de matière électrisée en rotation. Dans la matière non aimantée, les moments magnétiques atomiques sont orientés au hasard et on ne détecte pas de moment magnétique macroscopique. En revanche, dans un aimant, les moments magnétiques atomiques s'ordonnent suivant une direction privilégiée : leur somme constitue le moment magnétique macroscopique de l'aimant ($\vec{\mathfrak{M}}$), qui se manifeste par des actions subies dans un champ extérieur (essentiellement : couple magnétique $\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$).

4. Action d'un champ non uniforme.

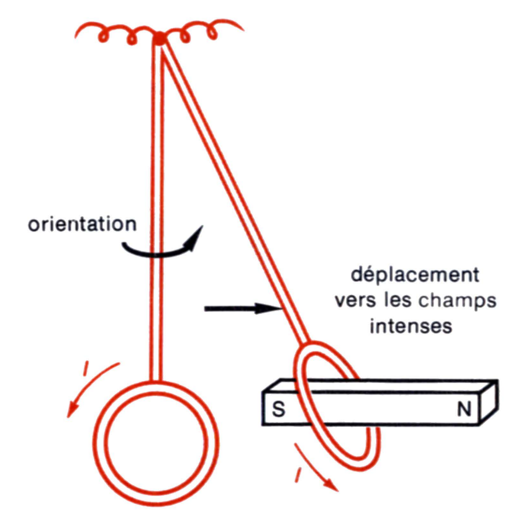
Jusqu'à présent, nous avons considéré un circuit (ou un aimant) placé dans un champ uniforme : en ce cas, la somme des forces exercées est nulle. Lorsque le champ n'est pas uniforme, il n'en est pas ainsi.

a) Expériences.

- Une bobine circulaire étant suspendue par deux fils souples qui l'alimentent par un courant d'intensité *I*, approchons un aimant droit. La bobine s'oriente dans le champ de l'aimant, de façon à ce que $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ et $\overrightarrow{B}$ deviennent colinéaires, puis elle est attirée par l'aimant (figure 21). La face sud de la bobine est attirée par la face nord de l'aimant.
- Répétons l'expérience précédente en remplaçant la bobine par un petit aimant droit suspendu à un fil souple. Il y a encore orientation, puis attraction du pôle sud du petit aimant vers le pôle nord de l'aimant qu'on approche.
- Remplaçons l'aimant par un barreau de fer. On observe encore une orientation puis une attraction : c'est que le fer, dans le champ d'un autre aimant, devient lui-même un aimant.

c) Conclusion.

Dans toutes les expériences que nous avons réalisées, **l'effet principal des actions magnétiques est une orientation,** qui résulte de l'existence d'un couple magnétique.
Après orientation, il apparaît **un effet secondaire : un déplacement vers une région où le champ appliqué est plus intense.** La somme vectorielle des forces magnétiques est ici différente de zéro ; elle est orientée vers les champs croissants.
Remarque : Si l'orientation ne peut pas se faire, en raison d'autres forces appliquées, le déplacement ne se fait pas toujours vers les champs intenses.
Ainsi, lorsqu'on approche le pôle Nord d'un aimant vers le pôle Nord d'un autre aimant que l'on empêche de tourner, il y a répulsion : l'aimant qui subit l'action tend à s'écarter de celui qu'on approche, pour aller vers des champs moins intenses. De façon générale, on observe que **deux pôles de même nom se repoussent,** et que **deux pôles de noms contraires s'attirent ;** cette loi est valable aussi bien pour des aimants que pour des bobines parcourues par des courants.



21. Bobine dans un champ non uniforme : elle s'oriente, puis se déplace vers des régions où le champ est plus intense.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- La loi de ______ exprime la force magnétique $\vec{F}$ s'exerçant sur un élément de circuit $\vec{L}$ parcouru par un courant d'intensité I, et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme : $\vec{F}$ = ______. Cette force est ______ à $\vec{B}$ et à $\vec{L}$, et le trièdre $(\vec{B}, \vec{L}, \vec{F})$ est ______ .
- Lorsqu'un fil parcouru par un courant est plongé dans un champ magnétique, l'écoulement des ______ de charges au sein du conducteur est modifié ; le phénomène s'appelle l' ______.
- La tension de Hall qui apparaît entre les bords d'un ruban est ______ au champ magnétique, appliqué et à l' ______ du courant.
- Un circuit rigide parcouru par un courant est caractérisé par son ______ magnétique, dont la valeur est le produit de l' ______ par l'aire du circuit, lorsque celui-ci est plan. Il s'agit en fait d'une grandeur vectorielle, dirigée ______ à la surface du circuit.
- Les actions magnétiques s'exerçant sur un circuit se réduisent à un couple lorsque le champ $\vec{B}$ est ______ . Le vecteur moment du ______ s'obtient en effectuant le produit ______ du moment ______ du circuit par le champ magnétique : $\vec{\Gamma}$ = ______ .
- Un circuit (ou un aimant) de moment magnétique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$, placé dans un champ uniforme $\vec{B}$, est en position d'équilibre ______ lorsque $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ et $\vec{B}$ sont ______ et de même sens.
- Lorsqu'un circuit (ou un aimant) est plongé dans un champ magnétique qui n'est pas uniforme, il s' ______, puis se déplace vers des régions où le champ est ______ intense.

Petites questions.

1. Dans quelles conditions la force de Laplace qui s'exerce sur un élément de circuit peut-elle s'annuler ?

2. Un fil électrique parcouru par un courant est-il mis en mouvement quand on le plonge dans un champ **électrique** $\vec{E}$ uniforme ?

3. La puissance de la force magnétique qui s'exerce sur un électron mobile dans le vide est nulle. Peut-on en dire autant des forces magnétiques qui s'exercent sur un élément de circuit, lorsque celui-ci se déplace ? Donnez au moins un exemple précis à l'appui de votre réponse.

4. De quels facteurs dépend la sensibilité d'un micro-ampèremètre à cadre mobile ? Comment l'améliorer ?

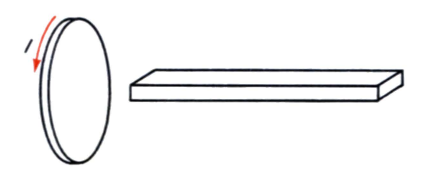
5. La tension de Hall qui apparaît entre les bords d'un ruban est proportionnelle à la valeur du champ magnétique appliqué, quand celui-ci est perpendiculaire au ruban. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, que peut-on dire de la tension de Hall ?

6. De la balance de Cotton et de la sonde de Hall, quel est le dispositif le plus sensible ? Quel est celui qui permet les mesures les plus « ponctuelles » ?

7. Que peut-on dire du moment magnétique d'un circuit plan en forme de 8, avec deux boucles bien symétriques comme le montre la figure ?

8. Une bobine plate rigide est posée sur une table horizontale. Lorsqu'elle est parcourue par un courant, le champ magnétique terrestre tendrait à la faire tourner autour d'un axe Δ si l'action de la table ne s'y opposait pas. Quelle est la direction de l'axe Δ ?

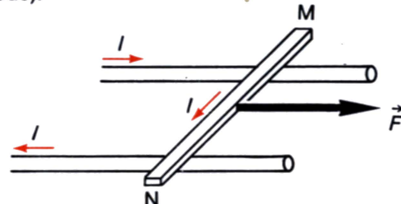
9. Sur la figure ci-dessous, la spire est attirée par l'aimant. De quel côté se trouve la face Nord du circuit ? A quel bout de l'aimant se trouve son pôle Nord ?



Applications immédiates.

10. On note ρ_m la densité de charges mobiles, c'est-à-dire la quantité d'électricité véhiculée par tous les porteurs de charges mobiles présents dans l'unité de volume de conducteur (elle s'exprime en C/m³). Déterminez ρ_m dans le cuivre, avec les données suivantes :
masse volumique $a = 8{,}94$ g/cm³ ;
masse molaire atomique $A = 63{,}5$ g/mol ;
nombre d'électrons libres par atome en moyenne : 1,3.

11. Une barre MN est disposée transversalement sur deux rails horizontaux parallèles sur lesquels elle peut glisser (figure ci-dessous).

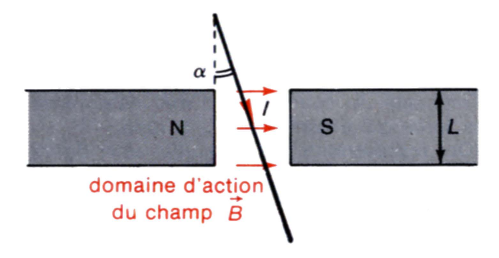


a) Un champ magnétique vertical $\vec{B}$ est appliqué tout le long de la barre. L'intensité du courant I et la force magnétique $\vec{F}$ ayant les sens indiqués sur la figure, quel est le sens de $\vec{B}$?

b) Calculez la valeur de F lorsque le champ vaut $B = 0{,}1$ T, la distance entre les rails étant $L = 5$ cm et l'intensité de courant $I = 1$ A.

c) On suppose que la barre glisse sur les rails. Sa masse étant de 50 g, quelle serait son accélération s'il n'y avait aucun frottement ? (En réalité, les frottements sont trop grands pour que l'on puisse faire l'expérience dans ces conditions ; en pratique, il vaut mieux prendre une barre de section circulaire, qui roule sur les rails au lieu de glisser.)

12. Un fil rectiligne parcouru par un courant d'intensité I est disposé obliquement dans l'entrefer d'un aimant (électro-aimant ou aimant en fer à cheval). Comme l'indique la figure ci-dessous : L est la hauteur de l'entrefer et α l'inclinaison du fil. Déterminez la force qui s'exerce sur le fil (direction, sens et valeur). Commentez le résultat.

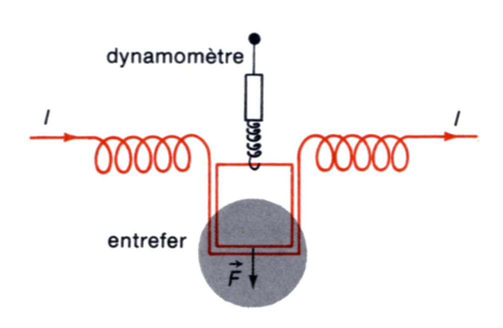


13. Une bobine rectangulaire, suspendue à un dynamomètre, est plongée dans l'entrefer d'un électro-aimant, comme le montre la figure page suivante. Cent brins de fils traversent l'entrefer. Le côté horizontal de la bobine a une longueur de 3 cm.

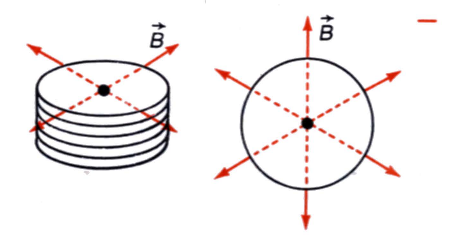
Lorsqu'on établit une intensité de courant de 0,5 A, le dynamomètre indique la force supplémentaire qu'il subit, soit 0,6 N.

a) Quelle est la valeur du champ magnétique, supposé horizontal ?

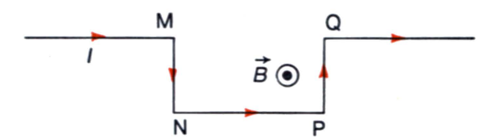
b) Expliquez pourquoi les forces magnétiques qui s'exercent sur les brins verticaux sont sans action.



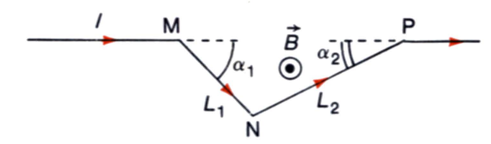
14. Une bobine de haut-parleur, enroulée sur un cylindre de rayon $r = 1$ cm, comporte 60 spires. Elle est mobile dans l'entrefer d'un aimant permanent qui crée un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire à l'axe du cylindre et passant par cet axe.
La valeur du champ étant $B = 0{,}5$ T et l'intensité du courant $i = 1$ mA, déterminez la force qui s'exerce sur la bobine.
(On représentera d'abord, sur une figure claire, la force qui s'exerce sur un petit élément de spire, de longueur δl.)



15. Un fil conducteur ayant la configuration de la figure ci-dessous est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de figure. Montrez que la somme des forces subies par le fil est la même que si les points M et Q étaient joints par une portion de fil rectiligne.



16. La figure ci-dessous représente une portion de fil conducteur MNP constituée de deux segments rectilignes MN et NP de longueurs respectives L_1 et L_2, faisant avec la direction de MP les angles α_1 et α_2. Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ s'applique perpendiculairement à la feuille et le fil est parcouru par un courant d'intensité I.



a) Quelles sont les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ qui s'exercent sur les brins MN et NP ? Représentez ces forces sur la figure.

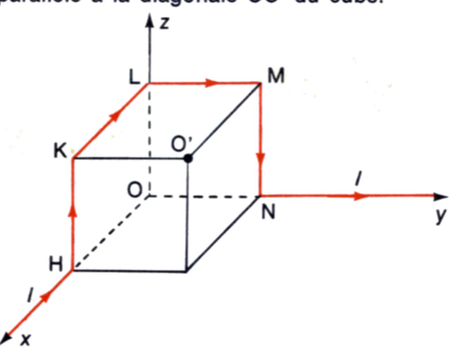
b) On note $\vec{F}$ la somme des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.
Calculez les valeurs des projections de $\vec{F}$ sur la direction MP et sur la direction perpendiculaire. Quel est le module de $\vec{F}$?
Comparez à la force qu'on obtiendrait si on remplaçait le fil MNP par un fil rectiligne tendu entre M et P.

17. Un cube d'arête a est disposé au coin d'un trièdre trirectangle $Oxyz$, et un fil conducteur, parcouru par un courant d'intensité I, longe quelques arêtes, comme le montre la figure ci-dessous (le fil est dessiné en rouge).

a) Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ s'applique parallèlement à Ox. Déterminez la somme $\vec{F}$ des forces qui s'exercent sur le fil entre H et N (donnez les composantes F_x, F_y, F_z, puis le module F).

b) Même question en supposant que le champ $\vec{B}$ est parallèle à Oy, puis parallèle à Oz. En déduire les composantes de la force lorsqu'il s'applique un champ de direction quelconque, de composantes B_x, B_y, B_z.

c) Application numérique : $a = 1$ cm, $I = 1$ A, $B = 0{,}1$ T, la direction de $\vec{B}$ étant parallèle à la diagonale OO′ du cube.



18. Un ruban parcouru par un courant I est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire à la surface du ruban.

a) On émet l'hypothèse que les porteurs de charges sont des électrons. Représentez sur une figure le sens du champ électrique $\vec{E_1}$ qui résulte de l'effet Hall.

b) Qu'appelle-t-on effet Hall inversé ?

c) La sensibilité d'une plaquette à effet Hall est $\sigma = \frac{U_H}{BI}$ où U_H est la tension de Hall.
Pour une plaquette de cuivre d'épaisseur 0,1 mm, $\sigma = 5{,}2 \cdot 10^{-7}$ SI. Déterminez la tension de Hall qui apparaît lorsque $I = 10$ A et $B = 1$ T.

d) Une plaquette en arséniure d'indium, de mêmes dimensions, est beaucoup plus sensible : $\sigma = 1{,}0$ SI. On réalise $I = 1$ A et on dispose la sonde dans un plan vertical d'orientation est-ouest. Recherchez dans votre livre les caractéristiques du champ magnétique terrestre et calculez la tension de Hall qui apparaît.

19. Un fil conducteur isolé de 0,4 mm de diamètre (isolant compris) est enroulé sur un cylindre de longueur 10 cm et de 2 cm de diamètre.

a) Les spires sont jointives et enroulées en une seule couche. Quel est le moment magnétique $\mathcal{M}_1$ de la bobine obtenue lorsque le fil est parcouru par un courant de 0,5 A. (On notera que le rayon moyen d'une spire est 1,02 cm).

b) On enroule une deuxième couche de fil, le rayon moyen d'une spire étant maintenant de 1,06 cm. A cette deuxième couche, parcourue par le même courant *I*, correspond un moment magnétique $\mathfrak{M}_2$. De quelle proportion $\mathfrak{M}_2$ excède-t-il $\mathfrak{M}_1$? (Déterminez $\left.\frac{\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1}\right)$.

20. Un aimant droit, de section 1 cm² et de longueur 10 cm, possède un moment magnétique de 0,5 A . m². Par ailleurs, on enroule 100 spires d'un fil conducteur sur un cylindre de section 1 cm² et de longueur 10 cm. Quelle intensité faudrait-il faire passer dans le fil pour obtenir un moment magnétique égal à celui de l'aimant ?

21. Un petit barreau aimanté, de moment magnétique 0,1 A . m² est maintenu suivant la direction horizontale perpendiculaire à celle qu'indique une boussole.

a) Quel est le couple magnétique subi par le barreau ? On donne la valeur de la composante horizontale du champ terrestre ($B = 2 . 10^{-5}$ T) et l'inclinaison ($I = 64°$).

b) L'aimant étant fixé à un axe Δ vertical, quel est le moment des forces magnétiques par rapport à Δ ?

c) Même question que la précédente, lorsque Δ est horizontal et orienté comme l'aiguille aimantée d'une boussole.

22. On considère l'assemblage de deux bobines plates circulaires de rayon $R = 2$ cm, comprenant chacune 100 tours de fil, de façon que les deux bobines aient un diamètre commun et que leurs plans se coupent à angle droit.

a) Représentez le dispositif sur une figure et calculez le moment magnétique total, lorsque l'intensité du courant est de 0,5 A.

b) Le système est plongé dans un champ magnétique uniforme de 0,01 T orthogonal au diamètre commun. Déterminez le moment du couple magnétique qui s'exerce, dans les 2 cas suivants : $\vec{B}$ est dans le plan d'une des bobines ; $\vec{B}$ est dans le plan bissecteur des deux bobines.

Approfondissement.

Ces exercices signalés par un carré rouge □ présentent une plus grande difficulté que les autres.

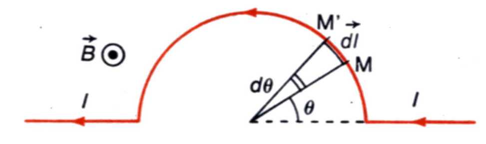
23. Dans une roue de Barlow, de rayon *R*, on admet que le courant d'intensité *I* circule à tout instant suivant un rayon *OA*, et que le champ magnétique $\vec{B}$ s'applique tout le long de ce rayon.

a) Exprimez la force qui s'exerce sur une portion élémentaire du rayon *OA*, située entre les distances *r* et $r + dr$ de O. Exprimez le moment de cette force élémentaire par rapport à l'axe de rotation.

b) Par un calcul d'intégrale, déterminez la somme des moments des forces élémentaires exercées le long de OA. On prendra les valeurs numériques : $R = 3$ cm ; $I = 10$ A ; $B = 0,1$ T.

c) La roue de Barlow est comparable à un moteur. Calculez sa puissance quand la roue tourne à raison de 120 tours par minute.

24. Un fil conducteur, en forme de demi-cercle de rayon *R*, de centre O et de diamètre *AA'*, est alimenté par un courant d'intensité *I*. Il est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan du demi-cercle.



a) Soit *dl* la longueur d'un brin élémentaire *MM'*, tel que l'angle $\widehat{MOM'}$ soit $d\theta$, l'angle $\widehat{AOM}$ étant θ. Quelle est la force magnétique $\vec{dF}$ qui s'exerce sur ce brin ? Représentez-la sur une figure plus grande que celle du livre.

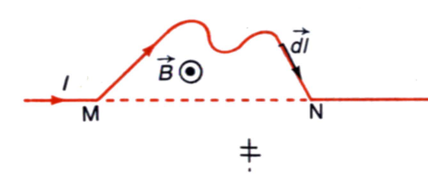
b) En tenant compte de la symétrie géométrique qui apparaît sur la figure, quelle sera la direction de la somme $\vec{F}$ des forces magnétiques élémentaires s'exerçant le long du demi-cercle ? Quelle est la participation de l'élément *dl* à cette somme ?

c) Déterminez le module de $\vec{F}$, par un calcul d'intégrale. Comparez à la force qu'on obtiendrait si les points A et A' étaient joints par un fil rectiligne.

25. Entre deux points M et N distants de *D*, est branché un fil conducteur décrivant une courbe plane (dans le plan de figure ci-dessous).
Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, perpendiculaire au plan de figure s'applique le long du fil, parcouru par un courant d'intensité *I*. Montrez que la force magnétique subie par le fil curviligne est la même, quelle que soit la forme de la courbe qui joint les points M et N.

Indication : décomposez la courbe en éléments $\vec{dl}$ et utilisez la distributivité du produit vectoriel :

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}.$$



26. Un ruban de cuivre, de largeur $l = 1$ cm et d'épaisseur $h = 0,1$ mm, est parcouru par un courant d'intensité $I = 8,8$ A dans le sens de la longueur. Lorsqu'on applique un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au ruban et de valeur $B = 1$ T, on décèle une tension de Hall $U_H = 5$ µV.

a) Faites une figure claire en indiquant le sens du déplacement électronique qui constitue l'effet Hall.

b) Quelle est la vitesse v des électrons libres ?

c) Exprimez l'intensité du courant en fonction de v, des dimensions du ruban et de n, nombre d'électrons libres par unité de volume.
En déduire la valeur de n. On rappelle la charge élémentaire $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

d) Combien d'électrons un atome de cuivre libère-t-il en moyenne ? On donne la masse molaire atomique du cuivre $A = 63{,}5$ g . mol^{-1}, sa masse volumique $\rho = 8{,}94$ g/cm^3.

Réponses :
b) 0,5 mm/s ;
c) $1{,}1 \cdot 10^{29}$ électrons/m^3 ;
d) 1,3 électron/atome.

27. Une plaquette à effet Hall en arséniure d'indium possède les dimensions suivantes : largeur $l = 5$ mm ; épaisseur $h = 0{,}1$ mm ; longueur $L = 10$ mm.

a) Sachant que le matériau (*InAs*) a une résistivité de $5 \cdot 10^{-5}\ \Omega \cdot$ m, calculez la résistance de la plaquette.

b) On fait passer un courant $I = 1$ A. Quelle est la différence de potentiel entre les extrémités de la plaquette ? En déduire la valeur E_0 du champ électrique qui met les charges en mouvement.

c) L'étude expérimentale de la tension de Hall U_H fonction de I et du champ magnétique B, appliqué perpendiculairement au ruban, conduit à la formule :

$$U_H = kBI.$$

Le facteur numérique k ayant une valeur voisine de 1 (en unité SI.). Déterminez la vitesse v des porteurs de charges lorsque $I = 1$ A.

d) En déduire la mobilité $\mu = \dfrac{v}{E_0}$ des porteurs de charges dans l'arséniure d'indium.

28. Un fil conducteur isolé, de diamètre $a = 1$ mm (isolant compris) est enroulé dans un plan sous forme d'une spirale à spires jointives. La spire la plus petite à un rayon moyen $R_1 = 2$ cm, la suivante un rayon $R_2 = R_1 + a$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on atteigne un rayon moyen de 5 cm.

a) Combien de spires a-t-on enroulées ?

b) Calculez la somme des surfaces des spires. On rappelle la somme des n premiers nombres entiers : $s_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et la somme de leurs carrés $s_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Quel est le moment magnétique de la bobine obtenue lorsque l'intensité du courant est de 0,5 A.

Réponses : **a)** 31 spires ; **b)** 0,126 m^2 ; **c)** 0,063 A . m^2.

29 On se propose de déterminer le moment magnétique de l'atome d'hydrogène, dans le modèle de Bohr : on suppose que l'électron de masse m, tourne à la vitesse v sur un cercle de rayon r, autour du proton supposé fixe. On admet que :
$mvr = \dfrac{h}{2\pi}$ (condition de quantification, où h est la constante de Planck).

a) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à l'électron, vous trouvez une deuxième relation entre v et r. Déduisez les valeurs de r et de v, avec les données suivantes :
$m = 0{,}9 \cdot 10^{-31}$ kg ; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J . s.
(les autres valeurs numériques nécessaires doivent vous être connues).

b) Quel est le temps T mis par un électron pour effectuer une révolution autour du proton ?

c) Justifiez l'affirmation suivante : la trajectoire de l'électron est assimilable à un petit circuit parcouru par un courant d'intensité $I = \dfrac{e}{T}$, ou e est la charge élémentaire.
Calculez numériquement I.

d) Quel est le moment magnétique de l'atome, avec les hypothèses précédentes ? (Ce moment magnétique est parfois appelé « magnéton de Bohr ».)

30 Lorsqu'on aimante très fortement un cylindre de fer de volume 1 cm^3, on atteint un moment magnétique de 1,7 A . m^2.

a) Calculez combien il y a d'atomes de fer dans 1 cm^3, sachant que la masse molaire atomique est $A = 56$ g et que la masse volumique est 7,6 g/cm^3.

b) En supposant que tous les moments magnétiques atomiques soient orientés dans le même sens lorsque le fer est aimanté très fortement, calculez le moment magnétique de chaque atome de fer.

c) Transformez le résultat précédent en prenant comme unité le « magnéton de Bohr » : $\mathfrak{M}_B = 0{,}93 \cdot 10^{-23}$ A . m^2 (voir l'exercice 29 pour la définition de cette unité).

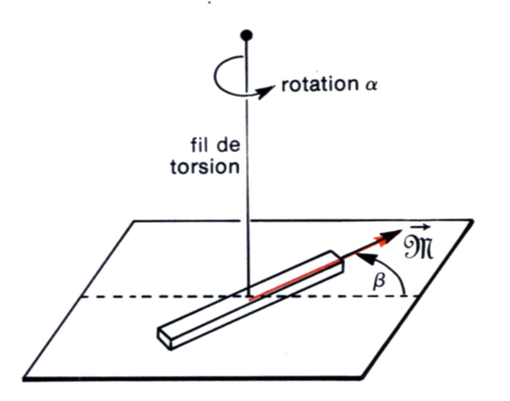
31. On se propose d'étudier l'énergie potentielle d'un circuit rigide dans un champ extérieur uniforme.

a) Écrivez la relation entre le travail des forces extérieures et la variation d'énergie potentielle d'un solide.

b) Rappel : Lorsqu'un solide mobile autour d'un axe Δ est soumis à une force de moment $\mathcal{M}_\Delta$, le travail élémentaire de cette force est $\mathcal{M}_\Delta\, d\theta$ quand le solide tourne de $d\theta$ autour de l'axe. De même, lorsqu'il s'exerce un couple de moment Γ (par rapport à Δ), le travail élémentaire est $dW = \Gamma\, d\theta$.
Appliquez ce résultat : calculez le travail des forces magnétiques qui s'exercent sur un circuit rigide, mobile autour d'un axe Δ lorsque la rotation est $d\theta$. (Le moment magnétique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ et le champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B}$ sont supposés perpendiculaires à Δ).

c) Montrez que l'énergie potentielle du circuit dans le champ extérieur s'exprime par le produit scalaire $E_p = -\overrightarrow{\mathfrak{M}} \cdot \overrightarrow{B}$. Montrez qu'il y a analogie avec l'énergie due à un couple de torsion, lorsque θ est petit.

32. Un fil de torsion de constante C, suspendu verticalement, supporte un petit aimant accroché en son centre, de sorte que le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ soit horizontal. On note $\vec{B}$ la composante horizontale du champ magnétique terrestre. **a)** Initialement, la torsion est nulle et le moment $\vec{\mathcal{M}}$ est dirigé vers le Nord. Puis on tourne d'un angle α l'extrémité supérieure du fil de torsion. Il en résulte une rotation de l'aimant, d'un angle β. Exprimez les moments Γ_1 et Γ_2 des couples exercés sur l'aimant par le fil de torsion et par le champ magnétique terrestre. En déduire la condition d'équilibre de l'aimant.



b) Représentez graphiquement l'allure de la courbe qui représente l'angle α en fonction de l'angle β, pour les diverses positions d'équilibre.

c) On admettra les valeurs suivantes :

$$B = 2 \,.\, 10^{-5}\ \text{T}\ ;\quad \vec{\mathcal{M}} = 0{,}1\ \text{A}\,.\,\text{m}^2.$$

Calculez C, sachant que α est voisin de $2\,\beta$ lorsque l'angle β est petit (β^2 petit devant $1\ \text{rad}^2$). Avec cette valeur de C, quelle doit être la valeur de α pour que l'aimant soit tourné de 90° ?

Réponses :

c) $C = 2 \,.\, 10^{-6}\ \text{N}\,.\,\text{m}\,.\,\text{rad}^{-1}$, $\alpha = 147°$.

10 Champs magnétiques crées par des courants

I. Topographie d'un champ magnétique.

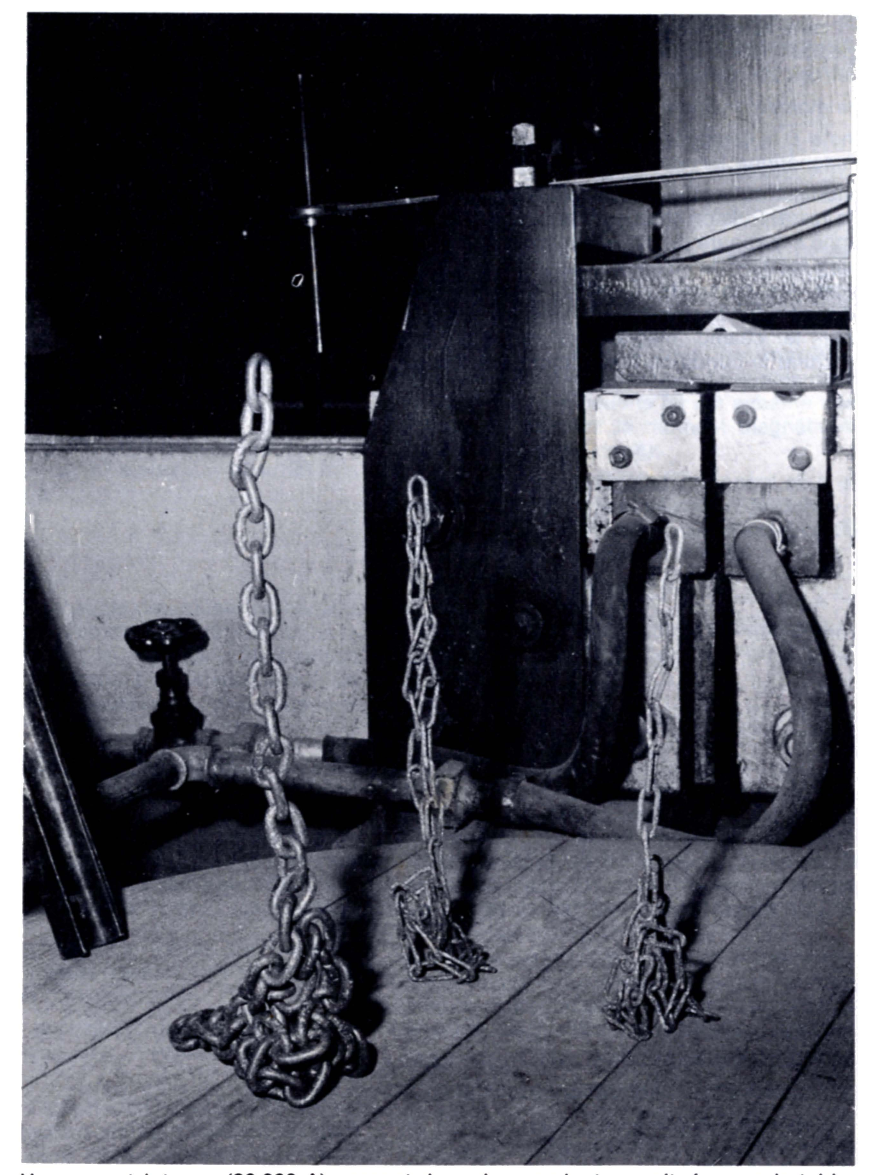
1. Aiguille aimantée influencée par un champ magnétique.
2. Spectres magnétiques.
3. Propriétés des lignes de champ.

II. Facteurs dont dépend le champ produit par un courant.

1. Influence de l'intensité du courant.
2. Cas d'un fil rectiligne « infiniment » long.
3. Cas d'un solénoïde « infiniment » long.

III. Applications.

1. Définition légale de l'ampère.
2. Électrodynamomètres.



Un courant intense (30 000 A) passant dans des conducteurs situés sous la table, crée un champ magnétique suffisant pour que de lourdes chaînes en fer se soulèvent.

Les circuits parcourus par des courants sont des sources de champs magnétiques dont on observe les manifestations dans l'espace qui les entoure. Étudions ce phénomène et quelques-unes de ses applications.

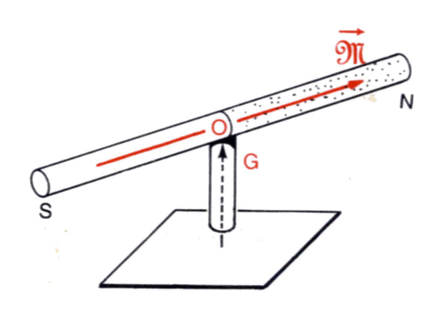
I. Topographie d'un champ magnétique.

La topographie d'un champ magnétique est une représentation graphique de la configuration spatiale du champ. Voici quelques méthodes permettant de la déterminer.

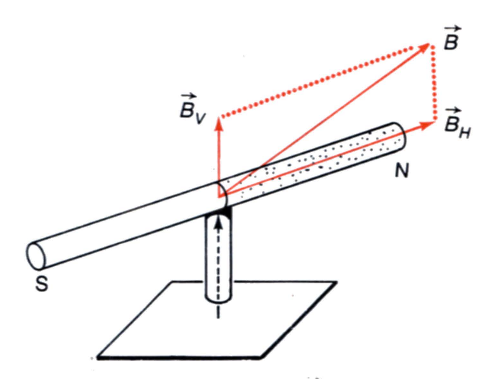
1. Aiguille aimantée influencée par un champ magnétique.

a) Position d'équilibre d'une aiguille aimantée astreinte à des déplacements dans un plan.

- Nous n'utiliserons dans ce chapitre que des aiguilles aimantées dont l'axe de rotation, perpendiculaire à l'axe magnétique $\overrightarrow{SN}$, sera maintenu vertical (figure 1). Leurs moments magnétiques $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ seront donc représentés par des vecteurs horizontaux.
- Tout champ magnétique $\overrightarrow{B}$ peut être considéré comme la somme vectorielle d'une composante horizontale $\overrightarrow{B_H}$ et d'une composante verticale $\overrightarrow{B_V}$. Le moment $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B_V}$ du couple dû à la composante verticale est un vecteur horizontal orthogonal à $\overrightarrow{SN}$. L'effet de ce couple est compensé par le couple antagoniste constitué par le poids du système et l'action en O de l'aiguille verticale de soutien. Tout se passe donc comme si la composante horizontale $\overrightarrow{B_H}$ agissait seule.



1. Barreau aimanté reposant en O sur une tige verticale pointue. La présence du manchon vertical en matière plastique abaisse le centre de masse *G* du système. Dès qu'un couple tend à faire tourner le barreau autour d'un axe horizontal, le moment $\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P}$ du poids $\overrightarrow{P}$ agit pour empêcher cette rotation (ou tout au moins la limiter considérablement). Le moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ du barreau, de mêmes direction et sens que l'axe magnétique $\overrightarrow{SN}$, reste donc pratiquement horizontal.



2. Un barreau aimanté astreint à des déplacements horizontaux s'oriente de telle sorte que son axe $\overrightarrow{SN}$ ait même direction et même sens que la composante horizontale $\vec{B}_H$ du champ magnétique $\vec{B}$.

• L'aiguille est en équilibre lorsque le couple $\mathfrak{M} \wedge \overrightarrow{B_H}$ est nul, c'est-à-dire quand $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ (ou $\overrightarrow{SN}$) et $\overrightarrow{B_H}$ sont colinéaires. L'équilibre est **stable** si $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ et $\overrightarrow{B_H}$ ont le même sens.
Ainsi, **une aiguille aimantée astreinte à des déplacements horizontaux tend à s'orienter de façon que son axe $\overrightarrow{SN}$ prenne la direction et le sens de la composante horizontale $\overrightarrow{B_H}$ du champ dans lequel elle est placée** (figure 2).

b) Oscillations d'un barreau aimanté.

• Lorsqu'une aiguille aimantée est écartée de sa position d'équilibre stable, elle effectue des **oscillations amorties** dont la fréquence est d'autant plus grande que le champ est plus intense. On démontre (voir exercice nº 36, page 264) que la **période T des petites oscillations,** c'est-à-dire la durée d'un « aller-retour » lorsque l'amplitude angulaire est petite, est inversement proportionnelle à la racine carrée de la valeur du champ magnétique.
Plus précisément,

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{J}{\mathfrak{M}B}}.$$

Dans cette relation, J et $\mathfrak{M}$ désignent respectivement le **moment d'inertie** (exprimé en kg . m^2) de l'aiguille par rapport à l'axe de rotation, et $\mathfrak{M}$ le **moment magnétique** (exprimé en A . m^2). B est la valeur de la composante du champ auquel l'aiguille est sensible.

c) Conclusion.

Une aiguille aimantée permet donc d'établir la topographie d'un champ magnétique :

— son **orientation** donne le sens du vecteur champ $\vec{B}$, parallèle à $\overrightarrow{SN}$ (où le champ terrestre est inclus) ;

— sa **période des petites oscillations** conduit à la valeur B du champ.
On obtient la topographie du champ en dessinant des flèches qui représentent, à une échelle donnée, les vecteurs champs aux divers points.

Exercice. Une aiguille aimantée astreinte à des déplacements horizontaux est placée au voisinage d'un circuit électrique. En l'absence de courant, elle effectue 10 petites oscillations en 12,2 s, sous l'influence du champ magnétique terrestre dont la composante horizontale a pour valeur $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ T. Lorsque le courant passe, 8 oscillations durent 4,5 s, et la nouvelle position d'équilibre se déduit par une rotation de 35° de son axe magnétique, en sens inverse des aiguilles d'une montre.
Déterminer les caractéristiques de la composante horizontale $\vec{B}_H$ du champ supplémentaire créé par le courant.

Solution. Sous l'influence du champ terrestre seul, la période vaut

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathfrak{M}B_0}} = 1{,}22 \text{ s}.$$

Dans le champ horizontal $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_H$ résultant du champ terrestre et de celui qui est créé par le courant,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathfrak{M}B}} = \frac{4{,}5}{8} \simeq 0{,}56 \text{ s}.$$

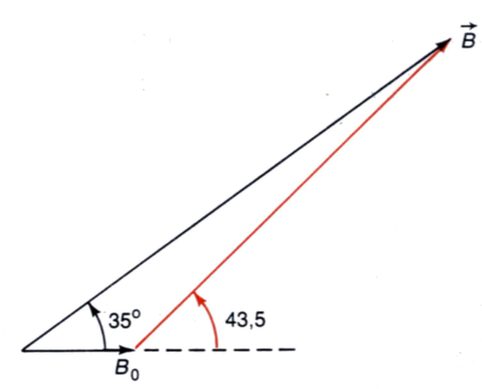
De $T_0\sqrt{B_0} = T\sqrt{B} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathfrak{M}}}$, on déduit :

$$B = B_0\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \simeq 2 \cdot 10^{-5}\left(\frac{1{,}22}{0{,}56}\right)^2 \simeq 9{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

La composante horizontale $\vec{B}_H$ cherchée est celle qui, ajoutée **vectoriellement** à $\vec{B}_0$ (terrestre), donne le champ $\vec{B}$ dont nous venons de calculer la valeur. Sur une figure faite à l'échelle 1 cm $\triangleq 10^{-5}$ T, construisons successivement (figure 3) :
— une flèche de longueur 2 cm représentant $\vec{B}_0$;
— une flèche de longueur 9,4 cm, formant avec $\vec{B}_0$ un écart angulaire de 35° : elle représente $\vec{B}$;
— la flèche représentant $\vec{B}_H = \vec{B} - \vec{B}_0$. Sa longueur, mesurée sur la construction, est de 7,9 cm. D'où $B_H \simeq 7{,}9 \cdot 10^{-5}$ T. La mesure, au rapporteur, de l'écart angulaire α entre $\vec{B}_0$ et $\vec{B}_H$, donne $\alpha \simeq 43{,}5°$

Remarque : Le calcul de B_H peut se faire par la relation trigonométrique :

$$B_H^2 = B_0^2 + B^2 - 2\,B_0\,B\cos 35°.$$



3. Détermination de la composante horizontale B_H créée par un courant, à partir de mesures réalisées à l'aide d'une aiguille aimantée.
$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_H$ ou $\vec{B}_H = \vec{B} - \vec{B}_0$.

2. Spectres magnétiques.

a) Action d'un champ magnétique sur un barreau de fer non aimanté.

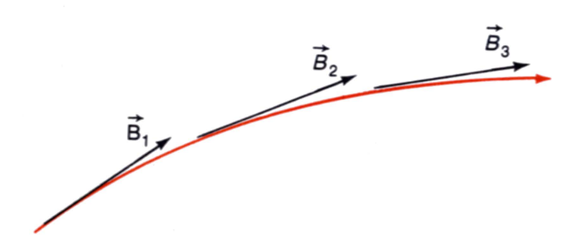
• **Expérience.** Attachons un clou en fer par un fil de faible constante de torsion, noué autour du centre de masse : le clou suspendu reste sensiblement horizontal. Approchons lentement, perpendiculairement au milieu du clou, l'extrémité nord ou sud d'un aimant droit. Nous observons que le clou, bien qu'initialement non aimanté, **s'oriente** parallèlement à l'aimant avant d'être attiré par lui.

• **Interprétation.** Le champ magnétique de l'aimant, plus important que le champ terrestre qui n'intervient pas de façon sensible, agit sur les électrons du clou en fer et met de l'ordre dans leurs mouvements. Le clou acquiert ainsi les propriétés d'un aimant. Si l'on approche une extrémité nord, la pointe du clou la plus proche devient sud. Les interactions ne se réduisent pas à un couple, car le champ de l'aimant est non uniforme.

• **Conclusion.** Placé dans un champ magnétique, un petit barreau de fer s'aimante dans le sens de sa plus grande longueur.

• **Application.** La propriété précédente est mise à profit pour réaliser des **spectres magnétiques.** En saupoudrant de limaille de fer un carton placé dans le champ magnétique d'un aimant ou d'un courant, chaque grain de limaille devient un mini-aimant qui s'oriente dans le champ ($\overrightarrow{SN} \mathbin{/\!/} \vec{B}$). Les interactions nord-sud entre les extrémités des grains les organisent en files qui matérialisent les **lignes de champs,** c'est-à-dire des courbes tangentes en tout point aux divers vecteurs $\vec{B}$ (figure 4).

Une ligne de champ est tangente en chacun de ses points aux vecteurs champs.



4. Une ligne de champ est tangente en ses divers points aux vecteurs $\vec{B}$. On l'oriente dans le sens correspondant à $\vec{B}$.

b) Exemples de spectres magnétiques.

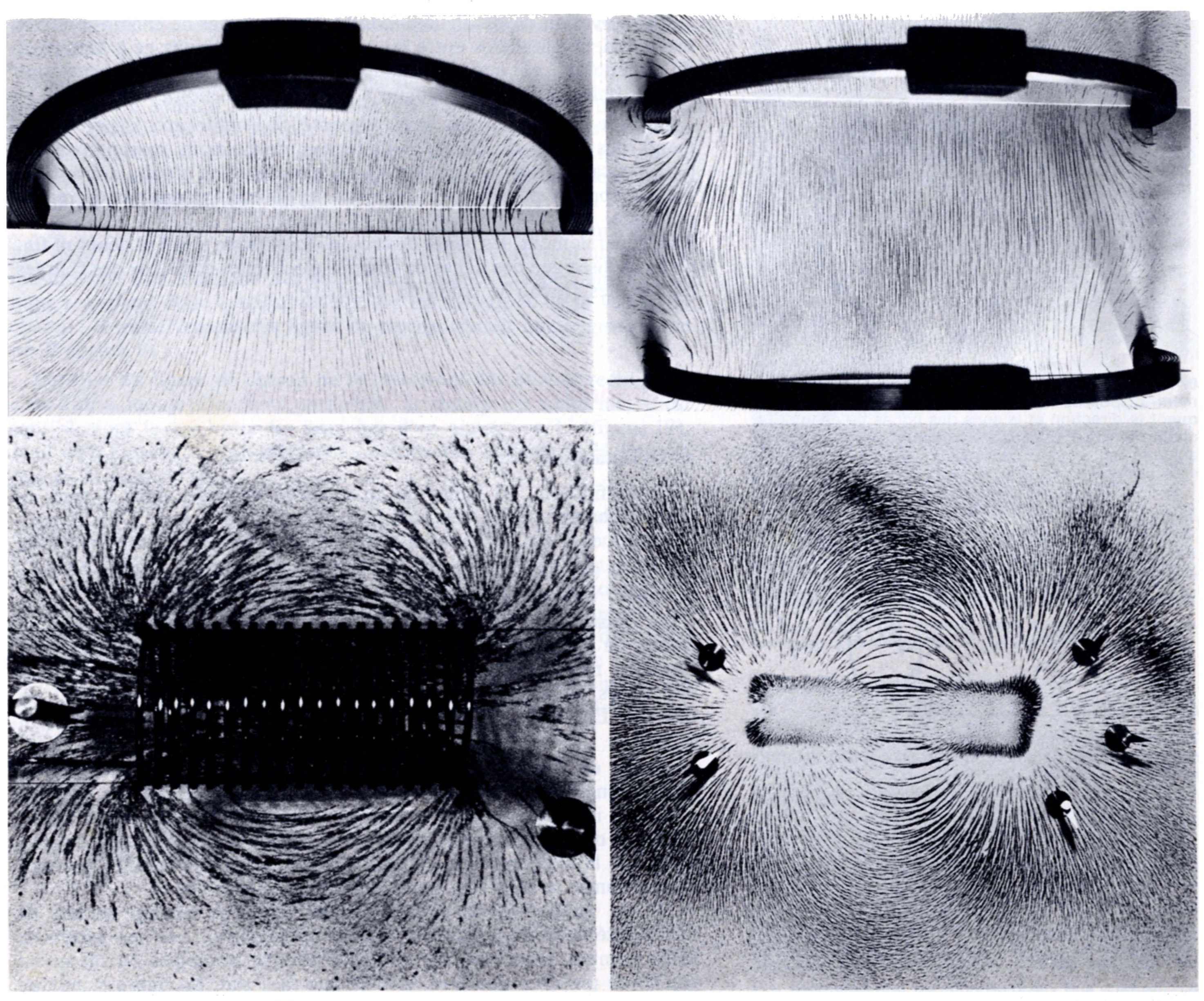
• Les figures 5 (page 177) montrent des photographies de spectres magnétiques et leur schématisation :

— pour une **bobine circulaire plate** (figure 5a) ;

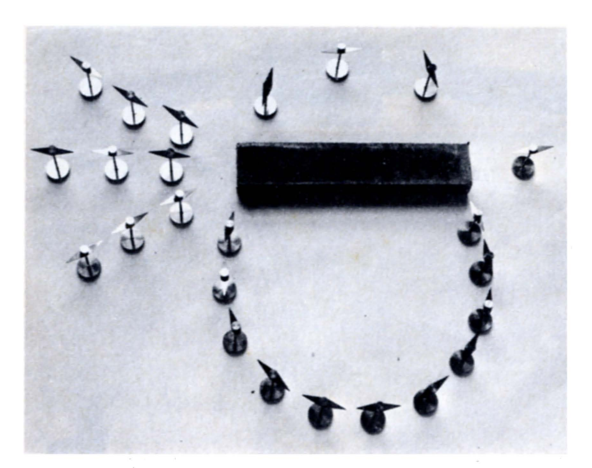
— pour deux bobines circulaires plates, parallèles, dont **la distance est égale au rayon.** Ce dispositif porte le nom de **bobines de Helmholtz** (figure 5b) ;

— pour une succession de spires enroulées en hélice, constituant un **solénoïde court** (figure 5c) ;

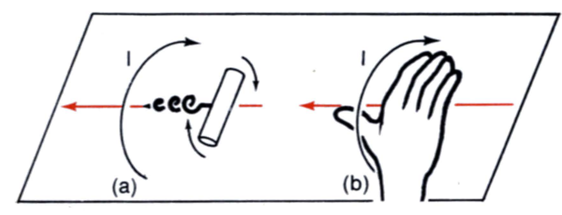
— pour un **aimant droit** (figure 5d).



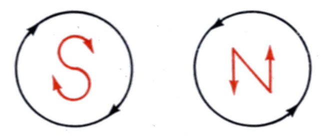
5. Exemples de spectres magnétiques.



6. Plusieurs petites aiguilles aimantées, convenablement disposées dans un champ magnétique, indiquent la direction et le sens des lignes de champ. Le champ terrestre, ainsi que le champ créé par chaque aiguille, est négligeable vis-à-vis de celui que l'aimant crée près de lui.



7. Deux moyens mnémotechniques pour retrouver le sens des lignes de champ quand on connaît celui du courant.



8. Une face sud vue d'un côté est une face nord vue de l'autre côté.

• L'observation de ces figures montre que les lignes de champ sont très sensiblement parallèles entre les bobines de Helmholtz et à l'intérieur du solénoïde, et que le champ d'un aimant droit présente une topographie extérieure analogue à celle d'un solénoïde court.

• Dans le cas du barreau droit aimanté, il semble que les prolongements des lignes de champ à l'intérieur de l'aimant passent par des points localisés vers les extrémités du barreau. Ces points, qui ont été parfois appelés pôle nord et pôle sud de l'aimant, n'ont pas de réalité physique.
Plus généralement, **les lignes de champ magnétique n'ont ni début ni fin.** Cela les distingue des lignes de champs électriques créés par des charges ponctuelles (revoir le cours de Première).

3. Propriétés des lignes de champ.

a) Orientation.

• Par définition, les lignes de champ sont **orientées dans le sens du vecteur champ** auquel elles sont tangentes (figure 4, page 176). Expérimentalement, cette orientation peut être déterminée en observant l'axe $\overrightarrow{SN}$ d'une (ou plusieurs) petite(s) aiguilles(s) aimantée(s) placée(s) dans le champ (photographie 6).

• **On constate que l'orientation des lignes de champ s'inverse lorsqu'on change le sens du courant dans tous les circuits sources du champ.** Plusieurs moyens mnémoniques sont utilisables pour retrouver le sens des lignes de champ en corrélation avec le sens conventionnel du courant. En voici quelques-uns ; vous choisirez celui qui vous convient le mieux.

— **Règle du tire-bouchon** enfoncé selon l'axe d'une bobine plate ou d'un solénoïde en le faisant tourner dans le sens indiqué par celui du courant : il progresse dans le sens des lignes de champ (figure 7a).

— **Règle de la main droite** posée sur la bobine ou le solénoïde de telle sorte que le majeur indique le sens conventionnel du courant : le pouce écarté donne le sens des lignes de champ (figure 7b).

— Il est aussi bon de savoir que **les lignes de champ sortent de l'extrémité nord** d'un barreau aimanté (et pénètrent par son extrémité sud), comme on le voit sur la figure 5d. Par analogie, on dit qu'un solénoïde présente une face nord et une face sud. La figure 8 indique comment retrouver la face que l'on regarde.

b) La valeur du champ augmente lorsque les lignes de champ se resserrent.

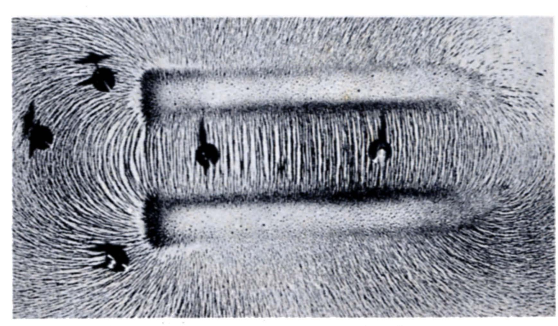
• Éloignons progressivement une aiguille aimantée d'un circuit parcouru par un courant, source de champ magnétique. Nous observons que la période de ses petites oscillations augmente et se stabilise lorsque l'aiguille n'est plus sensible qu'au champ terrestre. Par suite, comme on pouvait le prévoir, **la valeur du champ magnétique diminue lorsqu'on s'éloigne de sa source.**

• Les divers spectres magnétiques étudiés précédemment (en particulier page 177) montrent que les lignes de champ s'écartent au fur et à mesure que l'on s'éloigne des sources de champ. L'aspect du spectre nous renseigne donc qualitativement sur les variations de la valeur du champ : **le resserrement des lignes de champ traduit une augmentation de *B*** (figure 9).

• Lorsque les lignes de champ ne se resserrent pas et sont rectilignes, c'est-à-dire lorsqu'elles sont parallèles, le champ est **uniforme.** C'est sensiblement le cas entre les branches d'un aimant en U (figure 10), ainsi qu'à l'intérieur d'un solénoïde ou entre des bobines de Helmholtz (figure 5, page 177).



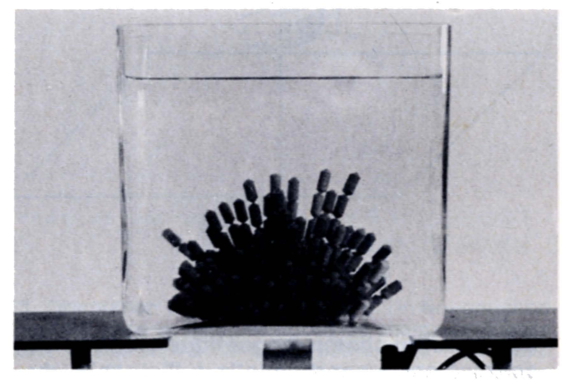
9. La valeur du champ augmente lorsque les lignes de champ se resserrent.



10. Les lignes de champ sont parallèles entre les branches d'un aimant en U : le champ y est uniforme.

c) Répartition spatiale des lignes de champ.

En réalisant les spectres de limaille sur des plaques en carton, nous n'obtenons la topographie du champ que dans un plan horizontal. On observe le début des lignes de champ **dans l'espace** en trempant un aimant droit dans la limaille de fer. On peut aussi utiliser des petits cylindres de fer doux enrobés de matière plastique peu dense : chaque élément, de même densité globale que l'eau, reste en suspension. En approchant un aimant sous le récipient, on matérialise spatialement les lignes de champ (photo 11).



11. Matérialisation, dans l'espace, des lignes de champ magnétique.

II. Facteurs dont dépend le champ magnétique créé par un courant.

L'étude des spectres magnétiques a montré que la valeur B du champ magnétique dépend de la **forme géométrique** du circuit et de la **distance** à la source. B dépend aussi de **l'intensité** du courant. Voyons comment.

1. Proportionnalité à l'intensité du courant.

- Envisageons un circuit de forme quelconque parcouru par un courant. Si nous doublons, triplons... l'intensité du courant, tout se passe comme si nous superposions deux, trois... circuits identiques, chacun étant responsable du même champ. Le champ créé va donc probablement lui aussi doubler, tripler... **Par suite, nous pressentons que le champ magnétique créé en un point de l'espace est proportionnel à l'intensité du courant qui passe dans le circuit quelconque source du champ.**
- L'expérience confirme cette prévision. On vérifie par exemple que le carré de la fréquence des petites oscillations d'une aiguille aimantée est proportionnel à l'intensité du courant

$$\left(T = \frac{1}{N} = 2\,\pi\sqrt{\frac{J}{\mathfrak{M}B}}\right).$$

- Quel que soit le circuit, on peut donc écrire que le champ créé en un point est tel que

$$B = KI,$$

où K est une constante de proportionnalité qui dépend de la distance au circuit et des caractéristiques géométriques de ce dernier, ainsi que des unités choisies pour exprimer les diverses grandeurs.

- Lorsque les circuits ont une forme géométrique simple, l'expression théorique de K est connue. Voici deux exemples : les cas du fil rectiligne et du solénoïde très longs.

La valeur du champ magnétique créé par un courant est proportionnelle à l'intensité du courant.

2. Champ d'un fil rectiligne très long.

a) Spectre magnétique.

- La figure 12 montre le spectre de limaille créé par un courant assez intense (plusieurs ampères) passant dans un fil vertical assez long pour que ses extrémités supérieure et inférieure ne contribuent pas de façon sensible à la création du champ autour du milieu du fil. **Les lignes de champ sont circulaires,** centrées sur le fil.
- Des aiguilles aimantées, disposées autour du fil, indiquent par leur axe *SN* le sens des lignes de champ, que l'on peut retrouver en utilisant les règles du tire-bouchon ou de la main droite (figure 13).



12. Lignes de champ magnétique d'un fil rectiligne très long.

b) Influence de la distance.

- Le long d'une ligne de champ circulaire, la valeur de $\vec{B}$ reste constante. En effet, les lignes voisines ne s'en rapprochent ou ne s'en écartent pas.
- La loi de décroissance de la valeur B du champ avec la distance r au fil peut être déterminée expérimentalement par la méthode des oscillations d'une aiguille aimantée (voir exercice n° 22, page 190). On trouve que B est inversement proportionnel à r.

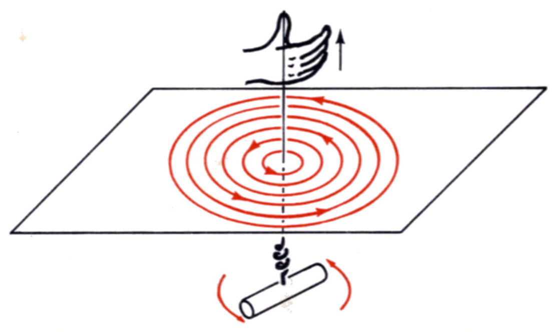
c) Expression de la valeur du champ.

Il résulte de ce qui précède que le champ créé à la distance r du fil est de la forme $B = K\dfrac{I}{r}$.

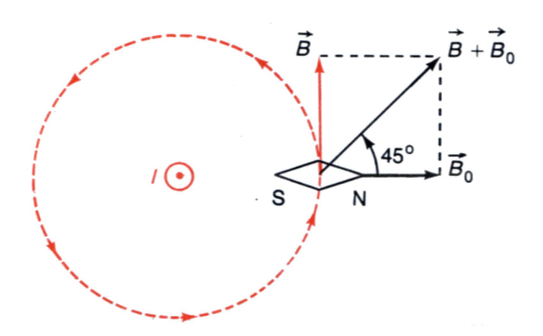
Il est d'usage de faire intervenir la longueur $2\,\pi r$ d'une ligne de champ en posant $K = \dfrac{\mu_0}{2\,\pi}$, où μ_0 est une constante qui **dépend des unités** choisies pour exprimer B, I et r. Pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons à la fin de ce chapitre, on pose que, **par définition,** μ_0 vaut exactement $4\,\pi \,.\, 10^{-7}$ lorsqu'on utilise le Système International.

En somme,
$$\boxed{B = \mu_0 \frac{I}{2\,\pi r}},$$

avec $\mu_0 = 4\,\pi \,.\, 10^{-7}$ SI soit : $B = 2 \,.\, 10^{-7}\dfrac{I}{r}$.



13. Orientation des lignes de champ. Un tire-bouchon tournant dans le sens des lignes de champ progresse dans le sens conventionnel du courant. La main droite tenant le fil de sorte que le pouce indique le sens du courant, le majeur donne le sens de rotation des lignes de champ.



14. Action d'un courant vertical sur une aiguille aimantée dont l'axe magnétique $\overrightarrow{SN}$ passe initialement par le fil (la figure est vue d'au-dessus).

d) Application : composante horizontale du champ terrestre.

• **Expérience.** Plaçons le support vertical d'une aiguille aimantée à 5 cm d'un fil conducteur vertical, de sorte que l'axe magnétique $\overrightarrow{SN}$ de l'aiguille passe par le fil en l'absence de courant (figure 14). On observe que l'aiguille tourne de 45° lorsque l'intensité du courant est de 5 A.

• **Interprétation.** Le courant crée un champ $\vec{B}$ orthogonal à la composante horizontale $\vec{B_0}$ du champ terrestre. Sa valeur est

$$B = 4\,\pi\,.\,10^{-7} \times \frac{5}{2\,\pi \times 5\,.\,10^{-2}} = 2\,.\,10^{-5}\ \text{T}\,.$$

$\vec{B}$ et $\vec{B_0}$ ont même valeur puisque l'aiguille a tourné de 45° : $B_0 \approx 2\,.\,10^{-5}$ T.

• **Remarque.** En observant la position d'équilibre, dans le champ terrestre, d'une aiguille aimantée dont l'axe de suspension passe par le centre de masse, on en déduit connaissant B_0 les valeurs du champ terrestre et de sa composante verticale (exercice n° 27, page 191).

3. Champ magnétique intérieur à un solénoïde très long.

Un solénoïde est considéré comme long quand sa longueur dépasse environ cinq fois le diamètre de ses spires.

a) Expression du champ magnétique intérieur.

• La figure 5c (page 177) a montré que le champ est déjà sensiblement uniforme à l'intérieur d'un solénoïde court. Cependant, au voisinage des extrémités, les lignes de champ commencent à s'écarter les unes des autres. L'uniformité du champ intérieur s'améliore quand on augmente la longueur du solénoïde et le nombre de ses spires : si ces dernières sont trop écartées, on voit, tout près et autour d'elles, des spectres analogues à ceux des fils rectilignes.

Lorsque les lignes de champ sont parallèles, le champ est uniforme.

La valeur du champ magnétique augmente dans les régions où les lignes de champ se resserrent.

• Pour un **solénoïde très long** (et, en toute rigueur, infiniment long afin que ses extrémités ne contribuent plus à créer le champ central) la théorie montre que le champ vaut, en tout point intérieur,

$$\boxed{B = \mu_0 n_1 I} ,$$

où n_1 désigne le **nombre de spires par unité de longueur de solénoïde.** Si une portion de longueur L d'un solénoïde comporte N spires, $n_1 = \frac{N}{L}$.

$\mu_0 = 4 \pi . 10^{-7}$ SI est la même constante que dans le cas précédent.

• **Exemple.** Un solénoïde comportant 1 000 spires par mètre, parcouru par un courant $I = 2$ A, crée un champ intérieur de valeur $B = 4 \pi . 10^{-7} \times 1\,000 \times 2 \risingdotseq 2{,}5 . 10^{-3}$ T. Le champ terrestre est alors négligeable vis-à-vis de B ($B_0 \sim 0{,}01\, B$).

Champ à l'intérieur d'un solénoïde très long :

$$B = \mu_0 n_1 I.$$

Champ d'un fil rectiligne très long, à la distance *r* du fil :

$$B = \mu_0 \frac{I}{2 \pi r}.$$

b) Vérifications expérimentales.

• Avec une **sonde de Hall** (chapitre 9, page 158), on mesure les champs magnétiques avec une plus grande précision que par la méthode des petites oscillations d'une aiguille aimantée (qu'il serait d'ailleurs difficile d'observer dans un long solénoïde aux spires très rapprochées).

• Une sonde de Hall, convenablement amplifiée, introduite dans un solénoïde (qui peut être un long ressort), permet de vérifier que la valeur du champ magnétique :

— est proportionnelle à l'intensité du courant ;

— tend vers une limite supérieure lorsqu'on fait passer un courant d'intensité donnée dans un nombre croissant de spires situées de part et d'autre de la sonde (on passe ainsi d'un solénoïde court à un long) ;

— est proportionnelle au nombre de spires par unité de longueur (en écartant plus ou moins les spires, à intensité I constante).

• **Exemple numérique.** Un solénoïde assez long, comportant 485 spires par mètre, parcouru par un courant de 5 A, donne lieu dans sa région centrale à une tension de Hall amplifiée de 61 mV, lorsque l'amplification est telle que 100 mV $\widehat{=}$ 5 . 10^{-3} T.

On en déduit : $\mu_0 = \frac{B}{n_1 I} = \frac{5 . 10^{-5} \times 61}{485 \times 5} \risingdotseq 1{,}26 . 10^{-6}$ SI ,

ce qui est voisin de la valeur théorique $4 \pi . 10^{-7}$.

III. Applications.

1. Définition légale de l'ampère.

a) Interaction entre deux fils rectilignes très longs.

• **Expérience.** Deux fils parallèles, disposés comme l'indique la figure 15, sont en interaction attractive si les courants sont de même sens, répulsive dans le cas contraire.

• **Interprétation.** Chaque fil est situé dans le champ magnétique créé par l'autre et subit par conséquent une force de Laplace. Le courant parcourt des fils sensiblement horizontaux ; les champs magnétiques créés sur chaque fil sont pratiquement verticaux : les forces de Laplace sont horizontales (vous préciserez leurs sens selon les sens des courants).

• **Forces linéiques d'interaction.** Envisageons le cas de deux fils distants de d, parcourus par deux courants I_1 et I_2 de même sens (figure 16).

— Le fil n° 1 crée en tout point du fil n° 2 un champ $\vec{B}_1$ de valeur

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d}.$$

— Une longueur l_2 du fil n° 2 subit une force de Laplace $\vec{f}_{1/2} = I_2 \vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1$, dirigée vers le fil n° 1, de valeur :

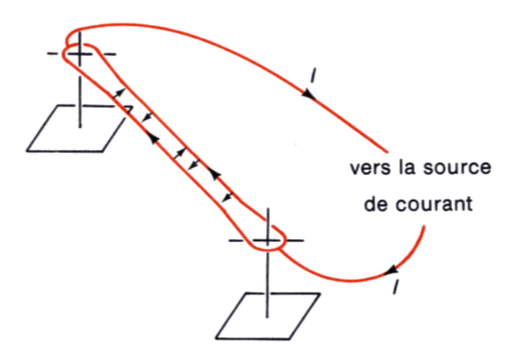
$$f_{1/2} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l_2.$$

— Un calcul identique montre qu'une longueur l_1 du fil n° 1 subit une force de Laplace $\vec{f}_{2/1}$, dirigée vers le fil n° 2, de valeur :

$$f_{2/1} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l_1.$$

Les deux fils sont donc soumis à des **forces linéiques** $\frac{f}{l}$ **opposées,** de valeurs telles que :

$$\frac{f_{1/2}}{l_2} = \frac{f_{2/1}}{l_1} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d}.$$



15. Deux fils assez longs en dérivation, reposant sur deux supports qui les maintiennent à quelques centimètres l'un de l'autre, s'attirent lorsqu'ils sont parcourus par des courants de même sens. Les effets ne sont visibles que lorsque les courants sont intenses.
En repliant un fil sur lui-même au lieu d'utiliser la dérivation, on observe une répulsion entre les courants de sens contraires.

b) L'ampère, unité SI d'intensité.

• Pour deux fils rectilignes très longs, distants de $d = 1$ m et parcourus dans le même sens par le même courant d'intensité **unitaire,** la force linéique d'interaction vaut

$$\frac{f}{l} = \mu_0 \frac{1 \times 1}{2\,\pi \times 1} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\mu_0}{2\,\pi}.$$

Il suffit donc de choisir la valeur de μ_0 pour définir l'unité d'intensité.

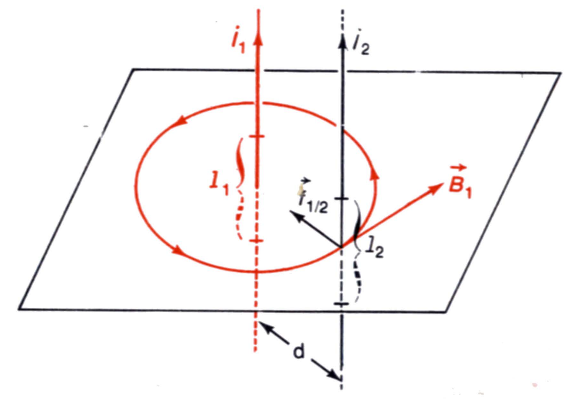
• C'est au Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) qu'il incombe de choisir la définition des unités. Ces unités doivent former un ensemble cohérent et il arrive, en fonction de la technologie actuelle, que l'on change la définition de l'unité de certaines grandeurs (c'est ainsi que le mètre a été successivement défini en relation avec le méridien terrestre, avec un mètre-étalon, puis une longueur d'onde lumineuse). Pour ne pas avoir à modifier profondément d'anciennes unités d'intensité, le BIPM a décidé que la valeur de μ_0 serait **exactement** égale à $4\,\pi\,.\,10^{-7}$. En outre, l'introduction de ce facteur $4\,\pi$ conduit à des formules ultérieures plus simples (par exemple, $\vec{f} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$ s'écrit sans coefficient numérique).

• Le décret du 4 décembre 1975 précise que **« l'ampère est l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait, entre ces conducteurs, une force de $2\,.\,10^{-7}$ newton par mètre de longueur ».** En d'autres termes, $\dfrac{\mu_0}{2\,\pi} = 2\,.\,10^{-7}$ et $\mu_0 = 4\,\pi\,.\,10^{-7}$ par définition.

c) Le coulomb, unité dérivée.

• La définition de **l'unité de charge électrique** découle de celle de l'ampère : **« le coulomb est la quantité d'électricité transportée en 1 seconde par un courant de 1 ampère ».**

• D'après la formule de Coulomb $f = \dfrac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq'}{r^2}$, la force d'interaction entre deux charges de 1 C, situées à la distance $r = 1$ m, est numériquement égale à $f = \dfrac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}$. En mesurant cette force, ce qui ne peut



16. Interactions entre fils rectilignes parallèles très longs.

$\mu_0 = 4\,\pi\,.\,10^{-7}$ SI (exactement)

$\dfrac{1}{4\,\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}\,c^2$ SI (exactement)

$\dfrac{1}{4\,\pi\varepsilon_0} \approx 9\,.\,10^9$ SI (approximativement).

être actuellement fait avec une grande précision, on pourrait en déduire la valeur **mesurée** de $\dfrac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}$. Mais il résulte des travaux de James Clerck Maxwell, sur les ondes électromagnétiques qui se propagent dans le vide à la célérité c, que les constantes ε_0 et μ_0 sont liées par la relation

$$\boxed{\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1}\ .$$

C'est donc plutôt en mesurant c que l'on déduit la valeur de ε_0. Avec $c \approx 3\,.\,10^8$ m/s, et $\mu_0 = 4\,\pi\,.\,10^{-7}$, on obtient $4\,\pi\varepsilon_0\,.\,10^{-7}\,c^2 = 1$ d'où $\dfrac{1}{4\,\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}\,c^2 \approx 9\,.\,10^9$ SI.

2. Électrodynamomètres.

a) Principe.

Les **électrodynamomètres** sont des dispositifs basés sur l'existence des interactions entre courants. La figure 17 donne le principe d'un appareil où une bobine fixe (S_1) agit sur une bobine plate (P_2) mobile autour d'un axe fixe.

b) Utilisation.

L'exercice suivant montrera que l'on peut déduire le **produit** $I_1\,I_2$ de la mesure de $\alpha \left(I_1\,I_2 = K\,\dfrac{\alpha}{\cos\alpha}\right)$.

• En plaçant les deux bobines (S_1) et (P_2) en série ($I_1 = I_2$), à chaque valeur de α correspond une valeur de I^2, donc de I. On peut donc graduer directement l'appareil en ampère ; on dispose ainsi d'un **ampèremètre électrodynamique.**

• Si les intensités précédentes sont proportionnelles à une tension $U\,(I_1 = I_2 = GU)$, l'appareil peut être gradué en volt (**voltmètre électrodynamique**).

• Si I_2 est l'intensité qui traverse un appareil et si I_1 est proportionnel à sa tension aux bornes, la valeur de α est liée à la **puissance** UI : on gradue en watt (**wattmètre électrodynamique**).

• **Remarque.** La position d'équilibre n'est pas modifiée lorsque les deux intensités changent simultanément de sens. Moyennant certains aménagements, un électrodynamomètre s'utilise en courant alternatif.

Exercice résolu.

• **Énoncé.** La bobine (S_1) de la figure 17 est assimilée à un solénoïde long comportant n_1 spires par mètre. (B_2) est une bobine plate de N_2 spires, chacune d'aire S_2. Un ressort spiral de rappel, de constante de torsion k, est fixé de sorte que l'axe de (P_2) soit orthogonal à celui de (S_1) en l'absence de courant.

a) (S_1) et (P_2) sont parcourues respectivement par des courants I_1 et I_2 dont les sens sont indiqués sur la figure. Établir la relation donnant l'angle α de rotation de (P_2) à l'équilibre, en fonction de I_1, I_2 et des diverses caractéristiques des bobines.

b) Application numérique : $I_1 = I_2 = 0{,}5$ A ; $n_1 = 400$ spires par mètre ; $N_2 = 100$ spires ; $S_2 = 2$ cm² ; $k = 4 \cdot 10^{-6}$ N . m/rad. Déterminer α par une méthode graphique.

• **Solution.**
a) (S_1) crée un champ magnétique de valeur $B_1 = \mu_0 n_1 I_1$.

Le moment magnétique de la bobine (P_2) est $\vec{\mathcal{M}}_2 = N_2 I_2 \vec{S}_2$ (où $\vec{S}_2$ désigne le vecteur superficie, orienté en supposant que le sens positif de parcours sur (P_2) est celui de I_2). Lorsque (P_2) tourne de α, $\vec{\mathcal{M}}_2$ forme avec $\vec{B}_1$ un écart angulaire $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Le couple électromagnétique $\vec{\Gamma}_2 = \vec{\mathcal{M}}_2 \wedge \vec{B}_1$ a pour valeur absolue $\Gamma_2 = N_2 I_2 S_2 B_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = N_2 I_2 S_2 \mu_0 n_1 I_1 \cos\alpha$. Celle du couple de rappel antagoniste est $\Gamma = k\alpha$.

A l'équilibre, $k\alpha = \mu_0 n_1 N_2 I_1 I_2 S_2 \cos\alpha$, qui s'écrit aussi, en posant

$$K = \frac{k}{\mu_0 n_1 N_2 S_2},$$

$$K\alpha = I_1 I_2 \cos\alpha .$$

b) Lorsque I_1 et I_2 sont connus, ainsi que K, α peut être déterminé graphiquement en cherchant l'abscisse du point d'intersection d'une sinusoïde ($y_1 = \cos\alpha$) avec une droite $y_2 = \frac{K}{I_1 I_2}\alpha$.

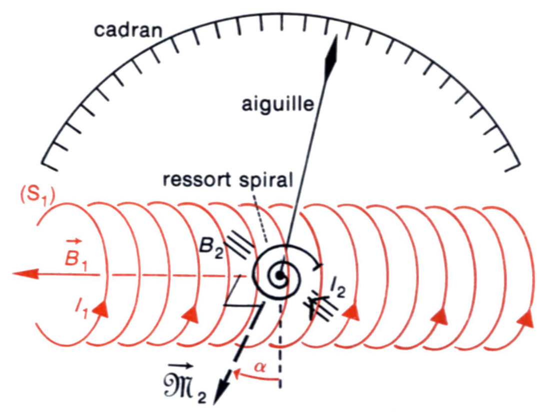
L'application numérique donne :

$$K = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 400 \times 100 \times 2 \cdot (10^{-2})^2} \approx 0{,}40 \text{ SI} .$$

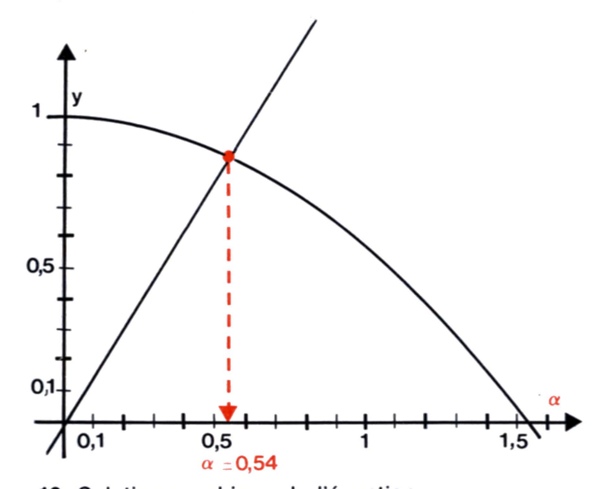
Représentons graphiquement, en fonction de α exprimé en radian (car la constante k est donnée en N . m/rad), la sinusoïde $y_1 = \cos\alpha$ et la droite

$$y_2 = \frac{K}{I_1 I_2}\alpha \triangleq 1{,}59\ \alpha \text{ (figure 18).}$$

L'abscisse du point d'intersection des deux courbes est 0,54 rad, soit environ 31°. La bobine plate se retrouve en équilibre après avoir tourné de 31°.



17. La bobine fixe S_1 crée un champ $\vec{B}_1$ dont la valeur est proportionnelle à I_1. La bobine plate P_2, de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}_2$, est soumise au couple électromagnétique $\vec{\Gamma}_2 = \vec{\mathcal{M}}_2 \wedge \vec{B}_1$ équilibré par un couple de rappel $\vec{\Gamma}$ dû au ressort spiral. A l'équilibre, $\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}_2 = \vec{0}$. Dans ce cas de figure, $\vec{\mathcal{M}}_2$ est orthogonal à l'axe de S_1 lorsque $I_1 = 0$ (alors, $\alpha = 0$). Une aiguille, solidaire de l'axe de rotation (en dehors de S_1) se déplace devant un cadran.



18. Solution graphique de l'équation

$$\cos\alpha = \frac{K}{I_1 I_2}\alpha .$$

Lecture

Ampère et l'électromagnétisme.



C'est probablement au début du mois de septembre 1820 qu'Ampère a eu connaissance de la découverte du physicien danois Œrsted relative à la déviation des aiguilles aimantées par les courants rectilignes. Dans une lettre commencée le 19 septembre, achevée le 25, Ampère relate ses essais à son fils dans les termes suivants : « Depuis que j'ai entendu parler pour la première fois de la belle découverte de M. Œrsted, professeur à Copenhague, sur l'action des courants galvaniques sur l'aiguille aimantée, j'y ai pensé continuellement ; je n'ai fait qu'écrire une grande théorie sur ces phénomènes et tous ceux déjà connus de l'aimant, et tenté des expériences indiquées par cette théorie ; qui toutes ont réussi et m'ont fait connaître autant de faits nouveaux. Je lus le commencement d'un mémoire à la séance de lundi, il y a aujourd'hui huit jours. Je fis, les jours suivants, tantôt avec Fresnel, tantôt avec Despretz, les expériences confirmatives. Je les répétai toutes vendredi chez Poisson, où s'étaient réunis les deux Demussy, Rendu, plusieurs élèves de l'Ecole Normale, le général Campredon, etc. Tout réussit à merveille, mais l'expérience décisive, que j'avais conçue comme preuve définitive, exigeait deux piles galvaniques ; tentée avec des piles trop faibles chez moi avec Fresnel, elle n'avait point réussi ; enfin, hier, j'obtins de Dulong qu'il permît à Dumotier de me vendre la grande pile qu'il faisait construire pour le cours de physique de la Faculté, et l'expérience a été faite chez Dumotier avec un plein succès, et répétée aujourd'hui à 4 heures à la séance de l'Institut... »

La lettre précédente a été citée par P. Janet lors d'une conférence organisée en 1928 par la Société Française de Physique. Cette conférence s'achevait ainsi : « Il est toujours dangereux d'essayer de reconstituer la marche des idées d'un grand esprit au moment de son effort créateur. Il semble bien pourtant, que, voulant pousser plus loin l'expérience d'Œrsted, Ampère songea, dès ce jour, à employer des spirales *et des hélices galvaniques. Ces appareils n'étaient pas encore construits ; mais avec une intuition admirable, Ampère prévit qu'ils se comporteraient comme des aimants. Ce pas franchi, la marche des idées apparaît aussi claire que possible : puisque ces spirales, ces solénoïdes, doivent se comporter comme des aimants, les aimants ne seraient-ils pas, de simples solénoïdes, ce qui ramènerait le magnétisme à l'électricité ; mais si cela est, deux courants doivent agir l'un sur l'autre, fait nouveau que personne n'avait soupçonné jusque-là. L'expérience est faite et donne les résultats attendus : Ampère lui-même en a raconté le succès dans la lettre adressée à son fils.*

« Tout cela, dira-t-on, ce sont des vues théoriques qui peuvent intéresser le savant, mais ne touchent guère le praticien. On ne pourrait commettre de plus grande erreur. C'est, en effet, de ces vues théoriques qu'est sorti tout l'électromagnétisme avec ses lois et ses méthodes de calcul ; il faut le dire bien haut : le bureau d'études qui aujourd'hui calcule un moteur électrique se sert exclusivement des méthodes d'Ampère ou des méthodes qui en dérivent immédiatement : voilà la trace profonde que le grand savant aura laissée dans l'industrie électrique moderne. »

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- Placée dans un ______ une aiguille aimantée s'oriente de telle sorte que son ______ $\overrightarrow{SN}$ soit ______ au vecteur ______ .
- Les ______ de limaille de fer donnent l'allure des ______ . Lorsque ces ______ se resserrent, la valeur du champ ______ .
- Les lignes de champ sont ______ en tout point au vecteur ______ . Lorsqu'elles sont parallèles, le champ est ______ .
- La valeur du champ magnétique créé par un courant est, en un point donné de l'espace, ______ de ce courant. Autour d'un fil rectiligne très long et à l'intérieur d'un ______ très long, la valeur du champ magnétique est donnée par les formules suivantes : ______ , où les lettres signifient : ______ .
- L'unité SI d'intensité est l' ______ , défini comme suit : ______ . Cette définition revient à choisir pour μ_0 la valeur $\mu_0 =$ ______ .

Petites questions.

1. Deux lignes de champ magnétique peuvent-elles se croiser ?

2. Deux lignes de champ magnétique voisines peuvent-elles être parallèles et de sens contraire ?

3. Le nombre des lignes de champ créées par un dispositif donné est-il limité ?

4. Pourrait-on réaliser des spectres de limaille sur des surfaces polies pratiquement sans frottements ?

5. L'allure d'un spectre magnétique dépend-il de l'intensité du courant source de champ ?

6. Quels dispositifs pouvez-vous utiliser pour obtenir des champs magnétiques uniformes ?

7. Une aiguille aimantée horizontale est placée entre deux bobines de Helmholtz. L'intensité du courant est telle que le champ magnétique terrestre est négligeable vis-à-vis du champ créé. Que devient la période des petites oscillations si l'on quadruple l'intensité du courant ?

8. Deux aiguilles aimantées horizontales, placées successivement au même point, oscillent avec la même période. Ont-elles nécessairement le même moment d'inertie J ? le même moment magnétique $\mathfrak{M}$? le même rapport $\frac{J}{\mathfrak{M}}$?

9. A quelles conditions une aiguille aimantée, placée au voisinage d'un circuit, se retourne-t-elle de 180° lorsqu'on inverse le sens du courant ?

10. Comparez les avantages et les inconvénients des solénoïdes et des bobines de Helmholtz en tant que sources de champs magnétiques uniformes.

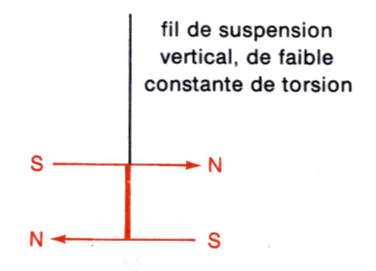
11. Faire quatre schémas clairs, bien « visibles dans l'espace », des lignes de champ orientées créées par un fil rectiligne (2 schémas) et un solénoïde (2 autres), en envisageant successivement les deux sens du courant.
Observez ces schémas dans un miroir. Les règles d'orientation des lignes de champ à partir du sens du courant sont-elles respectées pour ce que l'on voit dans le miroir ?

12. L'expérience décrite dans le cours à la page 183, qui donne pour μ_0 la valeur $1,26 . 10^{-6}$ SI, doit-elle être considérée comme une mesure de μ_0 ou comme une preuve que l'ampèremètre qui indique 5 A a été bien étalonné ?

Applications immédiates.

N.B. : Si besoin est, on prendra $B_0 = 2,0 . 10^{-5}$ T comme valeur de la composante horizontale du champ terrestre.

13. La figure ci-dessous schématise un dispositif constitué par deux aiguilles aimantées identiques, parallèles, solidaires, dont les moments magnétiques sont opposés.



a) Ce dispositif prend-t-il une orientation privilégiée dans le champ terrestre ?

b) Change-t-il d'orientation :
— s'il est placé au voisinage d'un fil vertical parcouru par un courant ?
— si le courant est horizontal, passant sous les deux aiguilles dans leur plan ?
— si le courant horizontal, passant pratiquement entre les deux aiguilles, au milieu, dans leur plan ? dans un plan perpendiculaire ? dans un plan quelconque ?

14. Un long solénoïde comporte 5 couches de fil isolé, à spires jointives. Le diamètre des fils est de 1 mm (isolant compris). Quelle est la valeur du champ dans la région centrale lorsqu'il passe un courant d'intensité 5 mA ?

Réponse : $3,1 . 10^{-5}$ T.

15. Le champ terrestre est-il négligeable vis-à-vis de celui qui est créé à 1 m d'un fil rectiligne parcouru par un courant de 1 A ?

16. Un fil rectiligne très long, horizontal, est parcouru par un courant de 20 A. Une aiguille aimantée, parallèle au fil en l'absence de courant, est située à 2 cm sous le fil. Calculez la déviation de l'aiguille lorsque le courant passe.

Réponse : 84,3°.

17. Un fil rectiligne très long, vertical, est parcouru par un courant de 10 A. Quel est l'ensemble des points où le champ magnétique, résultant du champ terrestre et de celui qui est créé par le fil, n'a pas de composante horizontale ?

Réponse : droite située à 10 cm du fil, à l'est ou à l'ouest selon le sens du courant.

18. Deux longs fils rectilignes, parallèles, situés à 10 cm l'un de l'autre, sont parcourus par des courants de sens contraires, d'intensités respectives 10 A et 15 A.

a) Préciser sur un schéma le sens des forces d'interaction.

b) Calculez la valeur des forces linéiques d'interaction.

c) Déterminer l'ensemble des points où le champ créé par les deux courants est nul.

Réponses : **a)** répulsives ; **b)** $3 \cdot 10^{-4}$ N ; **c)** droite située dans le plan des deux fils, à 20 cm du fil où le courant est le moins intense et à 30 cm de l'autre.

19. Une petite aiguille aimantée est disposée au centre d'un solénoïde de 50 cm de longueur, comportant 1 000 spires de 5 cm de diamètre. Initialement, en l'absence de courant, l'aiguille aimantée s'oriente selon l'axe du solénoïde, et 10 petites oscillations durent 5,0 s. Cette période double lorsqu'on fait passer un courant de sens et d'intensité convenables.

a) Faire un schéma indiquant l'orientation initiale de l'aiguille et le sens du courant qu'il faut choisir. Calculer l'intensité de ce courant.

b) On inverse le sens du courant. Calculer la nouvelle période des petites oscillations.

Réponses : **a)** 6,0 mA (dans un sens tel que le champ créé soit en sens inverse du champ terrestre) ; **b)** 0,38 s.

Exercice expérimental.

20. Procurez-vous une boussole (c'est un « jouet » qui fascinait Einstein lorsqu'il avait 6 ans !), une pile 4,5 V et un « fil électrique » d'une dizaine de centimètres de longueur, dénudé aux deux extrémités.

a) Faites passer le courant, dans un sens ou dans l'autre, dans le fil posé au-dessus ou placé en dessous de la boussole, dans diverses orientations. Vérifiez les règles qui permettent de déterminer le sens du champ magnétique créé.

b) Étudiez qualitativement l'influence de la distance du fil sur la période des oscillations de l'aiguille.

Approfondissement.

21. Montrez que μ_0 peut s'exprimer en N/A² ou en kg . m/C².

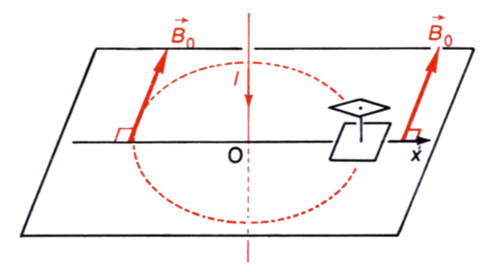
22. Un fil vertical est parcouru par un courant descendant d'intensité $I = 5$ A. Une aiguille aimantée horizontale se déplace selon une droite Ox passant par le fil et orthogonale à la composante horizontale $\vec{B}_0$ du champ terrestre, (figure ci-dessous).

Pour diverses abscisses x de l'aiguille, on mesure la période T des petites oscillations. On obtient les résultats suivants :

$x_{(cm)}$	$T_{(s)}$	$x_{(cm)}$	$T_{(s)}$
− 15	0,968	+ 10	1,58
− 10	0,913	+ 15	1,37
− 5	0,791	+ 20	1,29
+ 5	∞	+ 25	1,25

a) En déduire la valeur du champ $\vec{B}$ créé par le courant.

b) Représentez graphiquement les variations de B en fonction de $\frac{1}{x}$. Conclusion ?



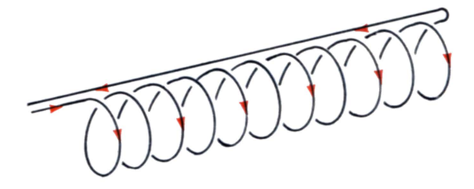
23. Le champ au centre d'un solénoïde très très long peut être considéré comme résultant du champ créé par deux solénoïdes très longs de part et d'autre du point considéré. En déduire la valeur du champ à l'extrémité d'un solénoïde long.

Réponse : $B = \frac{\mu_0}{2} n_1 I$.

24. Le solénoïde très long schématisé ci-dessous comporte 1 000 spires par mètre. L'intensité du courant vaut 10 A. Le fil de retour du courant longe le solénoïde. Déterminez l'expression donnant la valeur numérique du champ à l'intérieur du solénoïde, en un point situé à la distance x du fil rectiligne.

Réponse : $B_{(T)} = 2 \cdot 10^{-4} \sqrt{400\,\pi^2 + \frac{1}{x^2}}$.

(où x est exprimé en cm).



25. On démontre que la valeur du champ magnétique au centre d'un solénoïde quelconque de longueur l, dont les spires ont un diamètre D, est donnée par l'expression

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\sqrt{l^2 + D^2}},$$

où N désigne le nombre total de spires.

a) Que devient cette expression dans le cas d'un solénoïde très long ? d'un solénoïde très court (bobine plate circulaire de N spires) ?

b) Quel est l'écart ΔB entre la valeur du champ au centre d'un solénoïde et la valeur du champ lorsque le solénoïde est supposé infiniment long. A partir de quelle valeur du rapport $\frac{l}{D}$ l'écart relatif $\frac{\Delta B}{B}$ est-il inférieur à 0,5 % ?

26. L'étude de la valeur du champ magnétique créé par une bobine plate circulaire, menée à l'aide d'une sonde de Hall, a donné les résultats suivants pour des points situés à la distance x du centre de la bobine et sur son axe :

$x_{(cm)}$	$\frac{B}{\mu_0}$ (SI)	$x_{(cm)}$	$\frac{B}{\mu_0}$ (SI)
0	100,0	5	71,5
1	98,5	7,5	51,2
2	94,2	10	35,2
3	87,8	15	17,1
4	80,0	20	8,9

a) Représentez graphiquement les variations de $\frac{B}{\mu_0}$ en fonction de x (Échelle : 1 cm $\hat{=}$ x = 2 cm ; 1 cm $\hat{=}$ $\frac{B}{\mu_0}$ = 10 SI). Complétez la courbe par symétrie.

b) Le rayon moyen des spires de la bobine précédente vaut R = 10 cm. On lui adjoint une autre bobine, identique, de même axe, dont le plan est situé à la distance d de la précédente. Les deux bobines sont en série et parcourues par un courant de même sens. Partant de la courbe précédente (dont l'échelle sera éventuellement modifiée) représentez graphiquement les variations de la valeur B du champ magnétique en fonction de la distance x' au centre des deux bobines, dans les cas où d = 5 cm ; 10 cm ; 20 cm. En déduire, par addition graphique, l'allure des courbes donnant en fonction de x' la valeur du champ sur l'axe des bobines. Quel intérêt présente le cas où $d = R$ = 10 cm ?

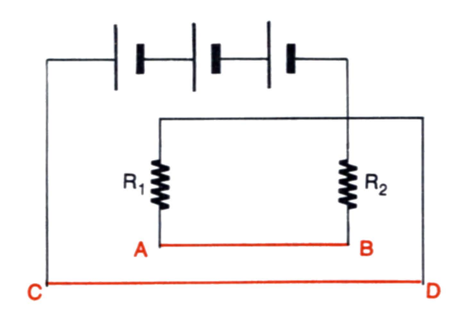
27. A Paris, une aiguille aimantée mobile autour d'un axe passant par son centre de masse et perpendiculaire au plan méridien magnétique, s'oriente dans le champ terrestre en formant un écart angulaire $\hat{I}$ = 64° (appelé « inclinaison ») avec l'horizontale du lieu. Son extrémité nord pointe obliquement vers le sol.

a) Calculez les valeurs du champ magnétique terrestre et de sa composante verticale. Faire un schéma.

b) On fait tourner l'axe de rotation de 90° autour d'un axe vertical. Quelle est la position d'équilibre de l'aiguille ?

Réponses : **a)** B 4,6 . 10^{-5} T ; B_V 4,1 . 10^{-5} T ; **b)** verticale.

28. On considère le dispositif schématisé ci-dessous, pour lequel R_1 et R_2 sont deux ressorts de faible raideur (k = 0,1 N/m) qui supportent un fil rectiligne conducteur AB de longueur l = 0,5 m et de masse linéique μ_1 = 1 g/m.
Lorsque le courant passe, les ressorts s'allongent de 1 cm et les fils AB et CD se trouvent alors distants de 10 cm. Quelle est l'intensité du courant ? ($g \approx$ 10 SI).



29 Si la Conférence des Poids et Mesures avait décidé de poser $\frac{\mu_0}{2\pi} = 1$, quelle valeur inscririez-vous sur un ampèremètre là où vous lisez actuellement 0,5 A ?

Réponse : 2,24 . 10^{-4}.

30. Conception d'un solénoïde. On fabrique un solénoïde en enroulant 5 couches de fil de cuivre de 1 mm de diamètre sur un isolant cylindrique qui donne aux spires un diamètre de 6 cm. Chaque couche comporte 5 tours de fil par centimètre, et la longueur du solénoïde est de 0,9 m. La résistivité du cuivre vaut $\rho \approx 1{,}56 . 10^{-8}\ \Omega . \text{m}$.

a) Calculez l'intensité qui parcourt le solénoïde lorsqu'il est relié à un générateur de f.é.m. 24 volts.

b) Calculez la valeur du champ magnétique créé dans la région centrale du solénoïde.

Réponses : **a)** $R = \rho \frac{l}{s} \approx 8{,}4\ \Omega$; $I \approx 2{,}85$ A.

b) $B \approx 9{,}0 . 10^{-3}$ T.

31. Une aiguille aimantée horizontale est placée au centre d'un long solénoïde comportant 1 000 spires par mètre, dont l'axe horizontal se trouve initialement dans le plan du méridien magnétique.

a) Faire un schéma représentant la situation, sur lequel vous indiquerez le sens du courant qu'il faut faire passer pour que l'aiguille ne prenne plus aucune orientation privilégiée à l'intérieur du solénoïde. Calculez l'intensité I correspondante.

b) On fait passer un courant double du précédent, de même sens. De combien doit-on faire tourner le solénoïde autour d'un axe vertical pour que l'aiguille tourne de 90°. Même question, en changeant le sens du courant. Faire les schémas correspondants.

c) L'intensité est maintenant $\frac{I}{2}$. Quelle déviation maximale subit l'aiguille lorsqu'on fait tourner le solénoïde ? On envisagera les deux cas, selon le sens du courant. Schémas.

32. Détermination graphique du vecteur champ.

Une aiguille aimantée est au voisinage d'un circuit créant un champ magnétique dont la composante horizontale est du même ordre que celle du champ terrestre B_0.

1. Étude des positions d'équilibre de l'aiguille lorsqu'on inverse le sens du courant.

a) Quelle orientation prend l'aiguille en l'absence de courant ?

b) On fait passer le courant dans le (ou les) circuit(s) dans un sens, puis dans l'autre (avec la même intensité), ce qui crée des champs de composantes horizontales $\vec{B}_+$ et $\vec{B}_-$. Quelle relation existe-il entre $\vec{B}_+$ et $\vec{B}_-$?

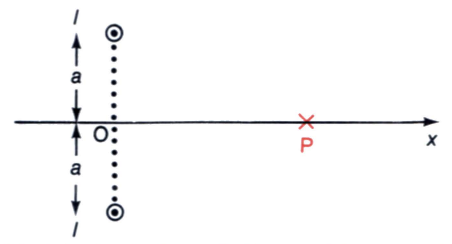
c) Faire la construction vectorielle indiquant, à partir de $\vec{B}_0$, $\vec{B}_+$ et $\vec{B}_-$, les deux positions d'équilibre prises par l'aiguille lorsque le courant passe. Étudiez les cas particuliers où $\vec{B}_0$, $\vec{B}_+$ et $\vec{B}_-$ ont la même direction (en distinguant les cas : $B_+ > B_0$ et $B_+ < B_0$).

2. Application. Inversement, comment peut-on construire par tâtonnement, à l'aide d'un double-décimètre, les deux flèches représentant $\overrightarrow{B}_+$ et $\overrightarrow{B}_-$ quand on connaît $\overrightarrow{B}_0$ et les deux directions d'équilibre de l'aiguille correspondant aux deux sens du courant ? Comment en déduire les valeurs B_+ ou B_- en fonction de B_0 ?

3. A partir des résultats précédents, imaginez une méthode permettant, en TP, de vérifier que la valeur du champ créé par un courant est proportionnelle à son intensité (on peut repérer les positions d'équilibre de l'aiguille en l'éclairant par une lampe située juste au-dessus de son axe de rotation et en notant l'ombre portée).

33. Deux fils conducteurs rectilignes très longs, parallèles, distants de 2 a, sont parcourus par un courant de même intensité I (comme l'indique, en coupe, la figure ci-dessous ; O désigne le milieu des traces des deux fils).

a) Soit P un point du plan médiateur des deux fils, situé à la distance $x = \overline{OP}$. Précisez la direction et le sens du vecteur champ magnétique créé en P par les courants, en envisageant tous leurs sens possibles. Calculez la valeur B du champ en P.



b) Calculez la force linéique subie par un fil parallèle aux précédents, passant par P, parcouru dans un sens ou dans l'autre par un courant d'intensité I.

c) *Application numérique :* $a = 15$ cm ; $x = 20$ cm ; $I = 20$ A.

34. Marquez deux points O_1 et O_2, distants de 5 cm, dans la région centrale d'une feuille de papier. Ces points seront censés représenter les traces de deux fils rectilignes très longs perpendiculaires au plan de la feuille. Chaque fil crée un champ de 10^{-5} T à 10 cm de distance. Soit O le milieu de O_1O_2, $\overrightarrow{Ox}$ l'axe perpendiculaire à O_1O_2, $\overrightarrow{Oy}$ l'axe passant par O_1 et O_2.

a) Les deux fils sont parcourus par des courants de sens contraires et de même intensité. Tracez à l'échelle 1 cm $\hat{=}$ 10^{-5} T, les représentants des vecteurs champs créés par les deux fils et le vecteur champ résultant aux points dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont, en cm :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Complétez par symétries.

Dessinez l'allure des lignes de champ créé par les deux fils et passant par les points

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vous améliorerez la précision du tracé en représentant le vecteur champ résultant en divers points convenablement choisis.

b) Même question, pour deux courants de même sens.

c) Mêmes questions, l'intensité dans l'un des fils étant doublée.
Peut-on dans ce cas profiter des mêmes symétries que précédemment ?

d) Êtes-vous sensible à la beauté de ces figures ?

11 Induction électro-magnétique.

I. Existence du phénomène.

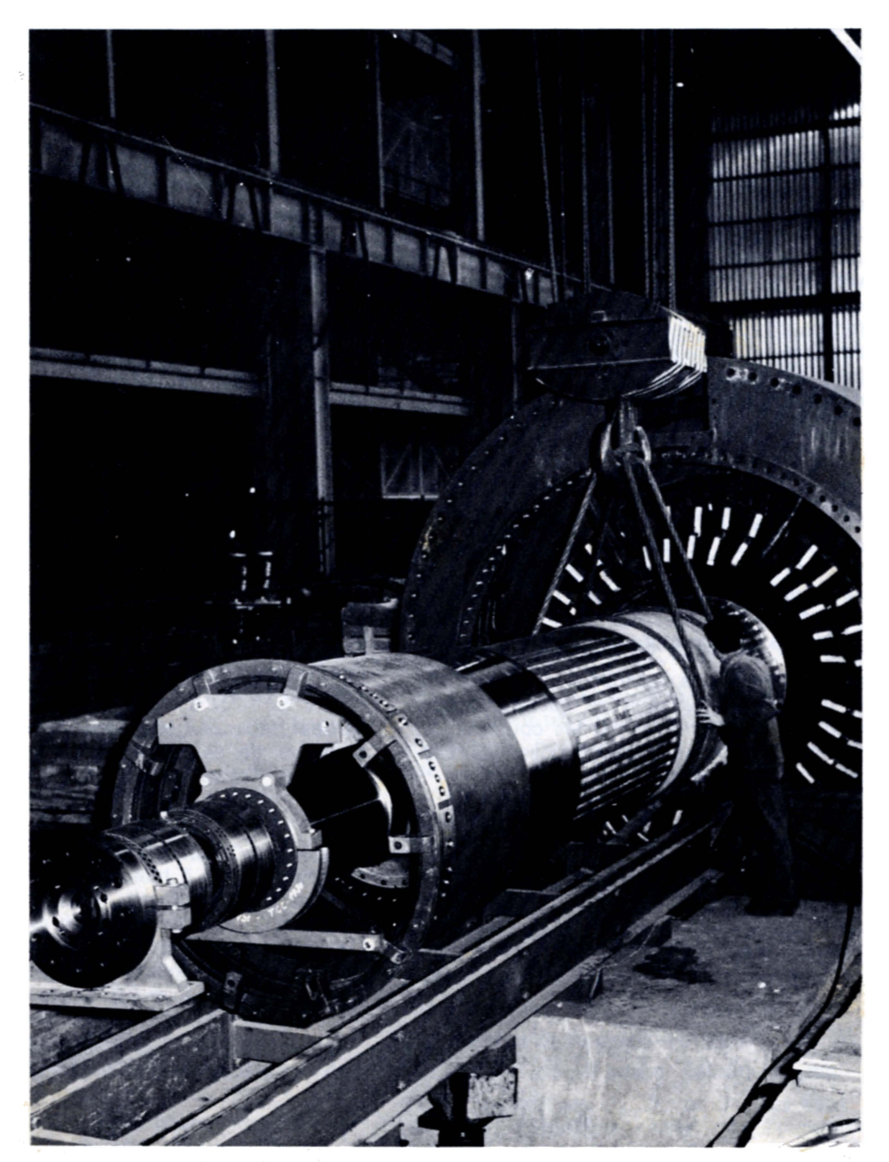
1. Quelques expériences.
2. La f.é.m. d'induction.
3. Circonstances d'apparition d'une f.é.m. induite dans un circuit.

II. Interprétation.

1. Conducteur mobile dans un champ magnétique indépendant du temps.
2. Circuit fixe soumis à un champ magnétique variable au cours du temps.
3. Cas général : circuit mobile dans un champ magnétique variable au cours du temps.
4. Loi de Lenz.

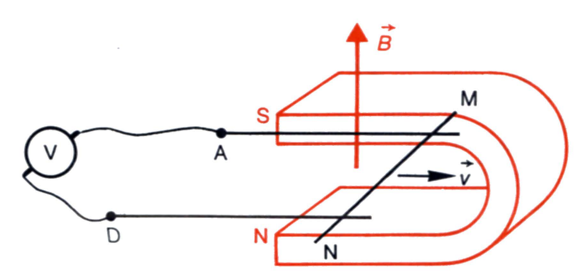
III. Étude énergétique et applications.

1. Aspect énergétique du phénomène d'induction électromagnétique.
2. Quelques applications.



Alternateur de 265 MW (centrale de Blénod-les-Pont-à-Mousson). L'appareil est en cours de montage. A l'avant de la photo, on voit l'inducteur (partie rotative de l'alternateur) : il prend place à l'intérieur des bobines de l'induit (à l'arrière de la photo).

L'énergie électrique est essentiellement produite à partir d'énergie mécanique, par l'intermédiaire de dispositifs électromagnétiques (alternateur, dynamos...). Nous nous proposons d'étudier ici le phénomène qui est à la base de cette transformation et qui trouve bien d'autres applications en électricité : l'induction électromagnétique.



1a. Conducteur mobile sur des rails dans un champ magnétique. La tige MN se déplace sur les rails à la vitesse $\vec{v}$. Une tension apparaît entre A et D chaque fois que le mouvement existe.

I. Existence du phénomène.

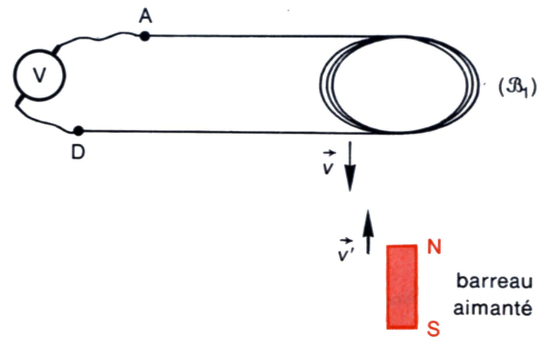
1. Quelques expériences.

• Quelques dispositifs expérimentaux permettant l'étude du phénomène sont représentés sur les figures 1. Dans les trois cas on utilise un voltmètre électronique de grande sensibilité et de très grande résistance interne : ainsi on pourra considérer que le circuit sur lequel il est branché est un circuit ouvert entre ses bornes A et D.
Dans l'expérience 1a, une tige conductrice MN est déplacée dans un champ magnétique $\vec{B}$ et glisse sur deux rails conducteurs.
Dans l'expérience 1b, on déplace un barreau aimanté par rapport à une bobine (B_1), ou au contraire la bobine (B_1) par rapport à l'aimant, ou les deux à la fois.
Dans l'expérience 1c, le barreau aimanté est remplacé par une bobine (B_2) alimentée par un courant d'intensité i_2 : on peut déplacer la bobine (B_1) ou la bobine (B_2), ou les deux à la fois, ou encore laisser les bobines fixes et faire varier l'intensité i_2 grâce au rhéostat (Rh) ou à l'interrupteur (K).

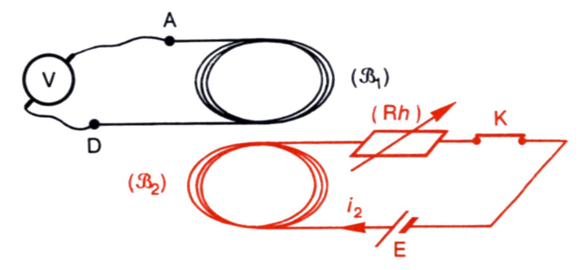
• Dans tous les cas il apparaît une différence de potentiel entre les bornes du conducteur MN ou de la bobine (B_1) : c'est le **phénomène d'induction électromagnétique.** Le conducteur ou circuit dans lequel apparaît le phénomène est appelé **l'induit.**

• **Il est indispensable** de disposer d'un champ magnétique pour produire le phénomène : ce champ est appelé **champ inducteur,** le dispositif qui le produit est **l'inducteur** (aimant, bobine (B_2)).

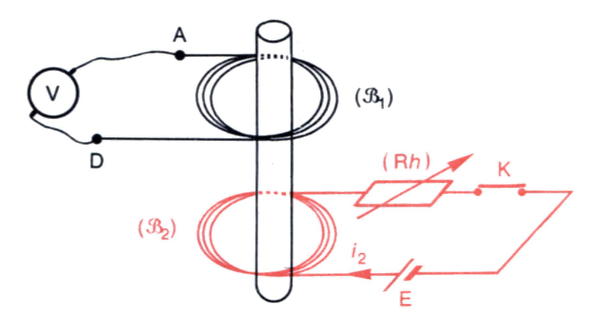
• Ce phénomène d'induction cesse lorsqu'on ne fait plus rien varier, ni les positions, ni l'intensité i_2.



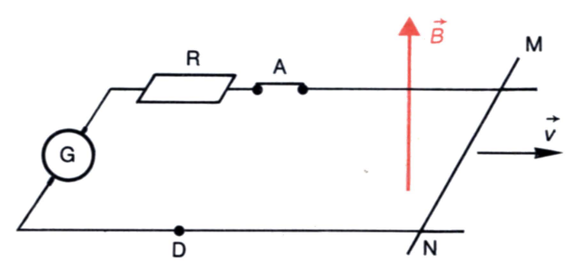
1b. Induction électromagnétique dans la bobine (B_1). Une tension apparaît aux bornes de la bobine si l'aimant est mobile, ou si la bobine est mobile, ou si les deux sont mobiles.



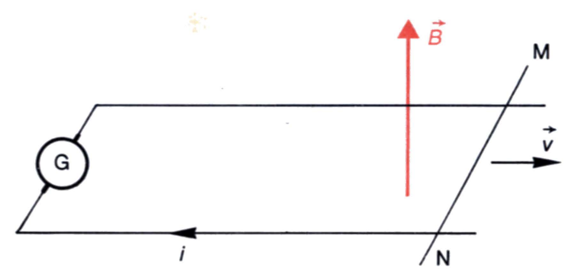
1c. Induction électromagnétique dans la bobine (B_1). Une tension apparaît aux bornes de la bobine (B_1) à condition que (B_2) soit parcourue par un courant et qu'une bobine soit mobile par rapport à l'autre, ou que le courant i_2 soit variable au cours du temps (ouverture ou fermeture du circuit par l'interrupteur K, manipulation du rhéostat (Rh)).



1d. Effet d'un noyau de fer. En ajoutant un noyau de fer à l'intérieur des bobines on augmente considérablement les effets d'induction. Cela est dû au fait que le barreau s'aimante et ajoute ses effets à ceux du circuit (B_2) appelé circuit inducteur.



2. Le galvanomètre G décèle le passage d'un courant induit dans les conditions où un voltmètre décèlerait une tension U_{AD}.



3a. Le conducteur MN en mouvement dans le champ $\vec{B}$ est un générateur ; pour le cas de figure choisi son pôle ⊕ est N, son pôle ⊖ est M ; plus généralement le sens de la f.é.m. induite change avec le sens de $\vec{v}$ et avec celui de $\vec{B}$.

• **Remarque :** utilisation d'un noyau de fer.
Dans l'expérience 1d, on reprend les expériences 1c après avoir ajouté un noyau de fer non aimanté dans les bobines ; on constate une augmentation considérable de la tension indiquée par le voltmètre : la présence d'un **noyau de fer renforce les phénomènes d'induction électromagnétique.** Cela s'explique par le fait que ce noyau s'aimante sous l'effet du champ inducteur créé par la bobine (B_2) et le champ produit par ce noyau de fer vient renforcer celui de (B_2).

2. La f.é.m. d'induction.

a) Expérience : l'induit est un dipôle générateur.

L'induit utilisé dans les expériences précédentes est un dipôle : montrons que c'est un **dipôle générateur.** Pour cela remplaçons le voltmètre par une résistance placée en série avec un galvanomètre (figure 2). Lorsqu'on déplace le conducteur MN, le galvanomètre indique le passage d'un courant dans les conditions où, précédemment, le voltmètre indiquait l'existence d'une tension u_{AB} ; ce courant est appelé **courant induit.** On peut recommencer aussi les expériences 1b et 1c en remplaçant le voltmètre par un galvanomètre. Cette double série d'expériences permet de penser, et la théorie confirmera que : **l'induit** est, pendant la durée du phénomène d'induction électromagnétique, un **dipôle générateur.**

b) F.é.m. induite.

Le courant induit ou la tension aux bornes de l'induit sont en effet deux manifestations d'un même phénomène : l'existence d'une force électromotrice.

• Le phénomène d'induction électromagnétique est l'apparition d'une **f.é.m. d'induction** ou **f.é.m. induite** dans un conducteur ou un circuit, lorsque celui-ci est soumis de **façon variable** à un champ magnétique $\vec{B}$ **appliqué convenablement** (ces notions seront précisées plus bas).

• Si l'induit est un circuit ouvert, il ne débite pas et, comme c'est le cas pour tout dipôle générateur, il apparaît alors entre ses bornes une tension égale à sa f.é.m.

c) Courant induit.

• Si l'induit est fermé sur lui-même ou sur un circuit extérieur, la f.é.m. induite devient la source d'un courant appelé le **courant induit.**

3. Circonstances d'apparition d'une f.é.m. induite dans un circuit.

Reprenons quelques expériences en utilisant un galvanomètre : celui-ci détecte l'existence du courant induit et précise son sens ; on peut alors en déduire quel est le pôle ⊕ de l'induit puisqu'on sait que le courant débité par un générateur en sort par son pôle ⊕.
Nous allons distinguer plusieurs cas, plusieurs situations permettant l'apparition d'une f.é.m. induite.

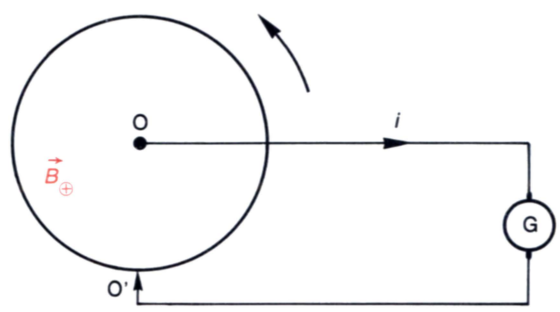
a) Mouvement d'un conducteur ou d'un circuit par rapport à un champ magnétique $\vec{B}$ indépendant du temps.

• Les figures 3 montrent des cas de mouvements d'un conducteur dans un champ magnétique $\vec{B}$ indépendant du temps : le dispositif 3a a déjà été utilisé ; le dispositif 3c aussi, et nous l'employons ici en laissant l'**aimant immobile** afin qu'en chaque point de l'espace le champ inducteur soit indépendant du temps.
La figure 3b représente une **roue de Faraday** : c'est un disque conducteur mobile autour de son axe Δ et qui est mis en contact avec le circuit extérieur (galvanomètre) par son axe et sa périphérie ; le champ magnétique $\vec{B}$ est appliqué à peu près perpendiculairement au plan du disque.

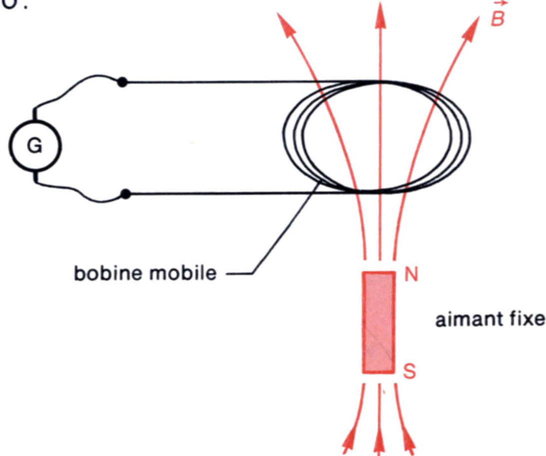
• Dans tous les cas la f.é.m. n'apparaît que s'il y a mouvement : du conducteur MN, (figure 3a), rotation de la roue de Faraday, (figure 3b), déplacement du circuit (figure 3c).
On constate que **la f.é.m. s'annule avec le mouvement.**

• **De plus le sens de la f.é.m. change** avec le sens du mouvement ou avec le sens du champ $\vec{B}$ inducteur.

• En résumé, un premier moyen d'obtenir une f.é.m. induite est de **déplacer le circuit induit** dans un champ magnétique **indépendant du temps.**

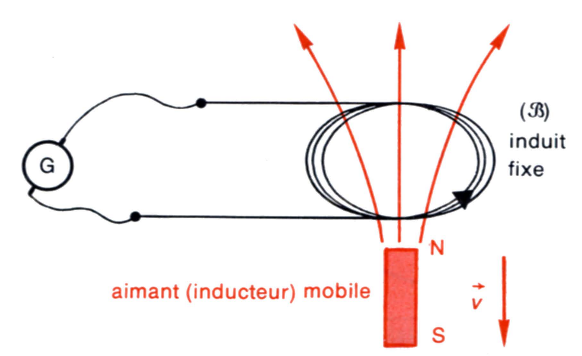


3b. Roue de Faraday. Une f.é.m. induite apparaît lorsque la roue tourne ; le sens de cette f.é.m. change avec le sens du champ magnétique et avec le sens de rotation : par exemple pour le cas de figure choisi, O est le pôle ⊕, O′ le pôle ⊖ du générateur induit. A l'extérieur du générateur, le courant va donc de O vers O′.

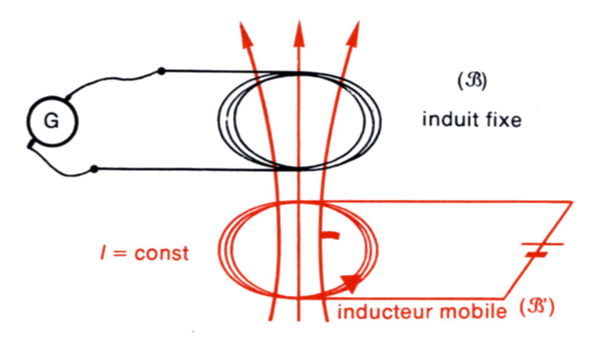


3c. L'aimant fixe produit un champ $\vec{B}$ indépendant du temps. Il apparaît une f.é.m. induite dans la bobine quand elle se déplace dans le champ $\vec{B}$; le sens de cette f.é.m. change avec le sens de la vitesse de la bobine ou avec le sens du champ $\vec{B}$.

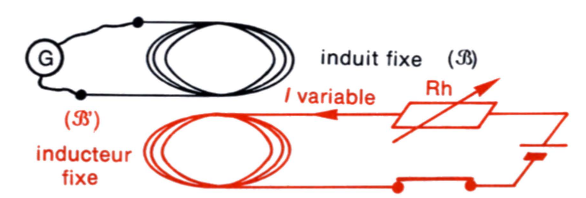
Pour un induit mobile dans un champ inducteur, le sens de la f.é.m. change avec le sens de la vitesse de l'induit et le sens du vecteur champ ; la f.é.m. s'annule avec la vitesse.



4a. En déplaçant l'aimant par rapport à la bobine (B), on soumet chaque point de celle-ci à un champ $\vec{B}$ variable au cours du temps : ici $\vec{B}$ est dirigé vers le haut mais sa mesure en un point de la bobine décroît. La flèche sur le circuit indique le sens du courant induit : celui-ci s'inverse en retournant l'aimant ou en l'approchant de (B) au lieu de l'en éloigner.



4b. La bobine (B′) joue le même rôle que l'aimant de la figure 4a.



4c. Induit et inducteur sont fixes, mais une f.é.m. apparaît dans l'induit (B) si le courant I qui produit le champ $\vec{B}$ inducteur est variable au cours du temps.

b) Circuit plongé dans un champ magnétique variable au cours du temps.

- Les figures 4 montrent de tels cas.

Rappelons d'abord que le champ magnétique produit par un aimant décroît quand on s'éloigne de l'aimant ; il en est de même pour le champ magnétique produit par une bobine parcourue par un courant d'intensité I mais la valeur de ce champ en un point est toujours proportionnelle à l'intensité I ; de plus, en inversant le sens du courant on inverse le sens du champ qu'il produit (chapitre 10).
Sur la figure 4a on utilise le même matériel que sur la figure 3a mais cette fois c'est **l'aimant que l'on déplace :** par exemple si on l'éloigne de la bobine (B) (induit) chaque point de celle-ci est plongé dans un champ qui diminue au cours du temps.
Le dispositif de la figure 4b est une variante de celui de la figure 4a : le champ inducteur est produit par un courant d'intensité I constante passant dans la bobine (B′), et on déplace celle-ci.
Sur la figure 4c, le rhéostat et l'interrupteur permettent de faire varier l'intensité qui traverse l'inducteur (B′), et en particulier de partir de la valeur $I = 0$ ou d'y revenir.

- Dans tous les cas la f.é.m. d'induction n'apparaît que s'il y a **mouvement** de l'aimant ou du circuit inducteurs, ou si le courant inducteur d'intensité I est en train de varier :

la f.é.m. s'annule avec la variation du champ inducteur.

- **De plus le sens de la f.é.m. change** avec le sens du mouvement de l'inducteur, le sens du champ inducteur (donc le sens du courant inducteur), avec le sens de variation du courant inducteur.
- En résumé, un deuxième moyen d'obtenir une f.é.m. induite est de soumettre un circuit à un champ magnétique variable au cours du temps.

c) Mouvement d'un conducteur ou d'un circuit dans un champ $\vec{B}$ variable au cours du temps.

- En reprenant l'un des dispositifs précédents (figures 4a, 4b ou 4c) on peut faire varier le champ inducteur et **simultanément** déplacer l'induit (bobine (B)). En général on voit encore apparaître une f.é.m.
- Dans le cas le plus général, pour produire une f.é.m. induite il suffit de déplacer un circuit dans un champ magnétique $\vec{B}$ variable au cours du temps.

II. Interprétation.

Nous allons envisager successivement les trois cas distingués précédemment : induit mobile, puis champ inducteur variable au cours du temps, puis induit mobile et champ inducteur variable au cours du temps.

1. Conducteur mobile dans un champ magnétique indépendant du temps.

a) Force s'exerçant sur les charges d'un conducteur mobile ; champ électromoteur.

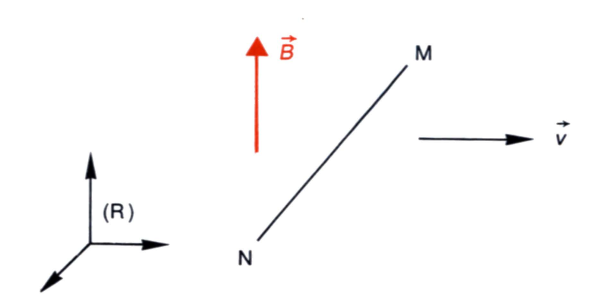
• **Conducteur.** C'est un ensemble globalement neutre formé de charges positives et de charges négatives. Dans le cas d'un métal tel que le cuivre, les charges positives sont fixes (cations des atomes régulièrement disposés dans le solide), et des électrons, chargés négativement, peuvent se déplacer par rapport au solide.
Le courant, quand il existe, est transporté par les particules chargées mobiles appelées **porteurs de charge.**

• **Action d'un champ magnétique sur un conducteur mobile.** Soit un laboratoire, auquel est attaché un référentiel (R), et dans lequel règne un champ magnétique $\vec{B}$: ce qui signifie que B est la mesure trouvée par un expérimentateur immobile par rapport à (R).
Considérons un petit brin MN de conducteur de longueur l ($\vec{l} = \overrightarrow{MN}$) qui, à la date t, est animé de la vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel (R) (figure 5a).
Tant qu'il ne passe pas de courant dans le brin MN, ses charges positives et négatives ont aussi la vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel (R) : chaque particule de charge q, qu'elle soit libre ou non, chargée positivement ou négativement, subit la force

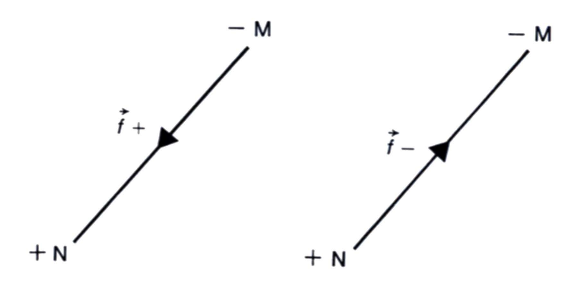
$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Sous l'effet de cette force les porteurs de charge vont avoir tendance à se déplacer par rapport à leur support matériel :
— s'ils sont chargés positivement ils vont s'accumuler à l'avant du conducteur, au détriment de l'arrière (figure 5b) ce qui va faire apparaître une tension entre M et N :

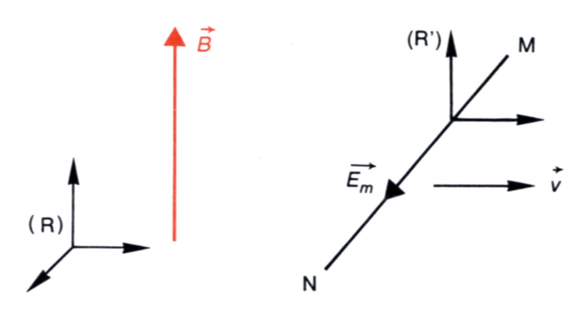
$$U_N - U_M > 0\,;$$



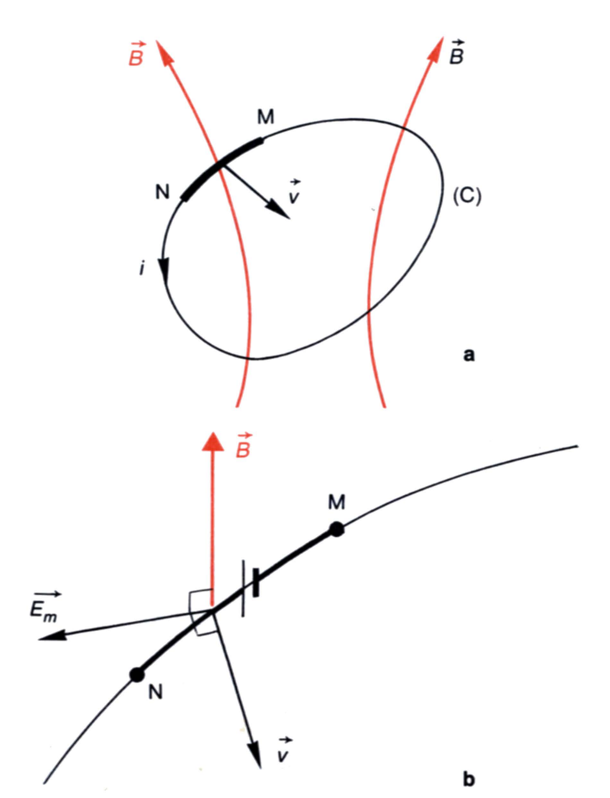
5a. Mouvement d'un brin de fil MN dans un champ magnétique. $\vec{B}$ est la mesure du champ magnétique dans le référentiel (R).



5b, c. Pour $\vec{v}$ et $\vec{B}$ donnés, le signe de la tension qui apparaît entre les extrémités du brin MN ne dépend pas du signe des porteurs de charge.



6. Champ électromoteur.
Un observateur lié au conducteur MN interprète la force $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ comme étant une force électrique $f = q\vec{E}_m$ causée par un champ électromoteur $\vec{E}_m$.



7a, 7b. Pour le calcul de la f.é.m. induite.

— s'ils sont chargés négativement, ils vont s'accumuler à l'arrière du conducteur, au détriment de l'avant : la tension entre M et N sera encore (figure 5c) :

$$U_N - U_M > 0\,;$$

— enfin si le brin MN fait partie d'un circuit fermé les porteurs de charge pourront vraiment se mettre en mouvement, un courant induit circulera.

• **Champ électromoteur.**
Soit (R′) le référentiel dans lequel MN est immobile ; (R′) a donc aussi la vitesse $\vec{v}$ par rapport à (R).
Un observateur immobile dans (R′) interprète le phénomène d'induction de la façon suivante : une force $\vec{f}$ est appliquée à chaque charge mais comme celle-ci est immobile dans (R′), il ne peut s'agir que d'une force électrique : dans le conducteur il règne un champ électrique $\vec{E}_m$ tel que $\vec{f} = q\vec{E}_m$. D'où en comparant :

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q\vec{E}_m\,,$$

$$\boxed{\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}}\,.$$

Le champ électrique $\vec{E}_m$ est appelé **champ électromoteur** parce qu'il est **responsable des forces** qui font **circuler** les porteurs de charge.
Sur la figure 6, $\vec{E}_m$ est dirigé de l'arrière vers l'avant du fil MN.
Il ne s'exerce dans l'axe du fil que si celui-ci est à la fois perpendiculaire à $\vec{B}$ et à $\vec{v}$ (c'est le cas sur la figure 6) ; il n'en sera pas toujours ainsi.
• **En résumé,** le phénomène d'induction électromagnétique correspond à l'apparition d'un champ électromoteur dans l'induit.

b) F.é.m. induite.

• D'après l'étude expérimentale faite dans la partie I de ce chapitre, la f.é.m. induite existe pour un circuit ouvert aussi bien que pour un circuit fermé. Toutefois pour établir l'expression de la f.é.m. localisée dans le brin MN, nous allons supposer que MN appartient à un circuit (C) fermé (figure 7a).

• Un courant induit d'intensité i parcourt le circuit (C) : nous supposerons qu'il traverse MN de M vers N.

Lorsqu'un porteur de charge (chargé positivement par exemple) a parcouru la longueur MN, la force $\vec{f}$ qui lui est appliquée lui a fourni le travail :

$$w = \vec{f} \cdot \overrightarrow{MN} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{l}.$$

La portion MN a donc un **comportement de générateur.** On sait que l'énergie w fournie par un générateur de f.é.m. e à une charge q qui le traverse est :

$$w = qe .$$

D'où en identifiant les deux expressions de w :

$$q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{l} = qe,$$

$$\boxed{e = (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{l}} \quad :$$

e est la **f.é.m. localisée dans le brin** $\overrightarrow{MN} = \vec{l}$.
Sur la figure 7b, on trouve $e > 0$ quand on va de M vers N ($\vec{l} = \overrightarrow{MN}$) : ceci signifie que e a tendance à débiter un courant de M vers N : c'est bien ce que nous a montré l'étude des forces appliquées aux porteurs de charge (figures 5b et 5c).

- **F.é.m. dans un circuit (C).**

Un circuit (C) sera considéré comme une suite de brins placés en série : dans chacun d'eux apparaît une f.é.m. et la f.é.m. localisée dans le circuit (C) est la somme des f.é.m. dans chacun de ses brins (figure 8) :

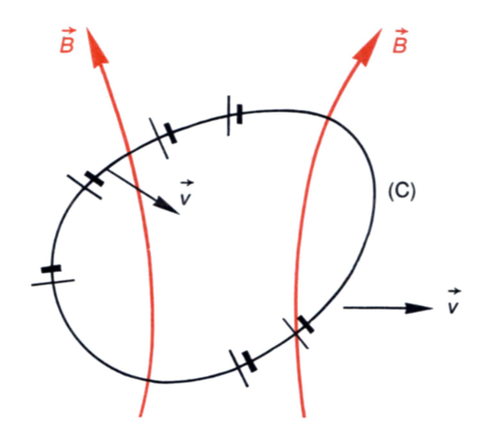
$$e = \Sigma e \quad \text{(voir plus bas, § d)} .$$

Cette propriété est valable que le circuit C soit ouvert ou fermé.

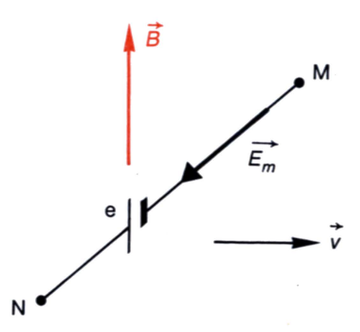
- **Tension aux bornes d'un circuit ouvert.**

Si le circuit (C) est ouvert, on a affaire à un **générateur débranché** et, conformément à la loi d'Ohm, on voit apparaître entre ses bornes une tension de valeur absolue égale à sa f.é.m. : par exemple pour le brin MN seul dans l'espace on trouve :

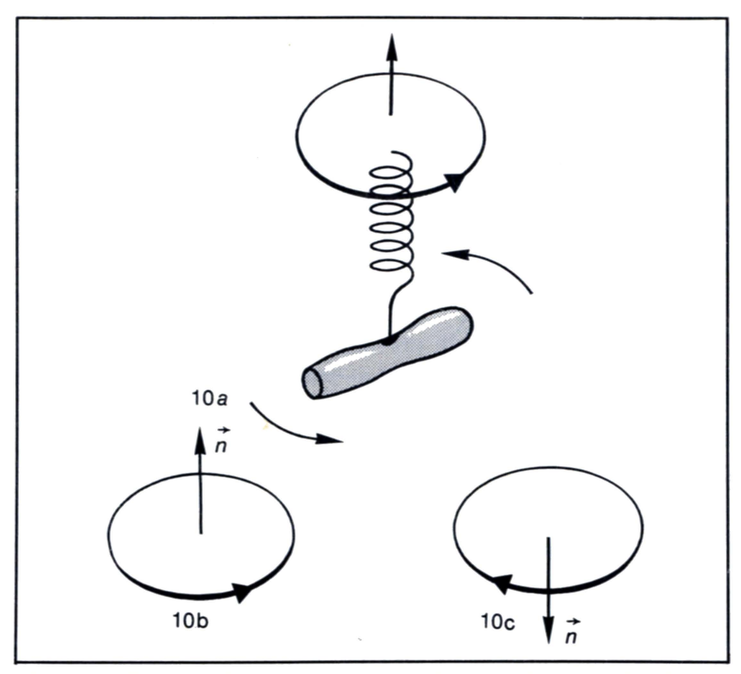
$$U_N - U_M = e > 0 \quad \text{(figure 9)} .$$



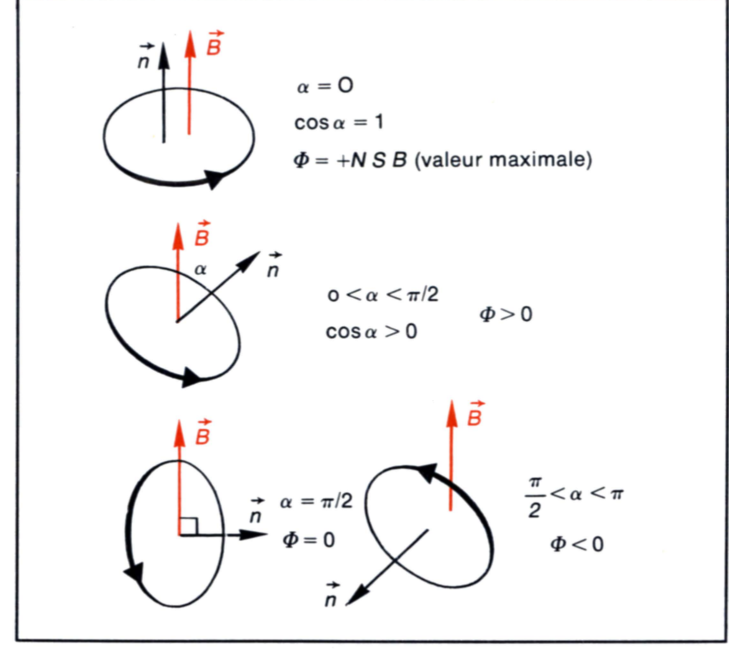
8. Les différents brins du circuit (C) sont autant de générateurs placés en série les uns après les autres. Ils n'ont pas tous la même vitesse (sauf si (C) est en translation) et le champ $\vec{B}$ n'est généralement pas uniforme. Le circuit (C) peut être ouvert ou fermé.



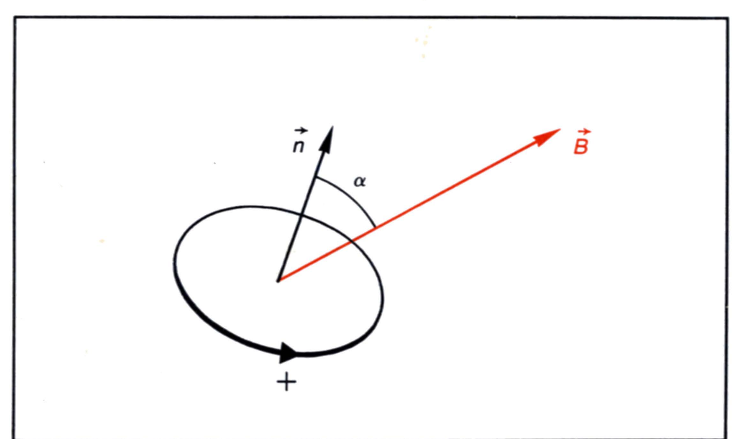
9. Entre les bornes d'un circuit ouvert apparaît une tension U_{NM} telle que $|U_{NM}| = |e|$ comme aux bornes de tout générateur qui ne débite pas. Le sens du champ électromoteur $\vec{E_m}$ permet de déterminer le signe de la tension : ici $V_N > V_M$.



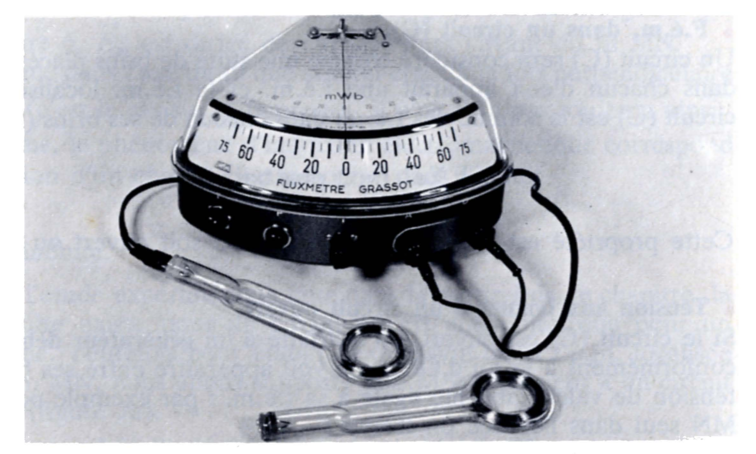
10a, b, c. Tire-bouchon de Maxwell. « Planté » dans un circuit, son sens de progression est lié à celui de sa rotation. Les deux autres schémas indiquent les deux sens positifs possibles de parcours d'un circuit et les normales orientées correspondantes.



12. Quelques valeurs du flux magnétique à travers un circuit.



11. Flux magnétique dans un circuit. $\Phi = NS\vec{n}.\vec{B} = NS.B \cos\alpha$.



12a. Un fluxmètre mesure les variations de flux magnétique.

c) Flux magnétique à travers un circuit fermé.

- **Sens positifs de mesure sur un circuit.**

Soit un circuit (C) plan, fermé ; orientons **arbitrairement** ce circuit, c'est-à-dire choisissons dans ce circuit un sens de parcours positif (figures 10). En liaison avec ce sens positif, orientons la direction normale au circuit de la façon suivante : un tire-bouchon étant planté perpendiculairement au plan du circuit faisons-le tourner dans le sens de parcours positif, ce tire-bouchon progresse perpendiculairement au circuit (figure 10a) dans un sens qui, **conventionnellement,** est appelé sens positif sur la normale (figures 10b et 10c). Cette règle dite « **règle du tire-bouchon de Maxwell** » définit donc le sens du vecteur unitaire $\vec{n}$ de la normale par rapport au sens de parcours positif du circuit.

- **Définition du flux à travers un circuit fermé.**

Soit un circuit (C) orienté, plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$: $\vec{B}$, plus ou moins intense, traverse plus ou moins obliquement le circuit ; on dit que le circuit reçoit ou est traversé par un **flux magnétique** Φ (figure 11). Par définition :
$\Phi = S\vec{n}\,.\,\vec{B}$ pour une spire d'aire S,

$\boxed{\Phi = NS\vec{B}\,.\,\vec{n}}$ pour un circuit de N **spires identiques en série.**

Si on appelle **vecteur surface** du circuit le vecteur $\boxed{\vec{S} = NS\vec{n}}$

on peut encore écrire $\boxed{\Phi = \vec{B}\,.\,\vec{S}}$.

Le flux est défini à partir du **produit scalaire** des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{n}$, ce flux est donc une **grandeur algébrique.**

En posant $\alpha = (\vec{B}, \vec{n})$ on a $\boxed{\Phi = NSB\cos\alpha}$. Les figures 12 montrent quelques cas correspondant à différentes valeurs de α.

Unité.

Le flux magnétique s'exprime en **weber** (Wb) (qui pourrait aussi s'appeler le tesla . mètre carré).

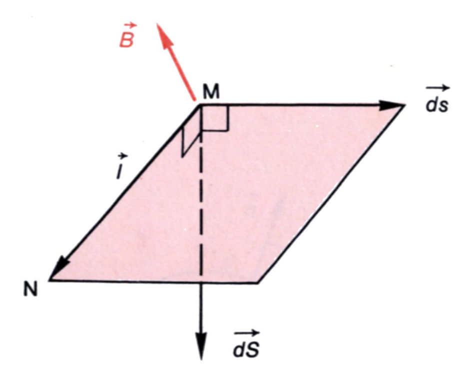
Si le champ $\vec{B}$ n'est pas uniforme, on décompose le circuit en plusieurs surfaces ΔS assez petites pour que le champ $\vec{B}$ soit uniforme à travers chacune d'elles et on fait la somme des flux : $\Phi = \Sigma\, \vec{B}\,.\,\Delta\vec{S}$.

- **Quelques expériences.**

Un **fluxmètre** est un appareil qui mesure les variations de flux $\Delta\Phi$ subies par une bobine (B) sur laquelle il est branché : la rotation $\Delta\theta$ de son aiguille est proportionnelle à $\Delta\Phi$. Nous n'exposerons pas ici le principe de cet appareil (photo 12a).

Flux à travers une surface orientée :
$\Phi = NS\,\vec{n}\,.\,\vec{B}$.

13. Étude de quelques variations de flux à l'aide d'un fluxmètre. Dans tous les cas la bobine (B) est, dans sa position initiale, très éloignée de l'aimant. Elle subit une variation de flux jusqu'à la position finale notée par l'une des cinq figures 13.
Dans la position 13a la bobine est horizontale c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe de l'aimant ; en 13b elle est retournée par rapport à la position 13a ; en 13c elle est verticale, en 13d elle est horizontale mais plus éloignée de l'aimant que dans la position 13a ; enfin en 13e elle est horizontale mais l'aimant a été retourné.



14. Flux coupé par un brin MN au cours de son déplacement dans le champ magnétique $\vec{B}$.
L'aire dS de la surface balayée est mesurée par la norme du produit vectoriel $\vec{ds} \wedge \vec{l}$. Les trois vecteurs $\vec{ds}$, $\vec{l}$, $\vec{dS} = \vec{ds} \wedge \vec{l}$ forment un trièdre direct. Le flux coupé est $\delta\Phi_c = \vec{B} \cdot \vec{dS}$.

Les figures 13 illustrent quelques expériences faites avec ce fluxmètre, une bobine (B) et un aimant permanent. A chaque fois la bobine (B) est d'abord placée très loin de tout aimant : elle est alors traversée par un flux nul : Φ initial = 0. On la place ensuite dans une certaine position par rapport à l'aimant, à proximité de celui-ci : pendant son transport la bobine subit une variation de flux $\Delta\Phi = \Phi$ final $- 0 = \Phi$ final.
Appelons Φ_a le flux reçu par la bobine en position 13a, Φ_b en position 13b... En considérant la normale $\vec{n}$ de la bobine, la direction et le sens des lignes du champ $\vec{B}$ produit par l'aimant, on peut prévoir que $\Phi_b = -\Phi_a$ et le fluxmètre montre effectivement que $\Delta\Phi_b \approx -\Delta\Phi_a$.

De même $\Phi_c < \Phi_a$ mais de même signe,

$\Phi_d < \Phi_a$ mais de même signe,

Φ_e de signe contraire à celui de Φ_a.

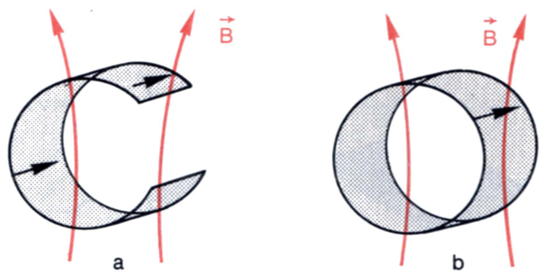
Avec une bobine (B') de plus grande surface ou de plus grand nombre de spires ($N' S' > NS$) on constaterait une plus grande variation de flux pour la même position finale (13a par exemple).

• Flux coupé par un brin de circuit.

Lorsqu'un brin $\overrightarrow{MN} = \vec{l}$ se déplace de $\vec{ds}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ il balaye une surface $\vec{dS}$ (figure 14) à travers laquelle le champ $\vec{B}$ produit un flux $\delta\Phi_c$: $\delta\Phi_c$ est le **flux coupé** par MN dans son déplacement.
Pour le signe de $\delta\Phi_c$ on convient de définir le vecteur surface $\vec{dS}$ par le produit vectoriel :

$$\vec{dS} = \vec{ds} \wedge \vec{l} \quad \text{et le flux coupé est} \quad \delta\Phi_c = \vec{B} \cdot \vec{dS}\,.$$

Par exemple sur la figure 14, $\vec{l}$, $\vec{ds}$ et $\vec{B}$ ont des sens tels que $\delta\Phi_c < 0$.
La définition du flux coupé s'étend au déplacement d'un circuit (C) ouvert ou fermé : il s'agit alors du flux qui passe à travers l'ensemble de la surface balayée par le circuit (figures 15a et 15b).



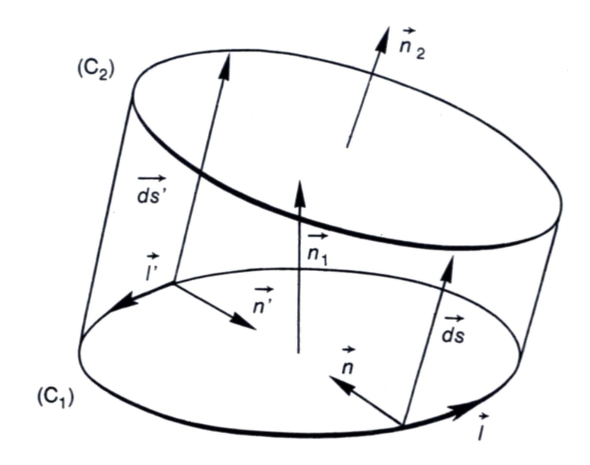
15. Surfaces balayées par un circuit (C), ouvert ou fermé, se déplaçant dans un champ magnétique $\vec{B}$.

• Relation entre flux coupé et flux reçu par un circuit fermé mobile.
Considérons le circuit (C) orienté, fermé, plongé dans le champ $\vec{B}$ dans lequel il se déplace de la position (C_1) à la position (C_2) : le flux reçu par (C) passe alors de la valeur Φ_1 à la valeur Φ_2 (figure 16).
Or le champ magnétique $\vec{B}$ a une **propriété particulière importante :** le flux de $\vec{B}$ à travers la surface plane (C_1) est le même qu'à travers l'ensemble constitué de la surface balayée par (C) de (C_1) à (C_2) et de la surface plane délimitée par (C_2). Cette propriété est indépendante des positions (C_1) et (C_2) : sur la figure 16 nous les supposons très voisines l'une de l'autre.
Comme (C) est orienté, le sens de sa normale est imposé ($\vec{n}_1$ puis $\vec{n}_2$) ainsi que le sens de ses différents brins $\vec{l}$, ce qui, avec la relation $dS \cdot \vec{n} = \vec{ds} \wedge \vec{l}$, détermine les normales $\vec{n}$ à la surface balayée. La figure 16 montre que l'on a

$$\Phi_1 = \Phi_2 - \delta\Phi_c\,, \quad \delta\Phi_c = \Phi_2 - \Phi_1\,.$$

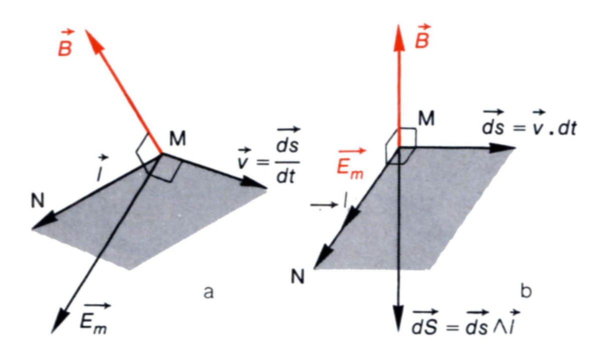
Cette différence est la variation $d\Phi$, entre la position (1) et la position (2), du flux Φ reçu par (C) :
lorsqu'un circuit (C) fermé se déplace dans un champ magnétique, le **flux reçu** par (C) varie de $d\Phi$ et le **flux coupé** par (C) vaut

$$\boxed{\delta\Phi_c = d\Phi}\,.$$



16. Variation de flux et flux coupé.
Le flux Φ à travers le circuit (C) passe de Φ_1 à Φ_2 quand (C) passe de la position (1) à la position (2) ; en même temps, (C) coupe un flux $\delta\Phi_c$.
On a $\Phi_1 = \Phi_2 - \delta\Phi_c$: le signe − vient du fait que, à travers la surface formée de dS balayée, les normales $\vec{n}$ ou $\vec{n}'$... pointent vers l'intérieur alors que $\vec{n}_2$ pointe vers l'extérieur de (C_2).

Le flux coupé par un circuit fermé mobile est égal à la variation du flux reçu par le circuit.



17. Mouvement d'un brin de conducteur dans un champ magnétique. Sur la figure b, le champ électromoteur est de même sens que $\vec{l}$, la f.é.m. $e = \vec{E_m} . \vec{l}$ est donc positive. Au contraire le flux coupé $\delta\Phi_c$ est négatif car $\vec{dS}$ et $\vec{B}$ sont de sens contraires. On trouve donc $e = -\frac{\delta\Phi_c}{dt}$.

d) F.é.m. et flux coupé, f.é.m. et variation de flux.

• **Cas d'un brin. Cas d'un circuit ouvert.**

Le brin $\overrightarrow{MN} = \vec{l}$ plongé dans le champ $\vec{B}$ est animé de la vitesse $\vec{v}$ à la date t : entre les dates très voisines t et $t + dt$, il se déplace de $\vec{ds} = \vec{v}dt$. Le champ électromoteur qui apparaît dans $\overrightarrow{MN}$ vaut :

$$\vec{E_m} = \vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{\vec{ds}}{dt} \wedge \vec{B},$$

la force électromotrice est :

$$e = \left(\frac{\vec{ds}}{dt} \wedge \vec{B}\right) . \vec{l} \quad \text{(figure 17a)} .$$

Pour calculer cette expression, plaçons-nous dans le cas particulier où $\vec{v} = \frac{\vec{ds}}{dt}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$ et $\vec{l}$ (figure 17b). Il s'ensuit que $\| \vec{E_m} \| = \frac{ds}{dt} . B$ et que $\vec{E_m}$ est colinéaire à $\vec{l}$, d'où :

$$e = \vec{E_m} . \vec{l} = E_m . l$$

$$e = \frac{ds}{dt} . B . l = \frac{dS . B}{dt} = \left| \frac{\delta\Phi_c}{dt} \right|,$$

et algébriquement $e = -\frac{\delta\Phi_c}{dt}$ car la figure 17b montre que l'on a $e > 0$ ($\vec{E_m}$ dirigé dans le sens positif de $\vec{l}$) et $\delta\Phi_c < 0$ ($\vec{dS}$ de sens opposé à celui de $\vec{B}$).

On démontre que ce résultat reste valable quelle que soit la disposition relative des vecteurs $\vec{l}, \vec{v}, \vec{B}$.

Pour un circuit (C) ouvert, on calcule la f.é.m. e en ajoutant celles qui apparaissent dans les différents brins qui constituent (C) :

$$e = \Sigma e \quad \text{d'où} \quad \boxed{e = -\frac{\delta\Phi_c}{dt}}$$

où $\delta\Phi_c$ est le flux coupé par (C) (voir plus haut figure 15).

- **Cas d'un circuit fermé.**

On a alors $\boxed{e = -\frac{\delta \Phi_c}{dt}}$ mais aussi $\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}}$.

On peut alors énoncer la **loi de l'induction électromagnétique** sous la forme suivante :
lorsqu'un circuit fermé se déplace dans un champ magnétique, il est le siège d'une f.é.m. d'induction $e = -\frac{d\Phi}{dt}$: $d\Phi$ représente la variation, pendant l'intervalle de temps élémentaire dt, du flux Φ reçu par le circuit.

Dans cette **relation algébrique,** le circuit et sa normale ont été orientés (règle de Maxwell), le flux est algébrique ainsi que la f.é.m. : si on la trouve positive c'est qu'elle s'exerce dans le sens positif du circuit, ou encore, qu'elle a tendance à débiter un courant positif (et inversement si elle est négative) (voir ci-dessous figures 18b et 20a).

e) Quelques exemples de détermination du sens de la f.é.m. ou du courant induits.

Suivant le cas, on détermine le sens du champ électromoteur $\vec{E}_m$, ou bien on applique algébriquement la relation fondamentale $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

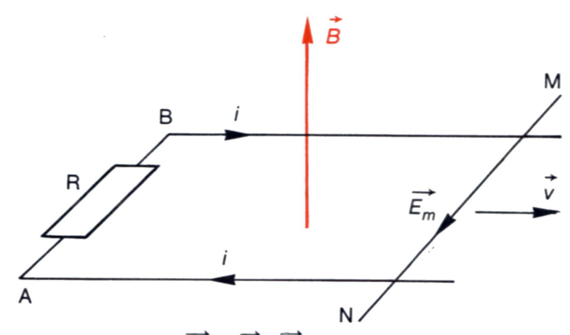
Voici quelques exemples.

- **Conducteur mobile sur des rails.** Le conducteur MN se déplace de gauche à droite, le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ est dirigé de M vers N (figure 18a) ; la force électromotrice s'exerce de M vers N, le courant circule dans le sens MNAB.

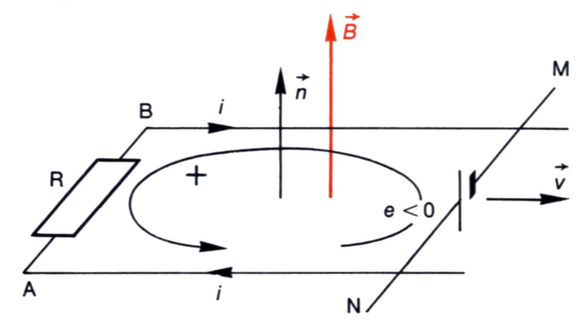
Sur la figure 18b on a choisi un sens positif de parcours MBAN, ce qui donne une normale $\vec{n}$ dirigée vers le haut et un flux Φ positif : étant donné le sens de $\vec{v}$, Φ augmente au cours du temps, donc $e = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$: le courant circule dans le sens MNAB.

- **Roue de Faraday** (figure 19). Celle-ci a été décrite page 197.

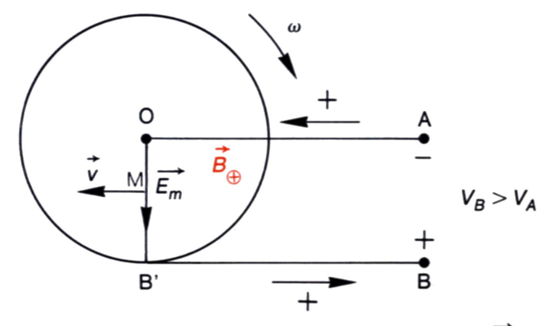
La roue étant animée d'une vitesse angulaire ω, tout point M de la roue possède une vitesse linéaire $\vec{v}$ ($\|\vec{v}\| = OM \, . \, \omega$). En chaque point M



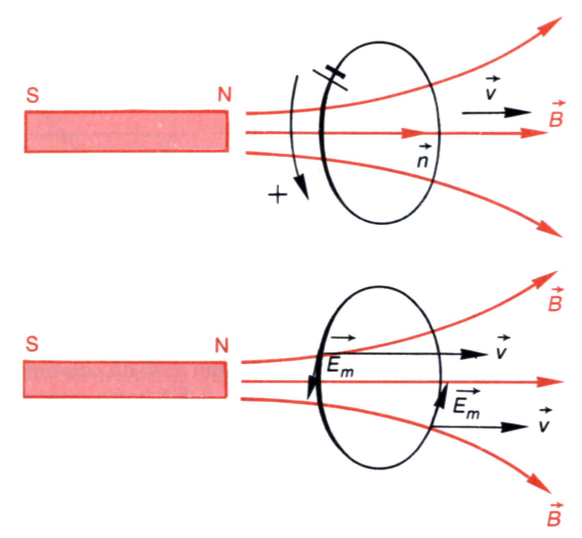
18a. A partir de $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ on détermine le sens de la f.é.m. localisée dans MN (de M vers N) et du courant induit.



18b. A partir du sens de variation du flux Φ (ici $\Phi > 0$ et croissant), on détermine le signe de la f.é.m. e (ici $e < 0$) et le sens du courant induit.



19. Roue de Faraday. Le champ inducteur $\vec{B}$ est appliqué perpendiculairement au plan de la roue. La f.é.m. induite s'exerce de O vers B' : on a donc un générateur de pôle positif B. Les polarités s'inversent avec le sens de rotation de la roue.



20a, b. Détermination du sens de la f.é.m. induite à partir du sens de variation du flux et du sens de la f.é.m. induite à partir du sens du champ électromoteur.

règne un champ électromoteur $\vec{E}_m$ qui est radial ; il est centrifuge pour les sens de $\vec{B}$ et ω choisis. Bien que la norme de $\vec{E}_m$ dépende de la distance OM à l'axe, son sens est constant entre O et B', il apparaît donc une f.é.m. dirigée de O vers B', c'est-à-dire positive si on choisit le sens AOB' B comme sens positif.
S'il passait un courant d'intensité i_{AB} dans ce dipôle générateur, il apparaîtrait entre ses bornes une différence de potentiel :

$$V_A - V_B = ri_{AB} - e_{AB}.$$

Les bornes de la roue de Faraday étant débranchées, il apparaît une tension :

$$V_A - V_B = -e : V_B > V_A.$$

- **Spire déplacée devant un barreau aimanté.**

La figure 20a précise le sens positif choisi sur la spire, qui donne un flux positif, et le sens du déplacement, qui entraîne une diminution du flux car la spire va vers les régions de champ $\vec{B}$ faible : donc on a $e > 0$.
La figure 20b montre le sens du champ électromoteur pour chaque brin de la spire, ce qui confirme le résultat précédent.

2. Conducteur fixe soumis à un champ magnétique $\vec{B}$ variable au cours du temps.

a) Rappel d'expériences.

Toutes les expériences illustrées par les figures 4a (page 198), 4b et 4c (même page) montrent que : une f.é.m. induite apparaît dans un circuit fixe lorsqu'il est soumis à un champ magnétique variable au cours du temps.

Un champ inducteur variable au cours du temps, produit par un aimant ou un circuit mobiles, ou par un circuit fixe parcouru par un courant variable, permet d'induire une f.é.m. dans un circuit fixe.

b) Expression de la f.é.m. induite dans un circuit fermé.

Soit un **circuit (C) fixe** plongé dans un **champ magnétique $\vec{B}$ variable** au cours du temps ; à un instant donné (C) reçoit un flux Φ, défini comme précédemment après une orientation du circuit et de sa normale $\vec{n}$
($\Phi = \vec{B} \,.\, (NS\vec{n})$ si $\vec{B}$ est uniforme,
$\Phi = \int \vec{B} \,.\, \vec{dS}$ si $\vec{B}$ n'est pas uniforme).

Puisque $\vec{B}$ est variable au cours du temps, Φ l'est aussi. Entre les dates t et $t + dt$ très voisines, le flux reçu par le circuit passe de la valeur Φ à la valeur $\Phi + d\Phi$, il varie de $d\Phi$.

On démontre, et vous admettrez, que la **f.é.m. qui apparaît dans un circuit (C) fixe plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ variable au cours du temps, a encore pour expression :**

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}}.$$

Cette f.é.m. est due à la présence dans l'espace, et donc tout au long du circuit (C), d'un champ électromoteur $\vec{E}_m$: nous ne donnerons pas ici son expression.

Il est toutefois **remarquable** que la f.é.m. induite prenne la même expression dans les deux cas :

— circuit (C) fixe dans un champ $\vec{B}$ variable au cours du temps ;

— circuit (C) mobile dans un champ $\vec{B}$ indépendant du temps.

c) Cas d'un circuit ouvert.

Le circuit (C) est un générateur de f.é.m. e (la f.é.m. induite) et de résistance interne r (celle des fils) ; après avoir orienté (C), de la borne A vers la borne B par exemple, on écrirait (figure 21a) :

$$V_A - V_B = ri_{AB} - e_{AB}$$

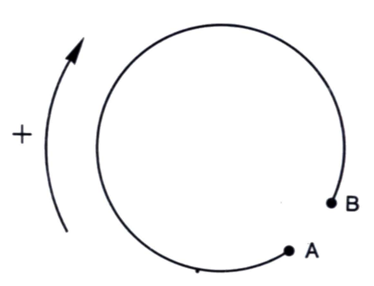
s'il passait un courant d'intensité i_{AB}.

Ici $i_{AB} = 0$ donc : **aux bornes d'un circuit ouvert siège d'une f.é.m. induite e_{AB} apparaît une tension $V_A - V_B = - e_{AB}$: la tension en circuit ouvert mesure la f.é.m.**

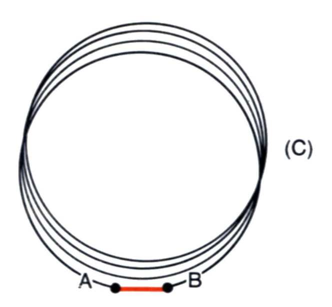
- **Calcul de la f.é.m. induite.**

On sait calculer la f.é.m. induite à partir de la connaissance du champ électromoteur (mais ce calcul dépasse le niveau de cet ouvrage).

Par contre, **en principe,** on n'a plus le droit d'utiliser la relation $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ puisque le circuit (C) n'étant pas fermé on ne peut pas définir un flux à travers (C).



21a. F.é.m. induite dans un circuit ouvert $V_A - V_B = ri_{AB} - e_{AB}$ donc ici $V_A - V_B = - e_{AB}$.



21b. Comme le circuit (C) possède un grand nombre de spires, la f.é.m. induite a pratiquement la même valeur, $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, pour le circuit ouvert et pour le circuit fermé.

22. F.é.m. induite par mouvement d'un aimant.

Toutefois, dans le cas d'un circuit ouvert possédant un grand nombre de spires, on peut **en pratique** calculer la f.é.m. e de la façon suivante : e étant répartie sur l'ensemble des brins du circuit, on change très peu sa valeur en rajoutant un brin AB qui ferme le circuit : on est alors ramené au cas b précédent pour lequel $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ si bien que pour le circuit ouvert de bornes A et B, $e \approx -\frac{d\Phi}{dt}$ dans cette expression, Φ est le flux magnétique à travers le circuit fermé correspondant (figure 21b).

d) Quelques exemples de détermination du sens de la f.é.m. ou du courant induits.

Nous appliquerons algébriquement la relation fondamentale

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Voici quelques exemples.

- Mouvement d'un barreau aimanté par rapport à une spire. Sur la figure 22 le flux reçu par la spire (S) est positif et croissant, la f.e.m. induite est négative, d'où le sens du courant induit i.
- Variation de l'intensité I du courant dans un circuit voisin de l'induit. Sur la figure 23, le flux reçu par la spire (S) est positif et décroissant car on suppose que l'intensité I qui parcourt (S′) décroît : la f.é.m. induite dans (S) est positive, d'où le sens du courant induit i.

3. Cas général d'un circuit mobile dans un champ magnétique $\vec{B}$ dépendant du temps.

- Dans ce cas on démontre, et vous admettrez, que pour un circuit fermé la f.é.m. d'induction s'écrit encore :

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}}.$$

Ici la **variation** $d\Phi$ du flux reçu par le circuit (C) est due à **deux causes :**
— le déplacement de (C) qui, $\vec{B}$ restant constant en tout point, provoquerait une variation de flux dans (C) ;

— la variation du champ $\vec{B}$ qui, (C) restant immobile, provoquerait une variation de flux dans (C).

• La figure 24 montre un tel cas : la spire (S) se déplace et le champ $\vec{B}$ est variable au cours du temps car le barreau aimanté qui le produit se déplace aussi.

4. Loi de Lenz.

La détermination du sens du courant induit peut se faire grâce à une **loi qualitative appelée loi de Lenz.** Nous allons énoncer cette loi sans démonstration, puis nous l'appliquerons à quelques-uns des exemples traités ci-dessus, enfin nous en verrons les conséquences énergétiques dans la troisième partie de ce chapitre.

a) Énoncé de la loi de Lenz.

Le courant induit a un sens tel que ses effets magnétiques tentent de s'opposer à la cause de ce courant.
Cette cause peut être un mouvement de l'induit, un mouvement de l'inducteur, ou une variation du courant inducteur.

b) Quelques exemples d'application de la loi de Lenz.

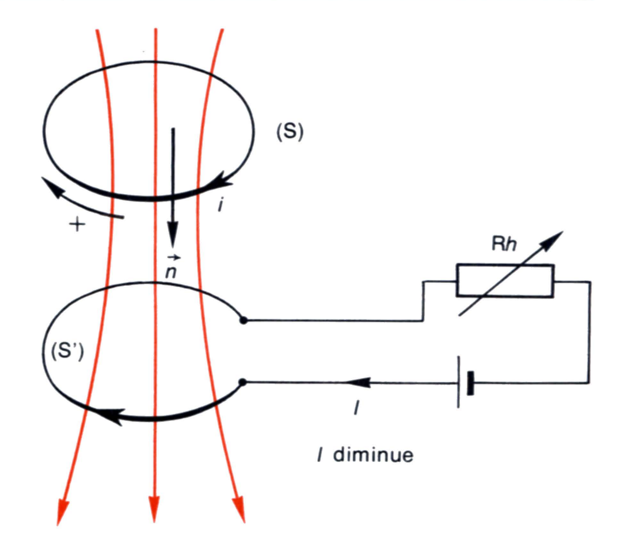
• Si la cause du courant induit est une variation du flux inducteur, le courant induit produit un champ magnétique et par conséquent un flux à travers le circuit induit : d'après la loi de Lenz ce **flux tente de s'opposer à la variation du flux inducteur.**

— Exemple 1.

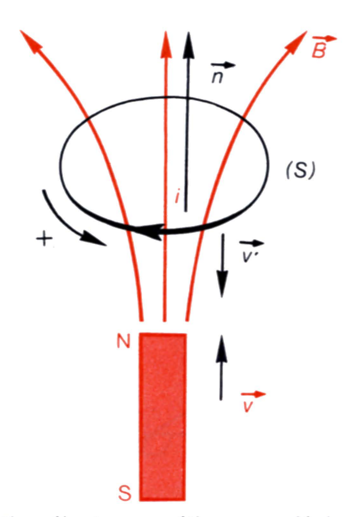
Sur le dispositif de la figure 22 (page 210), le flux à travers la spire (S) croît, le courant induit doit alors produire un flux négatif, il faut donc qu'il crée un champ magnétique $\vec{B_i}$ vers la gauche : d'après la « règle du tire-bouchon de Maxwell » le courant induit tourne dans la spire dans le sens indiqué sur la figure.

— Exemple 2.

Sur le dispositif de la figure 23 (page 211), le flux inducteur décroît, le champ $\vec{B_i}$ créé par le courant induit doit l'empêcher de décroître, il est donc dirigé vers le bas comme le champ inducteur, d'où le sens du courant induit.



23. F.é.m. induite par variation d'intensité dans un circuit voisin de l'induit.



24. Induction électromagnétique par déplacement de l'induit et de l'inducteur : le champ $\vec{B}$ inducteur est donc variable au cours du temps. Comme $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont supposés de sens contraires, on peut affirmer ici que le flux reçu par la spire (S) augmente, ce qui fait naître un courant induit d'intensité négative.

— Exemple 3.
Sur le dispositif de la figure 18b (page 207), la surface du circuit augmente, le flux inducteur aussi, le flux du courant induit doit être négatif, $\vec{B_i}$ doit être dirigé vers le bas d'où le sens du courant induit.
— Si la cause du courant induit est un mouvement, ce courant induit **produit ou subit** des actions électromagnétiques qui **tentent de freiner le mouvement :** ceci est l'autre aspect de la loi de Lenz.
— Exemple 4.
Sur le dispositif de la figure 18a (page 207), le courant induit d'intensité i apparaît dans un circuit plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$; une force de Laplace $\vec{f} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$ s'exerce alors sur chaque élément $\vec{l}$ du circuit et en particulier sur la partie mobile MN : cette force est de sens opposé à la vitesse $\vec{v}$ du conducteur MN, ce qui donne le sens du courant induit.
— Exemple 5.
Sur le dispositif de la figure 22 (page 210), la spire (S) parcourue par le courant induit se comporte comme un aimant, d'axe SN horizontal, qui doit repousser l'inducteur puisque celui-ci s'approche (elle l'attirerait s'il s'éloignait) ; elle doit donc lui présenter un pôle N, ce qui d'après la « règle du tire-bouchon de Maxwell » correspond à un courant induit dans le sens indiqué sur la figure.

III. Etude énergétique et applications de l'induction électromagnétique.

On peut schématiquement distinguer trois types de sources d'énergie électrique :
— les générateurs électrochimiques (piles),
— les photopiles utilisant l'énergie solaire (elles sont en cours de développement),
— les générateurs à induction électromagnétique (alternateurs, dynamos), ils fournissent actuellement la **quasi-totalité** de l'énergie électrique consommée : nous nous proposons de les étudier maintenant.
Les accumulateurs occupent une place à part dans la famille des générateurs car ils ne fonctionnent que grâce à l'énergie qu'ils ont reçue d'autres générateurs.

1. Aspect énergétique du phénomène d'induction électromagnétique.

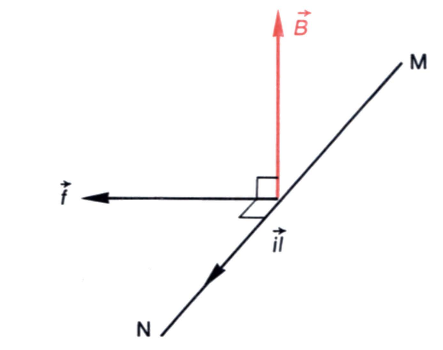
Une analyse trop rapide du phénomène d'induction électromagnétique pourrait laisser croire que nous tenons là un bon moyen de produire de l'énergie électrique sans contre-partie, c'est-à-dire à peu de frais. Nous allons montrer qu'il n'en est rien...
Cette production d'énergie sans contre-partie serait d'ailleurs contraire aux lois de conservation de l'énergie qui constituent une des bases de la Physique.

a) Le courant induit subit une force de Laplace.

Supposons qu'un circuit (C) fermé soit le siège d'un phénomène d'induction électromagnétique : un courant induit d'intensité i le parcourt. Ce courant est plongé dans le champ inducteur $\vec{B}$ donc chaque élément $\vec{l}$ du circuit subit une force dite **force de Laplace** (figure 25)

$$\boxed{\vec{f} = i\vec{l} \wedge \vec{B}}.$$

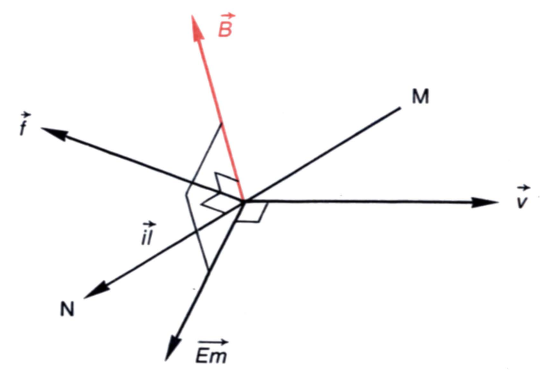
Le circuit (C) est soumis à la somme des actions s'exerçant sur chacun de ses brins.



25. La force de Laplace.

b) Il faut fournir du travail pour déplacer l'induit tout en produisant un courant.

• **La force appliquée au courant induit est une force de freinage.** En effet, supposons que le courant induit soit provoqué par le mouvement d'un circuit (C) dans un champ $\vec{B}$ indépendant du temps. Dans l'élément $\overrightarrow{MN} = \vec{l}$ animé de la vitesse $\vec{v}$, le sens de l'intensité i est généralement donné par celui du champ électromoteur $\vec{E_m} = \vec{v} \wedge \vec{B}$. On voit alors sur la figure 26 que $\vec{f} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$ et $\vec{v}$, sans être forcément colinéaires, font un angle supérieur à $\frac{\pi}{2}$: la force $\vec{f}$ **tend à freiner** le mouvement de l'élément d'induit $\vec{l}$; la force $\vec{f}$ appliquée à l'élément $\vec{l}$ **développe une puissance négative :** $dP = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$.
On démontre qu'il en est ainsi de ***P*, somme des puissances** des forces $\vec{f}$ appliquées à tout le circuit (C) par suite de **l'existence du courant induit**



26. La force de Laplace qui s'exerce sur le courant induit freine l'induit mobile.

Les forces électromagnétiques appliquées aux courants induits dans un circuit mobile développent une puissance négative qu'il faut compenser par une puissance mécanique motrice.

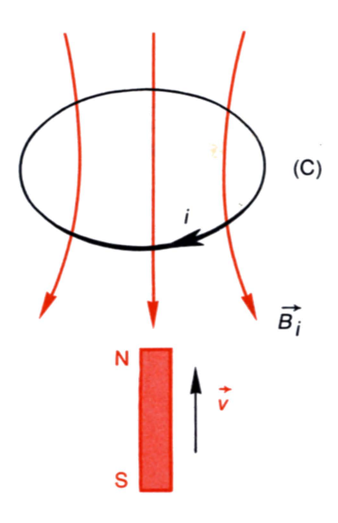
(bien que pour certains mouvements il puisse exister des éléments $\vec{l}$ pour lesquels $\vec{f}$ et $\vec{v}$ forment un angle aigu, d'où une puissance locale positive, ou motrice) : **la puissance *P* globale est négative.**
Ce résultat est en accord avec la **loi de Lenz.**

- **Entretien du mouvement de l'induit.**

On a alors la situation suivante : faisons effectuer au circuit (C) un mouvement donné :
— s'il est ouvert il faut fournir la puissance mécanique P_m qui sert à vaincre les effets des frottements, du poids...
— s'il est fermé il faut fournir la puissance mécanique $P_m + P_{m\,sup}$ avec $P_{m\,sup} + P = 0$, donc $P_{m\,sup} > 0$, pour que le mouvement du circuit soit exactement le même que dans le cas précédent (appliquez le théorème de l'énergie cinétique au circuit dans les deux cas et comparez).

- **Conclusion importante.**

Si l'on veut produire un **courant induit,** donc de **l'énergie électrique,** il est indispensable de fournir une **énergie mécanique** $\left(\int P_{m\,sup}\,dt\right)$: cette énergie compense le travail négatif des forces appliquées au courant induit.
Mais cette énergie mécanique n'est plus nécessaire si le courant induit cesse (circuit ouvert) bien que le mouvement ait toujours lieu et que la f.é.m. induite continue à exister : l'induit ne fournit plus d'énergie électrique et il n'y a plus à lui fournir d'énergie mécanique, en dehors de celle qui compense les effets des frottements.



27. L'aimant en mouvement a tendance à être freiné par les actions du courant induit *i* dans le circuit (C), par l'intermédiaire du champ magnétique $\vec{B}_i$ produit par ce courant.

c) Il faut fournir du travail pour déplacer l'inducteur tout en produisant un courant dans l'induit.

Approchons un aimant d'une bobine fermée (C) (figure 27). Le courant induit subit une action électromagnétique, qui ne travaille pas car (C) est immobile. Par contre, l'action réciproque exercée par le courant induit sur l'aimant, a tendance à freiner celui-ci : en effet le courant induit crée un champ magnétique $\vec{B}_i$ qui, dans le cas de la figure 27, est dirigé vers l'aimant et le repousse :
l'apparition du courant induit entraîne un freinage de l'inducteur et il faut **fournir de l'énergie mécanique** pour entretenir le mouvement de l'inducteur.
On vérifie le même phénomène dans tous les dispositifs à inducteur mobile, ce qui est en accord avec la **loi de Lenz.**

Lorsque des courants induits sont produits par le mouvement d'un inducteur, il est nécessaire de fournir de l'énergie mécanique pour déplacer celui-ci.

d) Conclusion.

- **Production d'énergie électrique par induction.**

Que l'induit soit mobile et l'inducteur fixe, ou le contraire, ou qu'ils soient tous les deux mobiles, **l'induction électromagnétique permet la production d'énergie électrique, mais à condition de fournir de l'énergie mécanique au système producteur.**
Cette **conversion** de l'énergie d'une forme en une autre est réalisée industriellement avec les **dynamos** et les **alternateurs** qui seront étudiés plus bas. Vous pouvez faire cette transformation à une plus petite échelle avec un alternateur de bicyclette.

- **Un conseil pratique.**

Un générateur industriel (centrale E.D.F. par exemple) débite sur des installations extérieures qui lui demandent des courants d'intensité plus ou moins grande. Les actions de freinage sur le courant induit par l'alternateur augmentent avec l'intensité de ce courant, il en est de même pour la puissance mécanique à fournir.
Lorsque vous laissez une lampe électrique **inutilement allumée,** cela se traduit par une valeur inutilement forte du courant débité par l'alternateur de la centrale thermique qui, automatiquement, consomme plus de vapeur pour garder sa vitesse de régime : il s'ensuit une **surconsommation de combustible,** pétrole, charbon, uranium ; dans le cas d'une centrale hydraulique il faut un plus grand débit d'eau dans la chute.

2. Quelques applications.

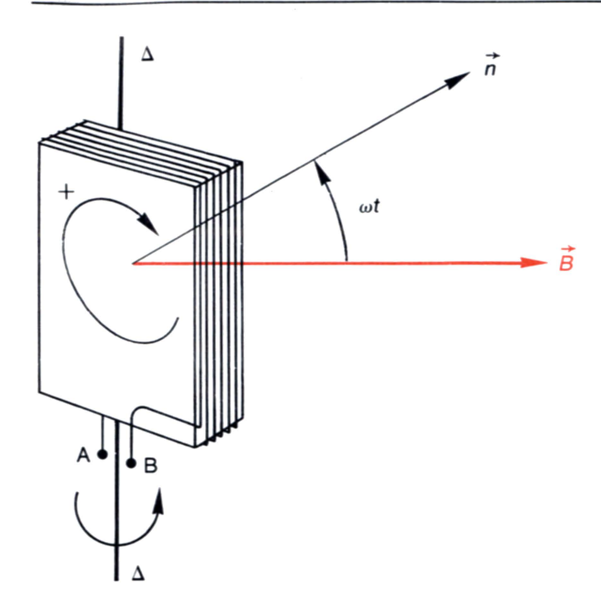
Nous allons étudier quelques-unes des plus importantes applications de l'induction électromagnétique : l'alternateur, le transformateur, les courants de Foucault, la réception des ondes électromagnétiques ; nous montrerons que les moteurs électriques sont aussi le siège d'un phénomène d'induction ; enfin nous consacrerons un chapitre particulier à l'étude de l'auto-induction.

a) L'alternateur.

- **Définition.**

C'est un générateur de courant alternatif : un courant alternatif est un courant circulant de façon périodique alternativement dans un sens puis dans l'autre ; le courant alternatif le plus simple est le courant sinusoïdal ; son intensité i est de la forme :

$$i = I_m \sin \omega t .$$



28a. Alternateur à induit mobile. Le flux reçu par l'induit est $\Phi = NSB \cos \omega t$, il apparaît donc une f.é.m. :
$e_{AB} = NSB\omega \sin \omega t$.

I_m est l'intensité maximale du courant, ω sa pulsation ; le courant se retrouve identique à lui-même chaque fois que ωt augmente de 2π, il s'est alors écoulé une période T :

$$\omega T = 2\pi .$$

• **Principe de l'alternateur à induit mobile.**

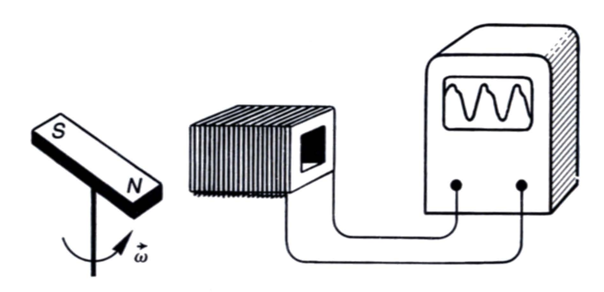
La figure 28a montre le principe d'un alternateur à induit mobile : celui-ci est formé d'un cadre de N spires de section S chacune, qui tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe Δ ; ce cadre est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, perpendiculaire à Δ ; la normale $\vec{n}$ au cadre orienté fait un angle ωt avec le champ $\vec{B}$.
Le flux qui traverse le cadre à la date t est donc $\Phi = \vec{B} \cdot (NS\vec{n}) = NSB \cos \omega t$, variable au cours du temps : le cadre est donc le siège d'une f.é.m. induite :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = NSB\omega \sin \omega t .$$

Le cadre tournant est donc un générateur de courant sinusoïdal, un **alternateur.**
Sur le plan pratique cet appareil est mal adapté à la production de fortes puissances électriques car le cadre, mobile, ne peut être relié aux circuits extérieurs d'utilisation, fixes, que par des contacts mobiles (balais) qui se détériorent rapidement sous l'effet de courants intenses.
Le principe du cadre tournant est utilisé dans le **magnétomètre à bobine tournante :** après une orientation convenable de l'axe de rotation Δ du cadre, la mesure de la valeur de l'induction magnétique B à l'endroit où tourne le cadre se ramène à celle de la f.é.m. qui y est induite.

• **Principe de l'alternateur à induit fixe.**

Dans ce cas un aimant (ou un électro-aimant) inducteur tourne, à vitesse angulaire ω constante, devant une bobine fixe. La figure 28b montre le fonctionnement de ce dispositif : l'oscillographe fournit la courbe $e = f(t)$ des variations, au cours du temps, de la f.é.m. induite e ; on peut vérifier que sa période T est celle de la rotation de l'inducteur, en accord avec le fait que le flux reçu par la bobine est aussi périodique de période T.
Ce dispositif simple est utilisé dans la génératrice de bicyclette.

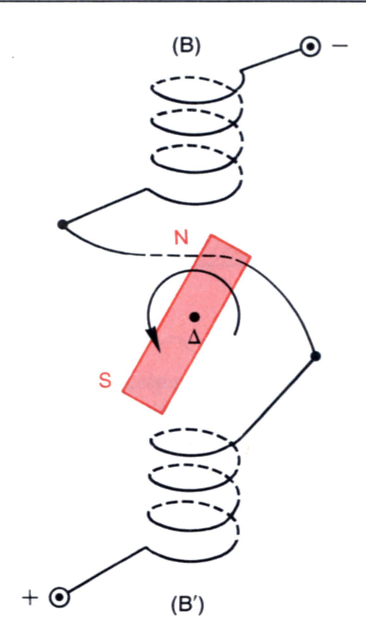


28b. Principe d'un alternateur à inducteur mobile. L'induit, fixe, est le siège d'une f.é.m. alternative.

La figure 29 montre que l'on peut utiliser deux bobines diamétralement opposées par rapport à l'axe de rotation de l'aimant : on double la force électromotrice en les branchant en série convenablement.
On remarquera sur la figure 28b que la f.é.m. obtenue n'est pas sinusoïdale.
Pour rendre cette f.é.m. sinusoïdale et aussi pour augmenter le flux reçu par chaque induit, ce qui augmente la f.é.m. induite, on ajoute dans les bobines des noyaux métalliques constitués d'un alliage spécial à base de fer (figure 30 et photo d'ouverture du chapitre).
Cette amélioration contribue à augmenter le **rendement de l'alternateur :** celui-ci reçoit de l'énergie mécanique d'un moteur ou d'une turbine qui entraîne l'aimant inducteur ; il rend de l'énergie électrique mais aussi de la chaleur sur son axe de rotation, dans les fils d'induits, dans l'électro-aimant de l'inducteur, et enfin dans sa carcasse métallique. **Il y a globalement conservation de l'énergie** mais le rendement, défini par :

$$\rho = \frac{\text{énergie électrique fournie au réseau extérieur}}{\text{énergie mécanique absorbée par l'alternateur}} ,$$

est inférieur à l'unité : il est couramment de l'ordre de 95 %.



29. Utilisation de deux induits dans un alternateur à inducteur mobile. Déterminez les sens des f.é.m. dans chacune des bobines à la date considérée, vérifiez qu'elles sont branchées convenablement l'une sur l'autre et que les polarités de l'alternateur à la date considérée sont correctes.

b) Le transformateur.

Nous verrons plus loin (chap. 16) que l'on a intérêt à transporter l'énergie électrique sous haute tension afin de réduire les pertes par effet Joule dans les lignes de transport. C'est le transformateur qui permet les changements de tensions.

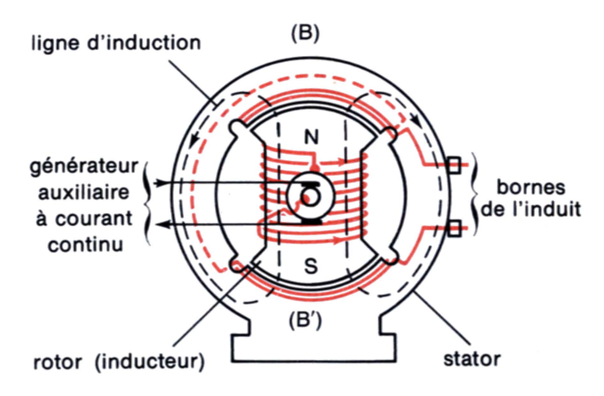
- **Principe.**

Plaçons côte à côte deux bobines (B_1) et (B_2) (figure 31) ; branchons (B_1) sur un générateur de tension sinusoïdale, le « secteur », tandis que (B_2) est branchée sur un oscillographe. (B_1) sera appelée bobine primaire, et (B_2) bobine secondaire. L'oscillographe montre que (B_2) est le siège d'une f.é.m. sinusoïdale e_2 : en effet (B_1) est traversée par un courant sinusoïdal d'intensité i_1, qui produit un champ magnétique, et un flux Φ_2 dans (B_2), proportionnels à chaque instant à i_1 :

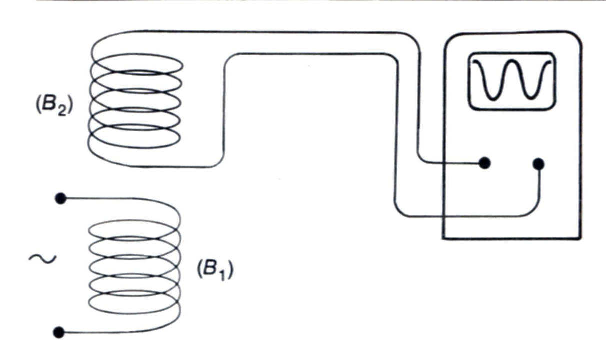
$$\Phi_2 = Ki_1 = KI_m \cos \omega t ,$$

$$e_2 = KI_m \, \omega \sin \omega t ;$$

le facteur K dépend des caractéristiques des bobines (surface des spires, nombres de spires) et de leur éloignement.



30. Schéma d'un alternateur bipolaire.



31. Principe d'un transformateur sans carcasse de fer.

On constate que la f.é.m. e_2 s'annule si les bobines sont trop éloignées ; e_2 s'annule également si la bobine (B_1) est alimentée en courant continu, car le flux Φ_2 qu'elle reçoit existe encore mais il est indépendant du temps.
L'ensemble des deux bobines forme un **transformateur ; celui-ci ne peut fonctionner qu'en courant alternatif.**

- **Réalisation pratique.**

On améliore très nettement les propriétés du transformateur en réunissant les deux bobines par une carcasse d'alliage à base de fer (même matériau que dans un alternateur) : les lignes du champ magnétique produit par les courants primaire i_1 et secondaire i_2 sont canalisées par la carcasse au lieu de se perdre en grande partie à l'extérieur du système (figure 32), ce qui donne entre les bobines un « couplage magnétique » bien meilleur que sans carcasse.

- **Propriétés.**

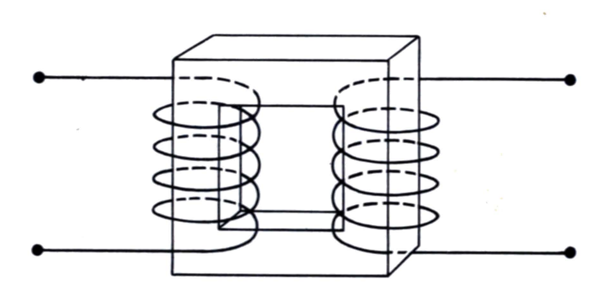
Ainsi construit, le transformateur possède des propriétés importantes : signalons-les sans démonstration.
— Les amplitudes U_{m_2} et U_{m_1} des tensions de sortie et d'entrée du transformateur sont dans un rapport très voisin de (à peine inférieur à) celui des nombres de spires des bobines correspondantes :

$$\frac{U_{m_2}}{U_{m_1}} \approx \frac{N_2}{N_1}.$$

Le transformateur peut donc servir à élever la tension ou à l'abaisser.
— L'énergie W_2 délivrée par le secondaire est à peine inférieure à W_1, celle qui est fournie au primaire : la différence apparaît sous forme de chaleur comme on peut le voir en touchant un transformateur qui fonctionne.

Le rendement $\rho = \frac{W_2}{W_1}$ d'un transformateur peut atteindre 97 %.

Lorsque le secondaire est débranché, le courant primaire a une intensité presque nulle et l'énergie consommée par le transformateur est très faible. Plus généralement l'énergie consommée au primaire s'adapte à la demande au secondaire.
Grâce à cette adaptation automatique, les transformateurs restent branchés en permanence dans les réseaux de distribution d'énergie électrique où ils servent à élever la tension à la sortie des alternateurs des centrales, en vue du transport de l'énergie à grande distance, puis à abaisser cette tension jusqu'à des valeurs acceptables pour la distribution chez les usagers (page 313 et figure 32).



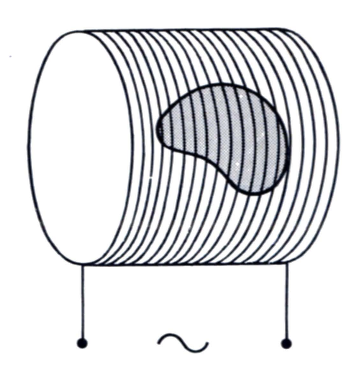
32. Schéma de principe d'un transformateur. La carcasse canalise les lignes du champ magnétique d'une bobine à l'autre. Le transformateur ne peut fonctionner qu'avec des courants alternatifs. C'est dans la bobine ayant le plus grand nombre de spires qu'on obtient la tension la plus élevée.

c) Les courants de Foucault.

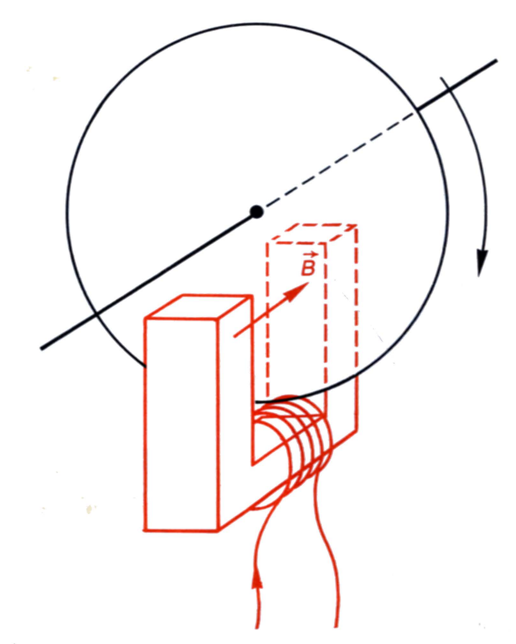
• Définition.
La figure 33 montre une masse de métal placée à l'intérieur d'une bobine parcourue par un courant alternatif : le bloc métallique est parcouru par des courants induits dont nous verrons ci-dessous les effets.
De même la figure 34 montre un disque de cuivre en rotation entre les pôles d'un électro-aimant : le mouvement provoque l'apparition de courants induits.
Lorsque des courants induits apparaissent dans l'ensemble d'un **volume conducteur** (et non plus dans un circuit formé de fil bobiné), ces courants sont alors appelés **courants de Foucault.**

• Propriétés.
Comme les autres courants induits déjà étudiés les courants de Foucault sont responsables :
— d'un dégagement de chaleur par effet Joule ;
— d'actions de freinage s'ils sont produits par un mouvement.

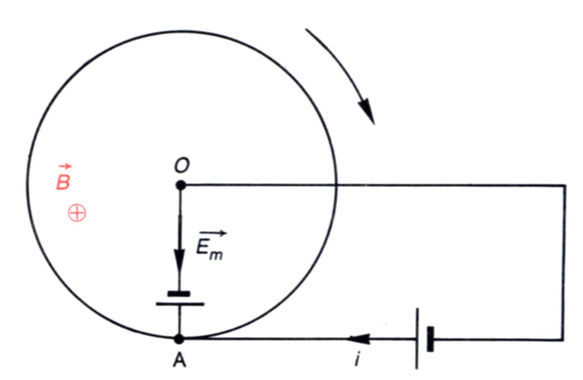
• Applications.
— Le dégagement de chaleur est recherché dans le **chauffage par induction** (figure 33) : ici la chaleur est dégagée dans toute la masse du bloc conducteur (alors que dans un four classique le réchauffement d'un objet se fait par sa surface).
— On réduit beaucoup le dégagement de chaleur par courants de Foucault dans les carcasses d'alternateurs, de transformateurs, de moteurs, en les constituant de **feuilles métalliques vernies** avant d'être empilées (le vernis est un isolant électrique) : cette précaution contribue à améliorer le rendement de ces appareils.
— Le freinage par courants de Foucault est utilisé dans les **ralentisseurs électromagnétiques** placés sur les véhicules de fort tonnage : camions et cars. La figure 34 montre le principe d'un tel appareil : un disque de cuivre est entraîné par les roues du véhicule dont la batterie d'accumulateurs alimente l'électro-aimant.
L'action de freinage sur le disque augmente avec l'intensité des courants induits, dont l'importance croît avec la vitesse du véhicule et avec le champ magnétique $\vec{B}$ produit par l'électro-aimant ; on règle la valeur de ce champ depuis le poste de conduite en jouant sur l'intensité I qui parcourt la bobine de l'électro-aimant.
Ce type de frein sert à compléter l'action des freins classiques sur les routes à forte pente.
— Le même principe est utilisé pour régler la vitesse ou éliminer rapidement les oscillations de certains appareils de mesure.



33. Principe d'un four à induction : des courants de Foucault apparaissent dans le bloc conducteur placé à l'intérieur de la bobine ; le bloc s'échauffe par effet Joule.



34. Principe d'un ralentisseur électromagnétique. Le disque en cuivre mis en rotation par les roues du véhicule est parcouru par des courants de Foucault et subit des actions de freinage.



35. Un moteur électrique : la roue de Barlow. Sous l'effet du courant d'intensité *i*, la roue tourne dans le sens indiqué, elle est le siège d'une f.é.m. induite *e* dirigée de O vers A donc en opposition avec la f.é.m. *E* du générateur extérieur : *e* est la f.c.é.m. du moteur ; *i* résulte de l'action simultanée de *E* et *e*.



36. Antenne émettrice-réceptrice.

d) La force contre-électromotrice des moteurs.

Vous savez que les moteurs électriques permettent de réaliser la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique. Dans tout moteur on trouve deux bobinages, l'un fixe (le stator), l'autre mobile autour d'un axe Δ (le rotor) ; grâce à un générateur on fait passer du courant dans les deux bobinages ; le champ magnétique produit par le stator agit sur les courants qui parcourent le rotor : le moment de ces actions par rapport à l'axe Δ est le **couple moteur.** Le rotor se met à tourner et développe une puissance mécanique. Ses brins, alors mobiles dans le champ $\vec{B}$ du stator, sont le siège d'une f.é.m. d'induction, qui tend à s'opposer au passage du courant fourni par le générateur, comme on peut le vérifier sur la figure 35 : celle-ci représente la roue de Barlow, qui est le moteur électrique le plus simple. **La force contre-électromotrice (f.c.é.m.) d'un moteur n'est autre que la f.é.m. induite dans son rotor en rotation.**
Remarquons que cette f.c.é.m. disparaît si on bloque le moteur qui se comporte alors comme une résistance.

e) La réception des ondes électromagnétiques.

On sait que l'onde électromagnétique est constituée d'un champ électrique et d'un champ magnétique variables à très haute fréquence et qui se propagent dans l'espace (cours de Physique de la classe de Première).
L'induction électromagnétique est le **phénomène de base de la réception** de l'onde électromagnétique. Cette réception s'effectue avec une **antenne,** constituée d'une tige conductrice (par exemple sur les postes de radio pour automobiles ou les récepteurs portatifs) ou d'une petite bobine de fil entourant un barreau de ferrite (par exemple sur les récepteurs portatifs). Le **champ électromoteur de l'onde** agit sur les porteurs de charge de l'antenne et **y induit une f.é.m. ;** puis les circuits du récepteur amplifient les effets de cette f.é.m. et, après détection, fournissent un signal de basse fréquence qui excite le haut-parleur du récepteur (voir chapitre 17, page 327 et aussi le cours de la classe de Première).

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- Le phénomène d'induction électromagnétique est l'apparition d'une ________ dans un circuit qui se ________ convenablement dans un champ magnétique, ou qui est soumis à un champ magnétique ________.
Lorsque cette f.é.m. apparaît dans un circuit fermé elle donne naissance à un ________ ; si elle se produit dans un circuit ouvert il apparaît une ________ entre les bornes du circuit.
Lorsqu'un conducteur est mobile à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$, il règne dans ce conducteur un champ électromoteur de valeur $\vec{E}_m$ = ________. Dans le brin $\overrightarrow{MN} = \vec{l}$ du conducteur, ce champ $\vec{E}_m$ est responsable d'une f.é.m. induite e = ________ .
- Pour un circuit délimitant une surface S, de normale orientée $\vec{n}$, plongé dans un champ $\vec{B}$, le flux magnétique reçu est Φ = ________ .
- Dans son déplacement dans un champ, un circuit coupe un flux ; si ce circuit est fermé, le flux coupé est égal à la ________ à travers le circuit.
- La f.é.m. induite a pour expression e = ________ : la variation de flux est produite soit par le mouvement de l'________ par rapport au champ, soit par la ________ du champ inducteur, ou enfin par les deux.
- Il faut fournir de l'énergie ________ pour faire apparaître des courants ________ c'est-à-dire produire de l'énergie ________ .
- L'induction électromagnétique trouve sa principale application dans le fonctionnement des alternateurs qui transforment l'énergie ________ en énergie ________ et auxquels on associe les ________ pour améliorer les conditions de transport de cette énergie.

Petites questions.

1. Quelle est la f.é.m. induite dans un circuit rigide pendant qu'on le déplace parallèlement à lui-même (translation) dans un champ magnétique uniforme ?

2. Une spire circulaire, dont le plan est horizontal, est orientée de façon telle que, si on la regarde par-dessus, le sens positif est celui de la rotation des aiguilles d'une montre. Cette spire est soumise à un champ magnétique dirigé vers le haut : quel est le signe du flux magnétique à travers la spire ?

3. Comment calcule-t-on la f.é.m. induite dans un circuit de bornes A et B connaissant le vecteur champ électromoteur $\vec{E}_m$?

4. On approche un aimant suivant l'axe d'une spire fermée, le pôle Sud de l'aimant étant pointé vers la spire : déterminez le sens de la f.é.m. induite dans la spire et celui du courant induit. L'aimant subit-il une force attractive ou répulsive ?

5. Deux bobines sont placées l'une au-dessus de l'autre et leurs axes sont confondus. Dans l'une d'elles on fait passer un courant qui circule dans le sens des aiguilles d'une montre quand on regarde les bobines par-dessus. Si l'intensité de ce courant augmente au cours du temps, déterminez le sens du courant induit dans l'autre bobine supposée fermée sur elle-même.

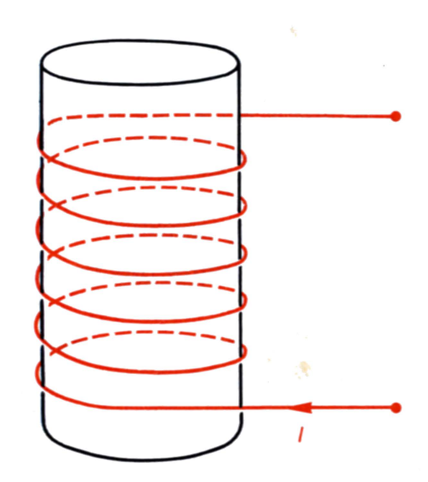
6. Une spire conductrice et élastique de rayon r et de centre O est posée sur un plan horizontal où elle est traversée par un champ magnétique vertical $\vec{B}$ uniforme dirigé vers le haut. Par un moyen convenable on augmente le rayon r tout en gardant immobile le centre de la spire. Déterminez les sens de la f.é.m. et du courant induits pendant cette augmentation du rayon et précisez ces sens sur une figure qui représente la spire vue par-dessus.

7. Le ralentisseur électromagnétique (décrit page 219) dégage-t-il de la chaleur comme les freins conventionnels qui utilisent les frottements ?

8. Un conducteur AB de longueur 5 cm est déplacé de 5 cm dans un champ magnétique $\vec{B}$ de 0,4 T qui lui est perpendiculaire. Calculez le flux coupé au cours de ce déplacement dans les trois cas suivants : le vecteur déplacement est :
a) perpendiculaire à la fois à AB et au champ $\vec{B}$; **b)** parallèle à AB ; **c)** parallèle à $\vec{B}$.

Réponses : **a)** $\Phi_c = 1$ mWb ; **b)** $\Phi_c = 0$; **c)** $\Phi_c = 0$.

9. Un barreau de cuivre cylindrique est placé à l'intérieur d'une bobine parcourue par un courant dont l'intensité I augmente au cours du temps (figure ci-dessous).
Des courants de Foucault prennent naissance dans le barreau, où ils décrivent des courbes fermées.
Que pensez-vous de la forme et de la disposition de ces lignes de courant ; précisez le sens des courants induits par rapport à celui du courant dans la bobine ? Qu'y a-t-il de changé si l'intensité I diminue ?



10. Supposons que sur la figure 6 page 200, le conducteur MN, qui se déplace à la vitesse $\vec{v}$ dans le champ magnétique $\vec{B}$, appartienne à un circuit fermé : un porteur de charge possède alors la vitesse $\vec{v}'$ par rapport au conducteur MN et la vitesse $\vec{V} = \vec{v} + \vec{v}'$ par rapport au champ.
a) Quelle est l'expression de la force $\vec{F}$ subie par le porteur de charge q ?
b) Interprétez le rôle des deux composantes $\vec{f}$ et $\vec{f}'$ de cette force F, après avoir précisé le sens de v' et celui de f'.

Applications immédiates.

11. Une bobine formée de 100 spires de rayon 2 cm est placée dans un champ magnétique uniforme de valeur 0,2 T, dont le vecteur champ B fait un angle de 30° avec la normale aux spires. Calculez le flux reçu par la bobine.

Réponse : $\Phi = 22$ mWb.

12. Un conducteur AB horizontal de longueur 10 cm se déplace horizontalement et perpendiculairement à sa propre direction dans un champ magnétique $\vec{B}$ vertical, dirigé vers le haut : ainsi les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{v}$ et $\vec{B}$ forment un trièdre trirectangle direct ; $B = 1$ T, $v = 2$ m . s^{-1}.
Calculez le champ électromoteur qui règne dans le conducteur et précisez son sens sur une figure. Calculez la différence de potentiel U entre les extrémités A et B et précisez lequel de ces deux points est au plus haut potentiel.

Réponses : $E_m = 2$ V/m, $U = 0{,}2$ V, $V_B > V_A$.

13. Un cadre carré de 5 cm de côté est placé perpendiculairement à un champ magnétique uniforme de 0,2 T. En 1/4 de seconde, on fait faire 1/4 de tour au cadre de façon à placer son plan parallèlement au champ. Quelle est la f.é.m. induite en moyenne dans le cadre pendant son mouvement ?

Réponse : $e = 2 . 10^{-3}$ V.

14. Calculez la f.é.m. induite dans un circuit où le flux magnétique augmente de $2 \cdot 10^{-2}$ Wb en 1/100 de seconde.

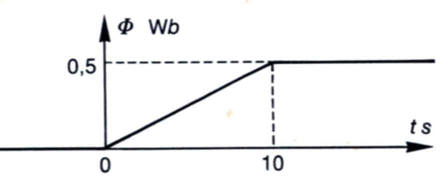
15. Une bobine plate est placée perpendiculairement à un champ magnétique de 0,2 T. On la retourne face pour face après l'avoir branchée sur un fluxmètre : celui-ci indique une variation de flux de 80 mWb. Calculez, en cm², la surface totale de la bobine (produit NS du nombre de spires par la surface de chaque spire).

Réponse : NS = 2 000 cm².

Approfondissement.

Les exercices signalés par un carré rouge □ présentent une plus grande difficulté que les autres.

16. Tracez la courbe $e(t)$ des variations, au cours du temps, de la f.é.m. induite dans un circuit où le flux varie suivant la loi représentée par le graphe ci-dessous.



17. Roue de Faraday.
Dans le montage de la figure 3b (page 197), on remplace le galvanomètre par une résistance R, puis on donne à la roue un mouvement de rotation dans le sens des aiguilles d'une montre.

a) Déterminez le sens du champ électromoteur qui règne entre O et O'.

b) Déterminez le sens des forces électromagnétiques appliquées aux éléments de surface de la roue placés sur ou au voisinage du rayon OO'.

c) Quel va être le rôle mécanique de ces forces ? Ce résultat était-il prévisible ? Comment faut-il choisir la valeur de la résistance R si l'on veut que la roue s'arrête rapidement ?

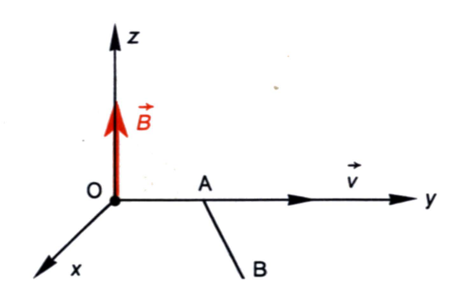
18. Un avion d'envergure 50 m vole à la vitesse de 720 km/h dans une région où le champ magnétique terrestre a pour composante horizontale $B_H = 2 \cdot 10^{-5}$ T et pour composante verticale $B_V = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ T dirigée vers le bas.
Calculez la d. de p. U qui apparaît entre les extrémités des ailes ; quelle est l'extrémité d'aile qui est au plus haut potentiel ?

Réponses : $U = 0{,}35$ V ; c'est l'extrémité de l'aile gauche qui est au plus haut potentiel.

19 Relativement à un repère $Oxyz$, un conducteur AB est animé d'un mouvement de translation à la vitesse $\vec{v}$ parallèle à Oy vers les y positifs. Dans l'espace balayé par le conducteur règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme de norme B, parallèle à Oz et de même sens. Soient X, Y et Z les composantes de $\vec{AB}$. Déterminez la force électromotrice e_{AB} dans AB, et comparez les potentiels des points A et B pour les cas suivants :

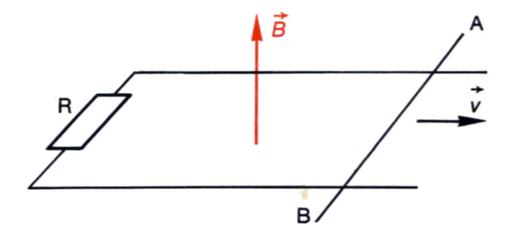
a) $X = l,\ Y = Z = 0$;
b) $X = -l,\ Y = Z = 0$;
c) $X = Y = 0,\ Z = l$;
d) $X = Z = 0,\ Y = l$;
e) $X = Y = l\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ Z = 0$;
f) $X = 0,\ Y = Z = l\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Réponses : $\vec{E_m} = \vec{V} \wedge \vec{B}$ porté par Ox ; **a)** $e_{AB} = VBl$, $V_B > V_A$; **b)** $e_{AB} = -vBl$, $V_A > V_B$; **c)** $e_{AB} = 0$, $V_A = V_B$; **d)** $e_{AB} = 0$, $V_A = V_B$; **e)** $e_{AB} = vBl\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $V_B > V_A$; **f)** $e_{AB} = 0$, $V_A = V_B$.

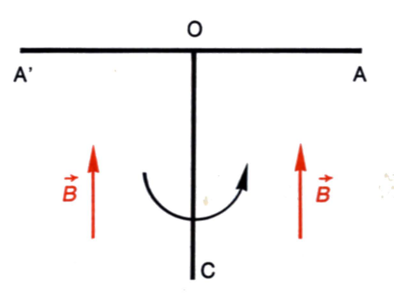


20. Deux rails parallèles distants de a forment un plan horizontal ; un champ magnétique $\vec{B}$ traverse ce plan de bas en haut. On relie les rails par une résistance R et un conducteur AB de masse $m = 100$ g glisse sans frottement sur les rails en leur restant perpendiculaire (figure ci-dessous).
A la date $t = 0$ la tige AB possède la vitesse $v_0 = 50$ cm/s, parallèle aux rails.
Étudiez le phénomène d'induction électro-magnétique qui se produit dans le circuit fermé ainsi constitué : montrez que la tige AB finira par s'arrêter et calculez l'énergie W dégagée par effet Joule depuis la date $t = 0$ jusqu'à la fin du mouvement.

Réponse : $W = 12{,}5$ mJ.



21. Une tige AOA' de milieu O est soudée perpendiculairement sur une tige OC verticale de façon à former un T. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, vertical, et dirigé vers le haut. On fait tourner le T autour de OC à la vitesse angulaire constante ω dont le sens est indiqué sur la figure ci-dessous. **a)** Comparez les potentiels des points A, A' et O. **b)** Même question si on inverse le sens de ω.

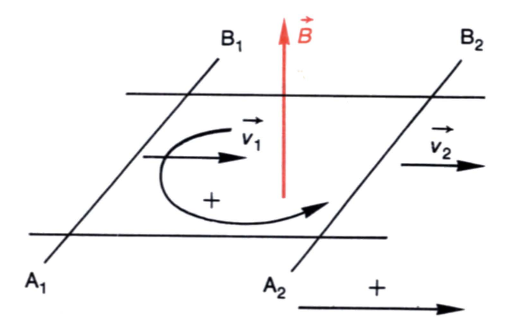


22. Deux rails parallèles formant un plan horizontal sont distants de $a = 5$ cm. Entre les rails règne un champ magnétique uniforme vertical dirigé vers le haut et de valeur $B = 0{,}4$ T (figure ci-dessous). Sur les rails, on fait glisser deux conducteurs $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ perpendiculaires à la direction des rails, avec des vitesses v_1 et v_2 parallèles aux rails. Le rectangle déformable ainsi constitué forme un circuit de résistance $R = 0{,}2\ \Omega$, supposée constante.

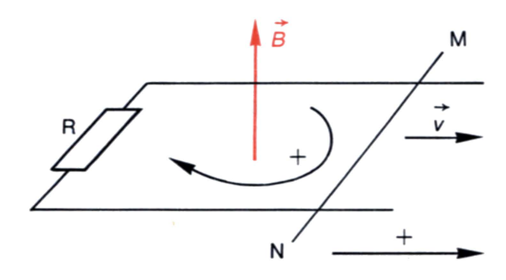
a) Calculez, en fonction de B, R, a, v_1, v_2, l'expression de l'intensité du courant qui parcourt le rectangle orienté dans le sens $A_1 A_2 B_2 B_1$, et calculez numériquement cette intensité dans les cas suivants :
$v_1 = 10$ cm/s, $v_2 = 5$ cm/s ; $v_1 = 10$ cm/s, $v_2 = 15$ cm/s ; $v_1 = 10$ cm/s, $v_2 = 10$ cm/s.

b) Les conducteurs $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ sont mobiles sans frottement sur les rails et leurs vitesses v_1 et v_2 sont constantes.
Pour chacun des couples de valeurs numériques v_1, v_2 proposées ci-dessus, calculez la puissance développée par effet Joule dans le circuit et comparez-la aux puissances des forces mécaniques exercées sur les conducteurs pour leur assurer des mouvements uniformes.

Réponses : **a)** $i = \frac{Ba}{R}(v_1 - v_2)$, $i = +5$ mA, $i = -5$ mA, $i = 0$; **b)** $P_{Joule} = Ri^2$,
$P_1 = \frac{B^2 a^2}{R}(v_1 - v_2) \cdot v_1$,
$P_2 = -\frac{B^2 a^2}{R}(v_1 - v_2) \cdot v_2$, $P_J = P_1 + P_2$,
soit 5 μJ, 5 μJ et 0.



23 Deux rails parallèles distants de a définissent un plan horizontal. Sur ces rails se déplace sans frottement un conducteur MN de masse m, perpendiculaire à la direction des rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme vertical dirigé vers le haut. Les rails sont reliés par une résistance, ce qui avec le conducteur MN constitue un circuit fermé de résistance totale R ; la figure ci-dessous indique le sens positif choisi sur le circuit ainsi que le sens positif servant à la mesure de la vitesse $\vec{v}$ du conducteur MN et à la force f qui lui est appliquée.
A la date $t = 0$, on lance MN avec une vitesse $\vec{v_0}$ parallèle aux rails ($v_0 > 0$), puis on l'abandonne à son mouvement.



a) Donnez, en fonction de B, a, R, v, les expressions de la f.é.m. induite et de l'intensité du courant induit à la date t où le conducteur a la vitesse v, de mesure v.

b) Quelle est, en fonction de B, a, v, R, la mesure de la force subie par le conducteur MN du circuit ?

c) Établissez l'équation du mouvement du conducteur MN, sous la forme d'une relation entre son accélération et sa vitesse.

d) Trouvez la loi horaire $v(t)$ suivie par la vitesse, sachant qu'une équation de la forme $\frac{dv}{dt} = Kv$ admet une solution de la forme $v = Ae^{Kt}$.
Quelle est la valeur finale de la vitesse ; ce résultat était-il prévisible ?

e) En combien de temps la vitesse de MN est-elle réduite à la moitié de sa valeur initiale : faites le calcul numérique avec les valeurs suivantes : $a = 10$ cm, $B = 1$ T, $m = 100$ g, $R = 1\ \Omega$.

Réponses : **a)** $e = Bav$; $i = \frac{Bav}{R}$;
b) $f = -\frac{B^2 a^2}{R} v$; **c)** $\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 a^2}{mR} v$;
d) $v = v_0 \cdot e^{-\frac{B^2 a^2}{mR} t} \to 0$
par suite du freinage créé par les courants induits ;
e) $v = \frac{v_0}{2}$ pour $t = \frac{mR}{B^2 a^2} \text{Log}\, 2 = 6{,}9$ s.

24 **Régimes d'un moteur électrique.** Cet exercice est assez difficile. Un générateur de f.é.m. E alimente une roue de Barlow de rayon R qui tourne à la vitesse angulaire ω dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire au plan de la roue (figure 35, page 220). Cette roue est mobile sans frottement autour de son axe ; la résistance totale du circuit roue-générateur vaut R'.

a) Déterminez le sens de rotation de la roue, et celui du champ électromoteur en un point M du rayon OA tel que $OM = r$; calculez en fonction de B, r, ω la norme de ce champ électromoteur.

b) Ce champ dépendant de r, commencez par calculer la f.é.m. induite sur l'élément de rayon de longueur dr compris entre r et $r + dr$; en déduire la f.é.m. sur l'ensemble du rayon OA.

c) Calculez l'intensité qui parcourt le circuit lorsque la roue a la vitesse ω.

d) Sachant qu'un solide mobile autour d'un axe Δ tourne à vitesse constante lorsque la somme des moments par rapport à Δ des forces appliquées est nulle, calculez la vitesse limite Ω de la roue, c'est-à-dire la valeur constante que prend ω lorsqu'on laisse la roue tourner librement sans la freiner.

e) La roue tourne à nouveau à une vitesse angulaire ω quelconque. Exprimez la puissance fournie par le générateur en fonction de E et i.

f) La roue sert de moteur, c'est-à-dire qu'on lui applique un couple résistant $-\mathcal{M}$; elle prend alors une vitesse de régime constante $\omega = \Omega'$. Quelle est la puissance dépensée par le couple résistant ? Calculez la vitesse Ω' de la roue de Barlow.

Réponses : **a)** $E_m = B\,\omega\,r$;

b) $e = -\dfrac{BR^2}{2}\,\omega$ en prenant le sens de branchement de E comme sens positif ;

c) $R'i = E - \dfrac{BR^2}{2}\,\omega$; **d)** $i = 0, \Omega = \dfrac{2\,E}{BR^2}$;

e) $P = Ei$;

f) $Ei = R'\,i^2 + \mathcal{M}\Omega'$ d'où en utilisant **c)**, $\Omega' = \dfrac{2\,E}{BR^2} - \dfrac{4\,\mathcal{M}R'}{B^2\,R^4}$: la vitesse de régime diminue quand on augmente $\mathcal{M}$.

25. Un barreau aimanté est placé suivant l'axe d'une bobine puis déplacé par rapport à celle-ci avec une vitesse telle que le flux reçu par la bobine varie au cours du temps suivant la loi : $\Phi_{Wb} = 0{,}5 - 0{,}05\ t$.

a) Précisez sur une figure le sens d'orientation du circuit par rapport au sens de l'axe SN qui joint les pôles Sud et Nord de l'aimant, ainsi que le sens du déplacement de l'aimant par rapport à la bobine.

b) Calculez la f.é.m. induite dans cette bobine.

c) A quelle date t_1 peut-on considérer que la bobine et l'aimant sont très éloignés l'un de l'autre ?

d) Montrez que la loi proposée pour la variation du flux n'a pas de sens physique pour $t > t_1$.

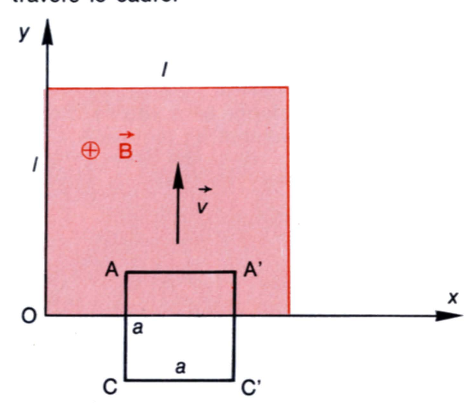
Réponses : **a)** SN et $\vec{n}$ sont de même sens et l'aimant s'éloigne de la bobine ;
b) $e = 0{,}05$ V ; **c)** $t_1 = 10$ s ; **d)** la loi de variation donne $\Phi < 0$ pour $t > t_1$ alors que Φ doit rester nul quand l'aimant est très éloigné de la bobine.

26 Un cadre vertical carré de côté a dont deux côtés sont horizontaux se déplace verticalement vers le haut à la vitesse constante $\vec{v}$. Il pénètre dans un champ magnétique $\vec{B}$ horizontal uniforme : celui-ci n'existe qu'à l'intérieur du volume dont la section droite, carrée de côté l, est représentée par la partie hachurée de la figure ci-dessous (sur cette figure Ox est horizontal et $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de la figure). On repère la position du cadre à la date t par l'ordonnée y de son côté AA'. On aura donc divers cas à envisager, par exemple $y < 0$, $0 < y < a$, ...

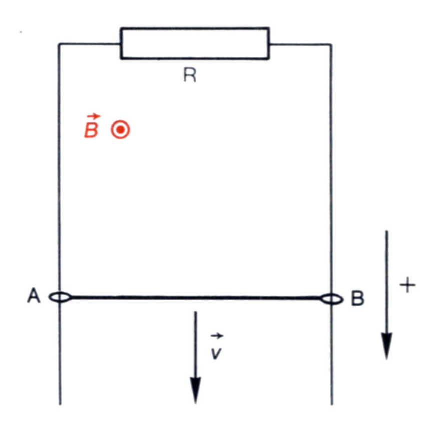
a) Déterminez, pour les différents intervalles de valeurs de y, le champ électromoteur qui règne en un point du cadre en mouvement.

b) En déduire la f.é.m. induite dans le cadre supposé orienté dans le sens AA' C' C, et ceci pour chaque intervalle de valeur de y.

c) Reprenez le calcul de la f.é.m. induite en utilisant la notion de flux magnétique à travers le cadre.



27. Les extrémités A et B d'un conducteur AB de masse m et de poids mg glissent sans frottement le long de deux rails parallèles, verticaux, distants de a, entre lesquels règne un champ magnétique B uniforme perpendiculaire au plan des rails. Les rails sont reliés par une résistance : la résistance totale du circuit ainsi constitué vaut R, indépendante de la position du conducteur AB sur les rails. On lâche le conducteur AB.



a) Donnez les expressions de la f.é.m. induite et de l'intensité du courant induit dans le circuit à la date où AB possède la vitesse v.

b) Donnez l'expression de la force électromagnétique appliquée au conducteur AB.

c) Montrez que la vitesse v va croître et tendre vers une limite V que l'on demande de calculer.

d) AB ayant atteint cette vitesse limite, faites l'étude énergétique du système pendant l'intervalle de temps Δt et retrouvez ainsi l'expression de V.

Réponses : **a)** $e_{BA} = Bav$, $i_{BA} = \dfrac{Bav}{R}$;

b) $f = -\dfrac{B^2\,a^2}{R}\,v$;

c) $m\,\dfrac{dv}{dt} = mg - \dfrac{B^2\,a^2}{R}\,v$, $= V$

si $mg - \dfrac{B^2\,a^2}{R}\,V = 0$;

d) $mgV\Delta t = R\,\dfrac{B^2\,a^2}{R^2}\,V^2\,\Delta t$.

28. Alternateur à induit mobile.
L'alternateur décrit figure 28a page 216 est constitué d'une bobine de N spires de surface unitaire S chacune, tournant à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe Δ dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et perpendiculaire à Δ. La bobine, fermée sur elle-même, possède une résistance R.

a) Calculez la f.é.m. induite dans la bobine à la date t où sa normale $\vec{n}$ fait l'angle ωt avec le vecteur champ $\vec{B}$. Donnez les expressions instantanées de l'intensité et de la puissance Joule P dans la bobine.

b) Calculez le moment magnétique $\mathcal{M}$ de la bobine à la date t, puis le couple Γ des forces électromagnétiques qu'elle subit. Quelle est la puissance P' développée par ce couple ?

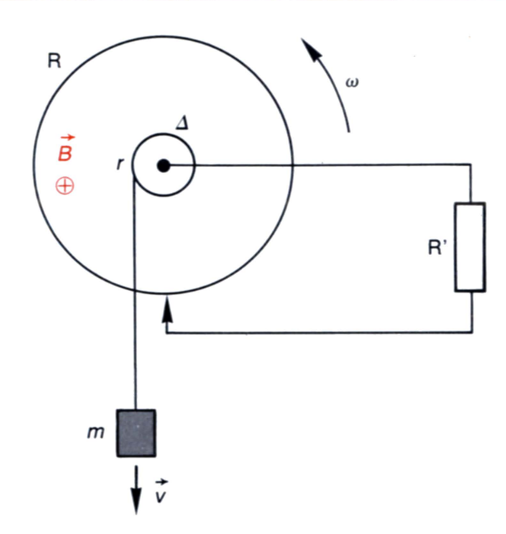
c) Comparez les résultats du **a)** et du **b)** et commentez.

Réponses : **a)** $e = NSB\omega \sin \omega t$,
$i = NSB\omega \sin \omega t$, $P = N^2 S^2 B^2 \omega^2 \sin^2 \omega t$;
b) $\mathcal{M} = N^2 S^2 B\omega \sin \omega t$,

$\Gamma = -\dfrac{N^2 S^2 B^2 \omega}{R} \sin^2 \omega t$ résistant.

$P' = \Gamma\omega = -P$, ce qui exprime la transformation intégrale de l'énergie mécanique en énergie électrique puis calorifique.

29. La figure ci-contre représente une roue de Faraday, disque conducteur de rayon R solidaire d'une poulie de rayon r sur lequel on a enroulé un fil inextensible qui soutient une masse m. Le disque est relié à un circuit de résistance R' par un contact sur son axe Δ et un autre sur sa périphérie ; il est parfaitement mobile autour de son axe Δ ; enfin il est plongé dans un champ magnétique uniforme parallèle à son axe Δ. On appelle J le moment d'inertie de l'ensemble disque-poulie par rapport à l'axe Δ.
Le système, abandonné sans vitesse initiale, se met progressivement en mouvement.



a) Exprimez la relation qui existe entre la vitesse linéaire v de la masse m et la vitesse angulaire ω du disque.

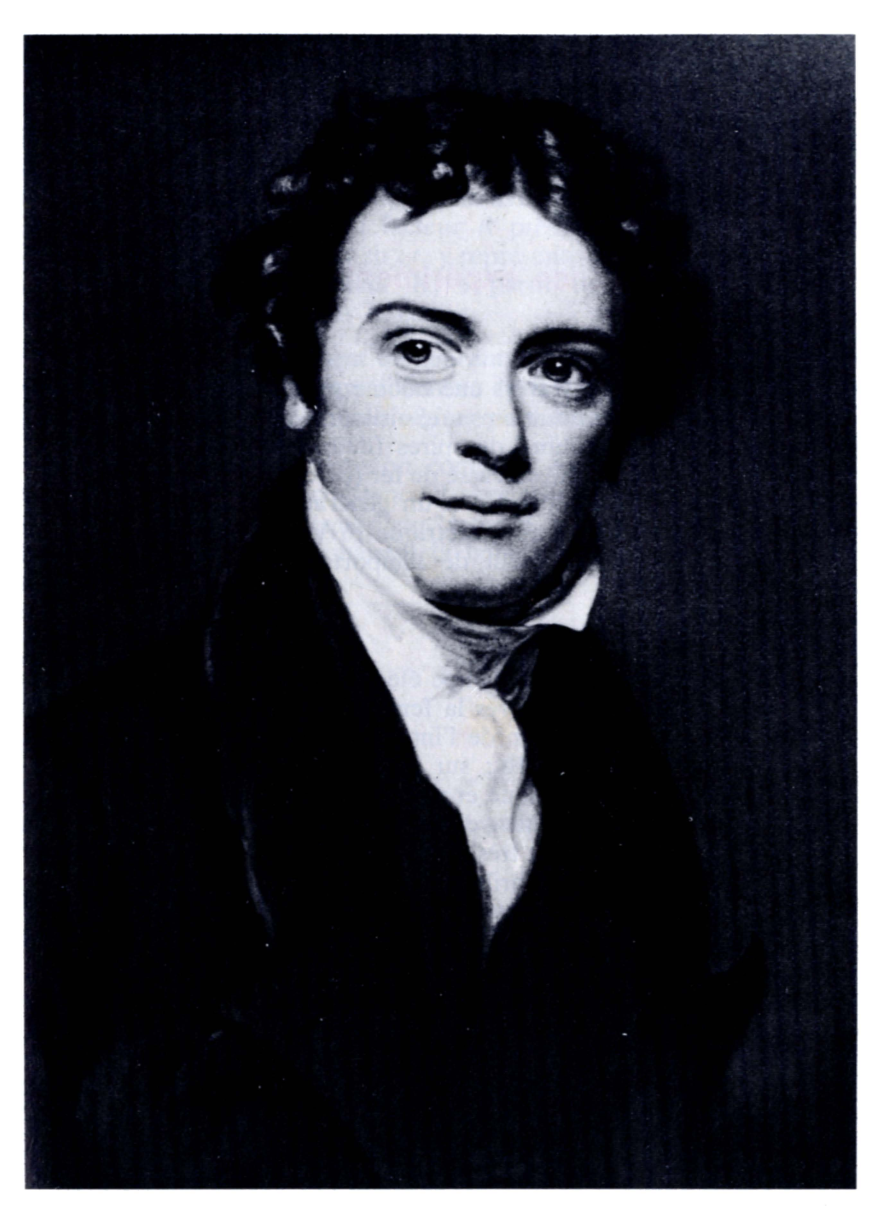
b) Au début du mouvement, ces vitesses augmentent : sous quelles formes d'énergie le travail du poids mg de la masse m est-il alors transformé ?

c) Au bout d'un temps suffisamment long, les vitesses sont devenues constantes : expliquez pourquoi (on suppose que la résistance de l'air est négligeable). Comment se transforme alors l'énergie fournie par le déplacement du poids pendant l'intervalle de temps Δt ?

d) Calculez la fonction de B, R, ω, la f.é.m. induite dans le disque animé de la vitesse angulaire ω, puis l'intensité du courant induit.

e) En exprimant la conservation de l'énergie, calculez la vitesse v atteinte par la masse m.

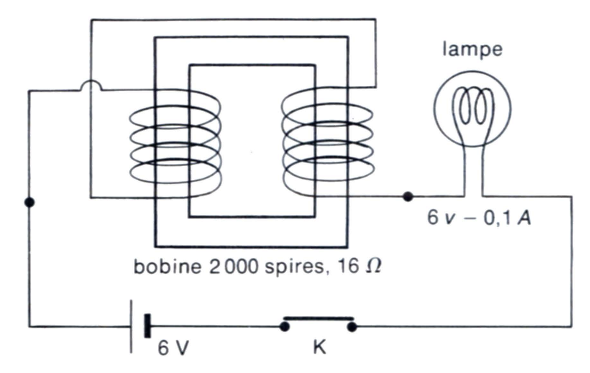
Réponses : **a)** $v = r\omega$; **b)** énergie cinétique $\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$ et chaleur ; **c)** à cause des courants induits dont l'importance augmente avec ω ; $mgv\Delta t = R' i^2 \Delta t$;
d) $e = B\dfrac{R^2}{2}\omega$, $i = \dfrac{BR^2}{2R'}\omega$; **e)** $v = \dfrac{4mgr^2R'}{B^2R^4}$.



Michael Faraday (1791-1867). On lui doit l'énoncé des lois de l'électrolyse, et la découverte de l'induction électromagnétique.

12 L'auto-induction.

1. Mise en évidence expérimentale.
2. Le flux propre, la f.é.m. d'auto-induction.
3. L'énergie magnétique.
4. Quelques effets de l'auto-induction.



1a. Montage pour la mise en évidence du phénomène d'auto-induction.
Si l'on est amené à employer deux bobines, on notera la façon dont elles doivent être mises en série : placées l'une après l'autre sur la carcasse de fer, le courant doit tourner dans le même sens dans les deux bobines.

Dans les phénomènes d'induction étudiés au chapitre précédent, induit et inducteur étaient bien individualisés. Nous nous proposons de montrer ici un aspect particulier du phénomène, dans lequel un circuit parcouru par un courant influe sur lui-même : le circuit est à la fois inducteur et induit. Le phénomène qui se produit est alors appelé auto-induction.

1. Mise en évidence expérimentale.

a) Montage employé.

Cherchons à produire à travers une bobine un flux magnétique intense et variable au cours du temps : choisissons pour cela une bobine possédant un grand nombre de spires (deux bobines de 1 000 spires placées en série), avec une carcasse de fer (carcasse de transformateur), et envoyons-y un courant grâce à un **générateur de f.é.m. constante** ($E = 6$ V) ; une petite lampe électrique (6 V-0,1 A) placée en série, permettra de juger facilement de l'importance de l'intensité de ce courant (figure 1a).

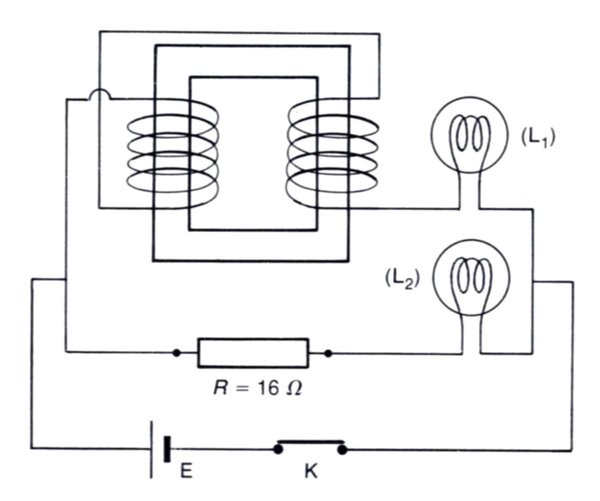
b) Constatation.

Fermons l'interrupteur K. La lampe électrique finit par briller mais ne le fait **pas immédiatement après** la fermeture de K.
On juge mieux de l'évolution de l'intensité en complétant le montage comme l'indique la figure 1b : sur le même générateur on branche également une lampe identique et une résistance ordinaire R de même valeur que celle de la bobine : en fermant le générateur sur ces deux dérivations à la fois, on voit très nettement que la lampe (L_2) branchée en série avec la résistance R brille beaucoup plus vite que (L_1) qui est en série avec la bobine ; par contre, lorsqu'ils sont devenus constants, les éclats des deux lampes sont les mêmes.

• Remarque.
A l'ouverture de l'interrupteur K, on constate aussi une différence de comportement entre la branche qui contient la bobine et celle de la résistance R ; nous reviendrons plus tard sur ce phénomène.

c) Conclusion.

L'établissement du **courant est retardé** dans un circuit contenant une **bobine ;** mais quand le courant est constant une bobine semble avoir le **même comportement qu'une résistance ordinaire** de même valeur ; et nous montrerons qu'elle a effectivement le même comportement.



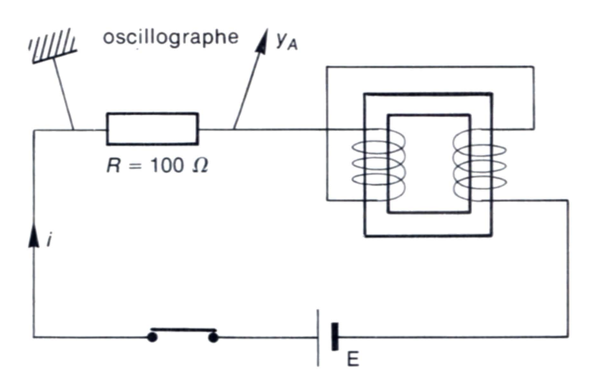
1b. Après la fermeture de l'interrupteur K, la lampe (L_2) brille beaucoup plus vite que la lampe (L_1) ; par contre, en régime continu, les deux lampes ont le même éclat.

d) Autre expérience.

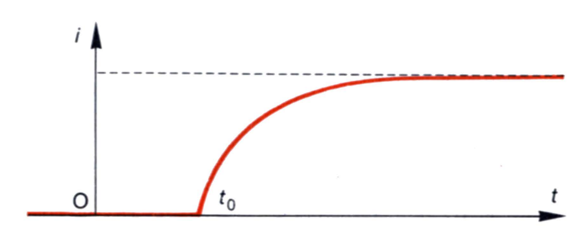
• Le montage de la figure 2a permet de mieux suivre l'évolution de l'intensité i du courant dans le circuit d'une bobine après fermeture de l'interrupteur K : la lampe du montage 1a a été remplacée par une résistance R (100 Ω par exemple) ; la tension $u = Ri$ qui apparaît entre ses bornes est étudiée à l'oscillographe avec un balayage très lent. On obtient donc sur l'écran (au facteur R près) la courbe $i = f(t)$ qui présente l'allure de la figure 2b : t_0 y représente évidemment la date de la fermeture de l'interrupteur K, à partir de laquelle le courant commence à s'installer dans le circuit.

• **On voit que l'établissement du courant dans une bobine est progressif :** l'intensité y varie progressivement de la valeur zéro à une valeur limite constante dite valeur de **régime permanent.**

• Si à l'aide d'un voltmètre on compare, **en régime permanent,** la tension aux bornes de la résistance R avec celle aux bornes de la bobine (figure 3), on constate que leur rapport est celui des résistances indiquées : en régime permanent la **bobine** se comporte comme une **simple résistance.**



2a. Montage pour le tracé de la courbe $i = f(t)$.



2b. Courbe $i = f(t)$ des variations au cours du temps de l'intensité après fermeture du circuit (de la figure 2a).

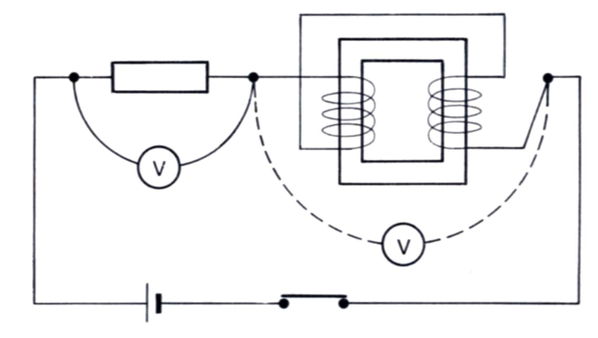
2. Le flux propre, la f.é.m. d'auto-induction.

a) Le flux propre à travers un circuit parcouru par un courant.

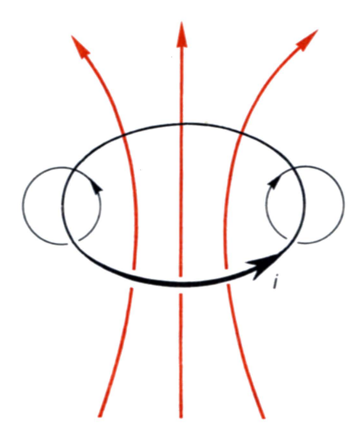
• **Définition.**
C'est le flux produit à travers le circuit par le champ magnétique $\vec{B}$ créé **par le circuit lui-même** lorsqu'il est parcouru par un courant.

• **Proportionnalité entre le flux propre et l'intensité ; coefficient d'auto-inductance.**

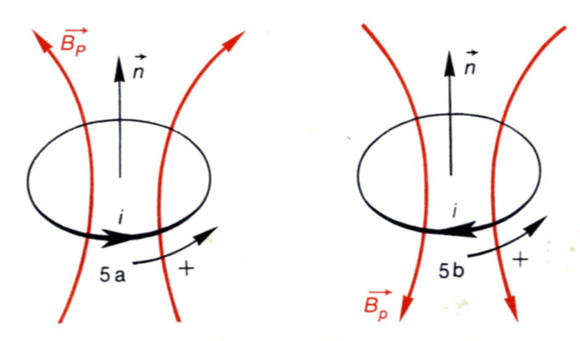
On sait qu'un courant d'intensité i passant dans un circuit (C) produit en tout point M de l'espace un champ magnétique $\vec{B}_P$ (le champ propre) dont la mesure est proportionnelle à l'intensité i, avec un facteur de proportionnalité et une direction qui dépendent de la forme et de la dimension du circuit ainsi que de la position du point M par rapport au circuit (les spectres magnétiques étudiés au chapitre 10 nous renseignent sur la forme des lignes de champ).



3. La comparaison des indications du voltmètre montre que, en régime permanent, une bobine se comporte comme une résistance ordinaire.



4. Allure et sens des lignes du champ magnétique $\vec{B}$ créé par une spire plate parcourue par un courant.



5a. Le flux propre Φ_P est positif, comme l'intensité *i*.

5b. Le flux propre Φ_P est négatif, comme l'intensité *i*.

Le flux propre à travers un circuit sans noyau est proportionnel à l'intensité du courant qui parcourt ce circuit ; le coefficient de proportionnalité est le coefficient d'auto-inductance *L*.

Le sens de $\vec{B_P}$ en un point change avec celui du courant dans le circuit (figure 4). Le champ **propre** $\vec{B_P}$ crée à travers le circuit (C) un flux Φ_P, **le flux propre.** Comme $\vec{B_P}$, ce flux propre est proportionnel à l'intensité ;
on pose :

$$\boxed{\Phi_P = Li} \ .$$

L est le **coefficient d'auto-inductance** du circuit ; exprimé en **henry (H).** Ce coefficient dépend de la forme, des dimensions et du nombre de spires du circuit.

- **Le flux propre est de même signe que l'intensité.**

En effet considérons la figure 5a sur laquelle l'intensité i est positive : on voit d'après la direction de $\vec{B_P}$ par rapport à la normale orientée $\vec{n}$, que le flux propre Φ_P est positif. Par contre sur la figure 5b où les conventions de signe sont les mêmes, i et Φ_P sont tous deux négatifs.

Autrement dit le coefficient d'auto-inductance **L est toujours positif,** et ceci quelle que soit la forme du circuit.

- **Remarque.**

Lors de l'étude de la loi de Lenz (II, 4) du chapitre précédent nous avons vu les manifestations du flux propre produit par le courant induit : c'est ce flux propre qui a pour rôle de s'opposer aux variations du flux inducteur.

- **Cas des bobines possédant un noyau de fer.**

On sait que l'usage des bobines à noyau est très répandu en électrotechnique (carcasse de transformateur par exemple). Dans ce cas le champ $\vec{B_P}$ produit par l'ensemble bobine-noyau croît avec l'intensité mais ne lui est plus proportionnel ; si bien que l'on ne peut plus écrire $\Phi_P = Li$; en fait, on continue à utiliser cette relation mais il faut y considérer que le terme L est une fonction de l'intensité :

$$\Phi_P = L(i) \, . \, i \, .$$

L'étude théorique d'un tel système est fort compliquée, mais son utilisation pratique est très courante car la présence du noyau de fer permet d'obtenir un coefficient d'auto-inductance ($L(i)$) très supérieur à celui (L = constante) que posséderait la même bobine sans noyau. Nous avons utilisé une telle bobine dans l'expérience décrite figures 1a et 1b. D'ailleurs si on supprime le noyau de cette bobine, on ne constate pratiquement plus de retard lors de l'établissement du courant.

- **Inductance, ou résistance inductive.**

Une bobine va donc être caractérisée par :
— la résistance R du fil qui la constitue,
— le coefficient d'auto-inductance L qui permet de connaître le flux propre qu'elle s'envoie à travers elle-même.
Une bobine est appelée **résistance inductive,** ou **inductance avec résistance ;** on la représente conventionnellement par les schémas des figures 6a et 6b.

- **Résistance non inductive.**

Il est possible de construire des bobines de coefficient d'inductance pratiquement nul qu'on appelle **résistances non inductives** ou **résistances pures :** il suffit pour cela de plier un fil isolé en deux par son milieu, avant de le bobiner : dans une telle bobine le courant passe dans un sens sur la moitié du bobinage qui crée un champ propre annulé par celui produit par l'autre moitié du bobinage où le courant passe en sens inverse.

- **Ordres de grandeur du coefficient *L*.**

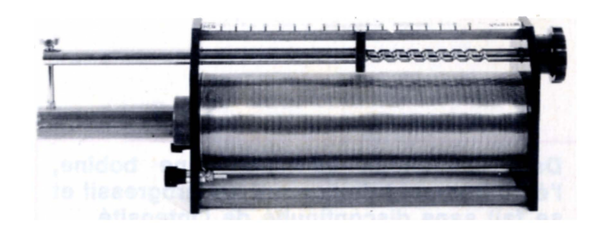
Pour une bobine sans noyau constituée de N spires confondues, le coefficient L est proportionnel au carré N^2 du nombre N de spires car le champ magnétique est proportionnel à N et de plus crée un flux à travers N spires.
Pour une bobine sans noyau, de forme quelconque, L varie aussi à peu près comme N^2 : on obtient ainsi un coefficient L de l'ordre de quelques millihenrys pour une bobine de dimensions ordinaires ayant un millier de spires. Avec un noyau de fer, on atteint facilement des coefficients L de l'ordre du henry (photo 6c).



6a. Représentation conventionnelle d'une résistance inductive sans noyau de fer.



6b. Représentation conventionnelle d'une résistance. inductive avec noyau de fer : ici le coefficient L n'est pas constant.



6c. Bobine à noyau de fer, de coefficient d'auto-inductance L variable : la variation de L s'obtient en enfonçant plus ou moins le noyau de fer dans la bobine.

b) La f.é.m. d'auto-induction.

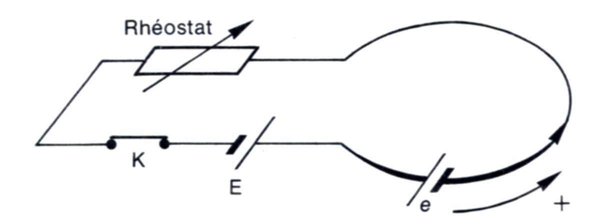
- **Expression de la f.é.m. d'auto-induction.**

La loi de l'induction électromagnétique s'applique au flux propre d'un circuit :

un circuit est le siège d'une f.é.m. $e = -\dfrac{d\Phi_P}{dt}$ à condition que son flux propre Φ_P varie au cours du temps c'est-à-dire à condition que le courant qui traverse le circuit ait une **intensité variable** au cours du temps. Puisque $\Phi_P = Li$, la f.é.m., dite **f.é.m. auto-induite,** a pour expression

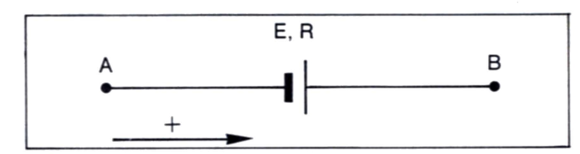
$$\boxed{e = -L\frac{di}{dt}}.$$

Si l'intensité dans un circuit varie au cours du temps celui-ci est le siège d'une f.é.m. auto-induite $e = -L\dfrac{di}{dt}$.

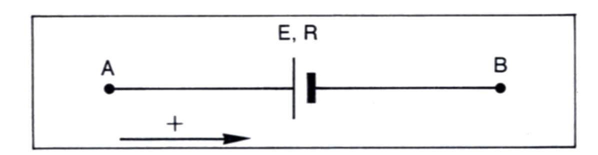


7. F.é.m. auto-induite par la variation de l'intensité dans un circuit.
Le courant passe sous l'effet du générateur de f.é.m. E : juste après la fermeture de l'interrupteur K, l'intensité i augmente donc e est négative ; il en est de même lorsque i a tendance à augmenter par suite de la diminution de la résistance R du rhéostat ; on obtiendra e positive si on augmente la valeur de R ou au moment où l'on rouvrira l'interrupteur K.

Dans un circuit contenant une bobine, l'établissement du courant est progressif et se fait sans discontinuité de l'intensité.



8a. Loi d'Ohm aux bornes d'un générateur.
$V_A - V_B = Ri_{AB} - |E|$
ou $V_A - V_B = Ri_{AB} - e$ avec $e > 0$.



8b. Loi d'Ohm aux bornes d'un générateur.
$V_A - V_B = Ri_{AB} + |E|$
ou $V_A - V_B = Ri_{AB} - e$ avec $e < 0$.

- **Effets de la f.é.m. auto-induite.**

— La f.é.m. auto-induite ne se **manifeste pas** dans le cas d'un **régime continu :** si i = constante, $e = 0$. Ainsi une bobine inductive de résistance R et de coefficient d'auto-inductance L se comporte, en régime continu, comme une résistance pure : c'est ce que nous a montré l'expérience décrite figure 3.

— La f.é.m. auto-induite **se manifeste** en **régime** variable et dans ce cas elle **tend à s'opposer** à la **variation de l'intensité** dans le circuit : en effet si i augmente, $\frac{di}{dt}$ est positif et e est négative, et inversement. La figure 7 montre ce cas, qui correspond par exemple à la période d'établissement d'un courant après la fermeture d'un circuit. Il faut noter que cette f.é.m. auto-induite n'empêche pas la variation du courant mais a seulement pour effet de **ralentir cette variation.**

— La f.é.m. e auto-induite dans un circuit **empêche une variation brutale de l'intensité** dans ce circuit car e est d'autant plus importante que la vitesse de variation $\frac{di}{dt}$ est plus grande ; c'est ce que nous a montré l'expérience décrite par la figure 2b : après la fermeture de l'interrupteur, l'intensité évolue **progressivement** depuis la valeur zéro vers sa valeur de régime continu. Il s'ensuit que : dans un circuit contenant une inductance, l'intensité ne peut **jamais être discontinue.**

3. L'énergie magnétique.

a) Loi d'Ohm aux bornes d'une résistance inductive.

- **Rappel.**

Considérons une portion AB de circuit de résistance intérieure R et de f.é.m. E : sur les figures 8, choisissons le sens de A vers B comme sens positif pour les intensités et les forces électromotrices ; la tension entre A et B vaut :

$$V_A - V_B = Ri_{AB} - |E| \text{ sur la figure 8a ;}$$
$$V_A - V_B = Ri_{AB} + |E| \text{ sur la figure 8b, soit :}$$

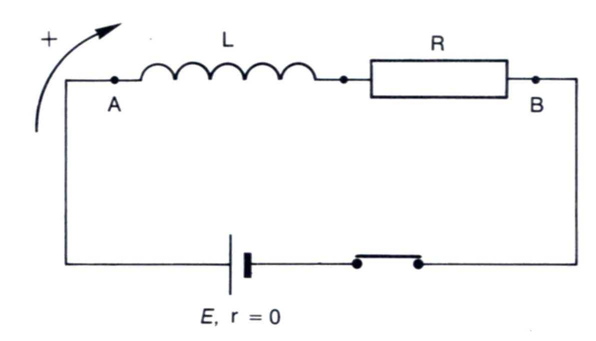
$$\boxed{V_A - V_B = Ri_{AB} - e}$$

avec $e = +|E|$ si la f.é.m. s'exerce dans le sens positif, et $e = -|E|$ si elle s'exerce dans le sens négatif. C'est cette convention de signe que l'on emploie aussi pour une f.é.m. d'auto-induction.

• Une bobine d'auto-inductance L et de résistance R, parcourue par un courant variable, pouvant être considérée comme un générateur de f.é.m. $e = -L\frac{di}{dt}$, on trouve entre ses bornes A et B une différence de potentiel :

$$V_A - V_B = Ri_{AB} - e$$

$$\boxed{V_A - V_B = Ri_{AB} + L\frac{di_{AB}}{dt}}\ .$$



9. $E = Ri + L\frac{di}{dt}$, dans le circuit ci-dessus.



b) Bilans énergétiques dans un circuit ; énergie magnétique.

• **Lois d'Ohm.**

Plaçons une bobine de résistance R et de coefficient d'auto-inductance L dans un circuit contenant un générateur de f.é.m. E (et de résistance interne r nulle) (figure 9) ; après avoir fermé l'interrupteur K à la date $t = 0$, il passe dans ce circuit un courant variable dont l'intensité a la valeur i à la date t.

Aux bornes du générateur on trouve une tension :

$$V_B - V_A = ri - E = -E, \text{ puisque } r = 0\,.$$

Aux bornes de la bobine on a :

$$V_A - V_B = Ri + L\frac{di}{dt}\,.$$

D'où en comparant
$$E = Ri + L\frac{di}{dt}. \qquad (1)$$

On peut remarquer que cette relation s'écrit aussi

$$E - L\frac{di}{dt} = Ri \quad \text{soit} \quad E + e = Ri\,,$$

ce qui est l'expression de la loi dite de Pouillet : $\Sigma e = i\Sigma R$, appliquée en comptant l'inductance parmi les générateurs.

• **Énergies.**

Multiplions les deux membres de la relation (1) par l'intensité i ; on obtient :

$$Ei = Ri^2 + Li\frac{di}{dt}. \qquad (2)$$

Ei est la puissance totale développée par le générateur à la date t, Ri^2 est la puissance disponible par effet Joule dans la résistance au même instant.
Ces puissances varient au cours du temps mais sur l'intervalle de temps infiniment court t, $t + dt$ on peut les considérer comme constantes si bien que $Eidt$ est l'énergie totale dW_T fournie par le générateur, et $Ri^2\,dt$ est l'énergie dW_J dégagée par effet Joule dans la résistance, pendant l'intervalle de temps dt.
En multipliant la relation (2) par dt on obtient :

$$Eidt = Ri^2\,dt + Lidi\,,$$

soit :

$$dW_T = dW_J + d\left(\frac{1}{2}\,Li^2\right) \qquad (3)$$

ou encore, en intégrant dans l'intervalle de temps 0, t pendant lequel l'intensité passe de 0 à i :

$$\int dW_T = \int dW_J + \int_0^t d\left(\frac{1}{2}\,Li^2\right)$$

$$W_T = W_J + \frac{1}{2}\,Li^2\,. \qquad (3')$$

• **Interprétation : énergie magnétique.**
Pour interpréter la relation (3′) on admet que : lorsqu'une bobine de coefficient d'auto-inductance L est parcourue par un courant d'intensité i, **une énergie E_B est emmagasinée dans cette bobine :**

$$\boxed{E_B = \frac{1}{2}\,Li^2}\,.$$

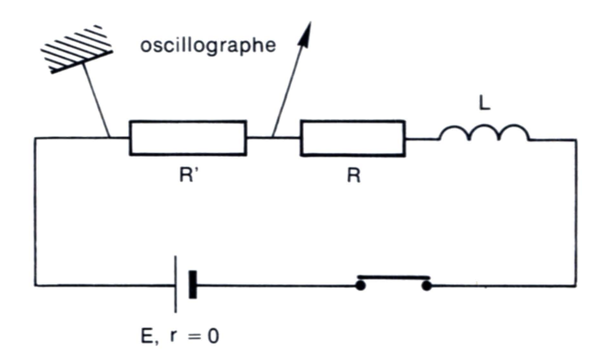
On l'appelle énergie magnétique car son existence est liée à celle du champ magnétique dans la bobine et autour d'elle.
La relation (3′) apparaît alors comme une équation de **conservation de l'énergie : l'énergie fournie par le générateur** se retrouve en **énergie calorifique** dissipée par effet Joule et en **énergie magnétique** emmagasinée dans la bobine.

• **Remarque.**
L'énergie magnétique étant proportionnelle au carré de l'intensité du courant, elle existe quel que soit le sens de celui-ci.

Une inductance parcourue par un courant possède l'énergie magnétique $E_B = \frac{1}{2}\,Li^2$.

4. Quelques effets de l'auto-induction.

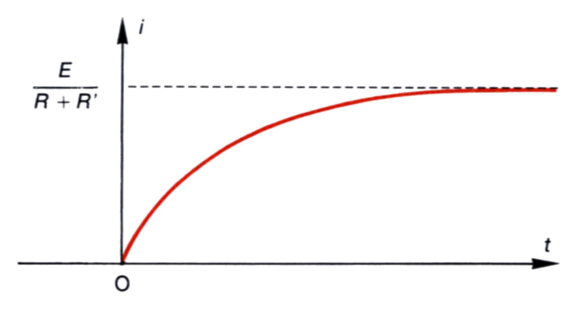
L'effet le plus important se manifeste lorsqu'une bobine est parcourue par un courant sinusoïdal : nous l'étudierons au chapitre 15.
Nous nous bornerons ici à signaler les effets de l'auto-induction à la fermeture ou à l'ouverture d'un circuit alimenté par un générateur de f.é.m. constante.



10. Montage pour l'étude d'un courant de fermeture.

a) Fermeture d'un circuit.

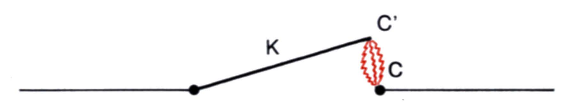
Ce phénomène a déjà été étudié : le montage employé est rappelé sur la figure 10, la courbe de variation de l'intensité après la fermeture du circuit est donné sur la figure 11.
L'intensité du courant n'est pas discontinue, elle augmente progressivement à partir de la valeur zéro ; sa valeur limite sera $i = I = \dfrac{E}{R + R'}$, valeur constante pour laquelle la bobine se comporte comme une résistance pure. Entre ces deux valeurs, l'énergie magnétique E_B de la bobine a augmenté de la valeur zéro à la valeur $E_B = 1/2\ LI^2$: la bobine a emmagasiné de l'énergie.



11. Variation de l'intensité du courant après la fermeture d'un circuit.

b) Ouverture d'un circuit.

Ouvrons de nouveau l'interrupteur K. On constate qu'une forte étincelle s'y produit au moment de l'ouverture. Si on recommence l'expérience de la figure 10 en ne gardant que la résistance pure R', on n'obtient pas d'étincelle (ou elle est beaucoup plus faible) au moment de l'ouverture de l'interrupteur.
L'étincelle est donc liée à la présence de l'inductance L dans le circuit : celle-ci a emmagasiné de l'énergie pendant l'établissement du courant ; elle la restitue à l'ouverture, sous forme de chaleur, pendant que E_B passe de la valeur $\dfrac{1}{2}LI^2$ à la valeur zéro.
A l'ouverture on impose à l'intensité i de redevenir très rapidement nulle, donc $\dfrac{di}{dt}$, négatif, est très grand en valeur absolue, ainsi que $e = -L\dfrac{di}{dt}$, qui produit alors entre les bornes C et C' (figure 12) une forte différence de potentiel (quelques centaines ou quelques milliers de volts) : celle-ci suffit pour ioniser l'air et le rendre conducteur, ce qui produit l'étincelle. Ce courant qui se prolonge après l'ouverture d'un circuit est appelé **extra-courant de rupture.**



12. Étincelle de rupture dans un interrupteur.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

• En régime continu, une bobine se comporte comme une ______ ; par contre en régime variable, elle retarde les variations de ______ du courant, tout particulièrement si elle possède un noyau ______.

• Lorsqu'un circuit est parcouru par un courant d'intensité *i*, il produit à travers lui-même un flux magnétique Φ_P appelé ______ ; celui-ci est ______ à l'intensité *i* à condition que le circuit ne ______ de noyau de fer. On pose alors $\Phi_P =$ ______, relation dans laquelle ______ est le coefficient ______ du circuit.

• La f.é.m. auto-induite dans un circuit a pour expression $e =$ ______ ; elle n'existe que si l'intensité du courant est ______ ; elle tend à ______ à la variation de l'intensité du courant ; elle empêche cette intensité d'être ______ lors de la fermeture ou de l'ouverture d'un circuit.

• Dans une inductance *L* traversée par un courant d'intensité *i*, est emmagasinée une énergie magnétique $E_B =$ ______. Celle-ci croît avec la valeur absolue de *i*, l'inductance ______ alors de l'énergie, qu'elle ______ lorsque la valeur absolue de *i* diminue.
L'énergie dégagée dans une étincelle ou un extra-courant de rupture est celle qu'avait ______ l'inductance du circuit.

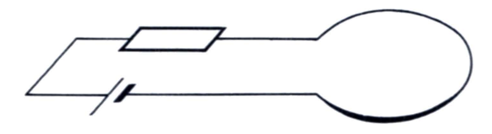
Petites questions.

1. Qu'appelle-t-on flux propre d'un circuit ?

2. Entre quelles grandeurs le coefficient d'auto-inductance L est-il facteur de proportionnalité ?

3. Peut-on définir un coefficient d'auto-inductance pour un bobinage possédant un noyau de fer ?

4. Sur le montage ci-dessous, précisez le sens de la f.é.m. auto-induite lorsqu'on augmente la valeur de la résistance R.



Applications immédiates.

5. Calculez le flux propre dans une bobine de coefficient d'auto-inductance $L = 0{,}5$ H lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité 3 A.

6. Dans une bobine de coefficient d'auto-inductance $L = 0{,}5$ H on fait décroître l'intensité du courant de 0,2 A en 10^{-2} s : quelle est la valeur de la f.é.m. auto-induite dans la bobine ?

7. Dans une bobine de coefficient d'auto-inductance $L = 0{,}5$ H et de résistance interne 5 Ω, il passe un courant variable qui, à l'instant considéré, a une intensité i de 2 A variable de 1 A en 1/10 de seconde.
Quelle est la valeur de la tension aux bornes de la bobine si a) i augmente ; b) i diminue?

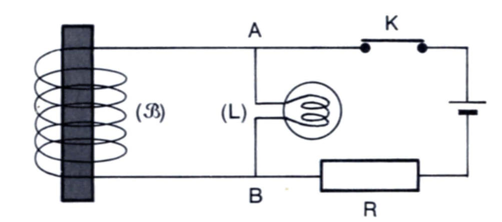
Réponses : **a)** $U_{AB} = 15$ V ; **b)** $U_{AB} = 5$ V.

8. Quelle intensité doit-on faire passer dans une bobine de coefficient d'auto-inductance $L = 0{,}5$ H pour qu'elle emmagasine une énergie de 10 J ?

Réponse : $i = 2\sqrt{10}$ A.

Approfondissement.

9. Dans le montage ci-dessous, la valeur de la résistance R a été choisie de manière qu'en régime permanent la lampe (L) brille faiblement. Montrez que, à cause de la présence de la bobine (B), la lampe (L) brillera plus fortement à la fermeture de l'interrupteur K, et aussi à la réouverture ; précisez dans chaque cas le sens du courant dans la branche AB de la lampe.



10. Une inductance pure de coefficient d'auto-inductance L est parcourue par un courant sinusoïdal dont l'intensité instantanée a pour expression $i = I_m . \sin \omega t$.

a) Donnez l'expression de la tension u aux bornes de l'inductance en fonction du temps.

b) On branche le primaire d'un transformateur de résistance négligeable et de coefficient $L = 1{,}5$ H sur une prise délivrant une tension $u = 220 . \sqrt{2} . \cos \omega t$ (en volts) avec $\omega = 100\,\pi$ rd/s : donnez l'expression de l'intensité qui parcourt le primaire.

c) Quel changement a lieu en supprimant la carcasse de fer du transformateur ?

Réponses : **a)** $u = L\omega I_m \cos \omega t$;
b) $i = 0{,}66 \sin \omega t$; **c)** on diminuerait beaucoup L, ce qui augmenterait beaucoup la valeur de I_m.

11. Une bobine de coefficient d'auto-inductance $L = 0{,}5$ H et de résistance $R = 50$ Ω est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation $\omega = 100$ rd/s dont l'intensité instantanée a pour expression $i = 3 \sin 100\,t$ (en ampère). Donnez l'expression de la tension u aux bornes de la bobine.

Réponse : $u = 150 (\sin 100\,t + \cos 100\,t) =$
$150\sqrt{2} \sin (100\,t + \pi/4)$.

12. Quelle est la variation de l'énergie magnétique dans une bobine de coefficient d'auto-inductance $L = 0{,}2$ H, quand l'intensité du courant qui la traverse passe :

a) de $i_1 = 2$ A à $i_2 = 4$ A ;

b) de $i_2 = 4$ A à $i_3 = 0$.

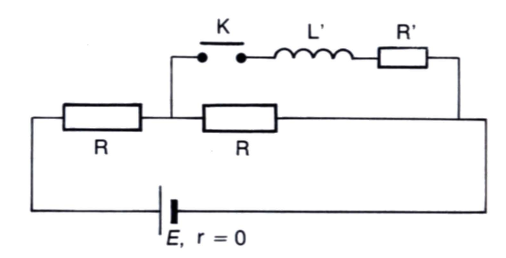
13. Un générateur de tension de f.é.m. $E = 3$ V et de résistance interne nulle alimente le circuit ci-dessous constitué de deux résistances R de valeur 4 Ω chacune et d'une bobine de coefficient d'auto-inductance $L' = 1$ H et de résistance $R' = 4$ Ω. L'interrupteur K est d'abord ouvert.

a) Calculez l'intensité qui est alors débitée par le générateur.

b) On ferme l'interrupteur K ; calculez l'intensité débitée par le générateur **immédiatement** après la fermeture de K.

c) Calculez l'intensité débitée par le générateur suffisamment **longtemps** après la fermeture de l'interrupteur.

Réponses : **a)** 0,375 A ; **b)** 0,375 A car il ne passe encore aucun courant dans la bobine ; **c)** 0,5 A.



14. A l'intérieur d'un solénoïde, sans noyau de fer, parcouru par un courant d'intensité *i*, le champ magnétique est uniforme, parallèle à l'axe du solénoïde, et il a pour valeur $B = 4\pi . 10^{-7} \frac{N}{l} i$: *N* est le nombre de spires que l'on trouve sur une longueur *l* de solénoïde ; calculez le coefficient d'auto-inductance en fonction de la longueur *l* de solénoïde en fonction de *N*, *l* et du rayon *r* des spires. Calculez numériquement cette valeur pour $N = 10^3$, $l = 10$ cm, $r = 2$ cm.

Réponse : $L = 4\pi^2 . 10^{-7} \frac{N^2 r^2}{l} = 15{,}8$ mH.

15 Dans le montage ci-contre, un générateur de f.é.m. $E = 6$ V et de résistance interne $r = 2\ \Omega$ alimente une bobine de résistance $R = 10\ \Omega$ et d'auto-inductance $L = 1$ H. A la date $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

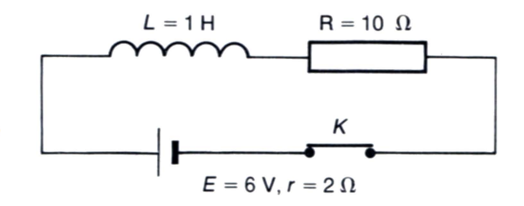
a) Donnez l'allure de la courbe $i(t)$ des variations de l'intensité au cours du temps et précisez la valeur *I* de l'intensité en régime permanent.

b) Écrivez l'équation qui, pendant le régime variable, relie i, $\frac{di}{dt}$ et les grandeurs caractérisant les composants du circuit.

c) En déduire la pente de la courbe $i(t)$ à la date $t = 0$.

Réponses : **a)** voir figure 11, page 235, $I = 0{,}5$ A ; **b)** $L \frac{di}{dt} + (R + r)\, i = E$;

c) $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} = 6\ A.s^{-1}$.



16. Une bobine de coefficient d'auto-inductance *L* est traversée par un courant sinusoïdal d'intensité $i = I_m \sin \omega t$.

a) Tracez la courbe des variations de l'intensité *i* en fonction du temps (échelle des abscisses : 4 cm pour une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ du courant).

b) Donnez l'expression instantanée de l'énergie magnétique E_B dans la bobine et tracez, avec la même échelle des abscisses, la courbe $E_B = f(t)$.

c) Quelle est la période des variations de E_B ?

d) Précisez les limites d'un intervalle de temps pendant lequel la bobine emmagasine de l'énergie, et d'un intervalle pendant lequel elle rend de l'énergie.

e) Quelle est l'énergie magnétique *W* algébriquement échangée entre la bobine et le générateur entre la date *t*, quelconque, et la date $t + kT/2$ (*k* entier) ? Quelle est, en moyenne, la puissance *P* consommée en régime sinusoïdal par une inductance pure ?

Réponses : **c)** $T' = T/2$; **d)** $[0, T/4]$, $[T/4, T/2]$; **e)** $W = 0$, $P = 0$.

17 **Quantité d'électricité induite.**
Une bobine de résistance $R = 5\ \Omega$ et d'auto-inductance $L = 10^{-2}$ H est fermée sur elle-même.
On déplace un aimant par rapport à cette bobine : l'aimant initialement immobile est à nouveau immobile dans sa position finale. Au cours de ce déplacement le flux Φ reçu par la bobine varie de $\Delta\Phi = 0{,}4$ Wb et un courant induit circule dans la bobine.
On appelle **quantité d'électricité induite** la charge électrique *q* transportée par ce courant induit : entre les dates *t* et $t + dt$, on a $dq = i dt$, et pendant toute la durée de l'opération on a $q = \int i dt$.

a) En négligeant d'abord l'auto-inductance *L*, écrivez la loi d'Ohm pour la bobine de résistance *R* à un instant où le flux Φ reçu est en cours de variation.
En déduire la quantité totale d'électricité induite au cours du déplacement de l'aimant.

b) Recommencez le calcul en tenant compte de l'existence de l'inductance *L* de la bobine : montrez que le résultat est inchangé.
Calculez numériquement la quantité d'électricité induite.

Réponses : **a)** $Ri = -\frac{d\Phi}{dt}$, $q = -\frac{\Delta\Phi}{R}$;

b) $Ri + L\frac{di}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$, $q = -\frac{\Delta\Phi}{R}$

car $\int^{i=0} L di = 0$, $q = -8 . 10^{-2}$ C.

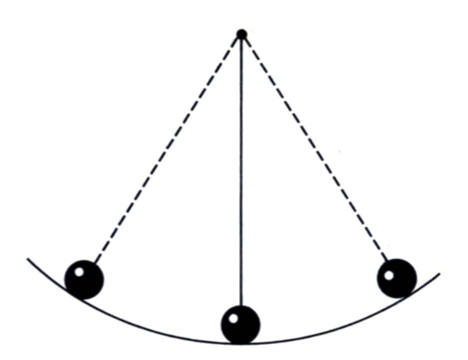


Grâce à son mouvement périodique, le métronome donne le rythme au musicien.

13 Oscillateurs mécaniques.



1. Horloge. Son balancier est un oscillateur mobile autour d'un axe horizontal.



2. Oscillations d'un pendule simple.

Un oscillateur mécanique est un système matériel animé d'un mouvement périodique.

Ce chapitre va être l'occasion d'utiliser les lois de la dynamique, et celles qui concernent l'énergie, pour étudier quelques systèmes matériels oscillants.

1. Exemples d'oscillateurs mécaniques.

a) Définition d'un oscillateur mécanique.

C'est un système matériel animé d'un **mouvement périodique** c'est-à-dire qui se reproduit identique à lui-même à intervalles de temps égaux T_0 ; on sait que T_0 est la **période du mouvement.**

b) Quelques exemples d'oscillateurs.

On peut citer :

— le balancier d'horloge, qui oscille en tournant autour d'un axe horizontal (photo 1) ;

— le pendule simple, constitué d'une petite masse suspendue à un fil : si on l'écarte de sa position d'équilibre verticale puis qu'on le lâche sans vitesse initiale, le pendule effectue des oscillations dans un plan vertical (figure 2) ;

— le balancier d'une montre mécanique, qui effectue des oscillations sous l'action d'un ressort spiral (photo 3) ;

— l'oscillateur de translation constitué d'une masse suspendue à un ressort hélicoïdal : la masse effectue des oscillations verticales si on l'écarte verticalement de sa position d'équilibre (figure 4) ;

— le diapason : si on lâche ses branches après les avoir rapprochées, elles oscillent en s'approchant puis s'éloignant périodiquement l'une de l'autre (photo 5) ; la stroboscopie permet de voir le phénomène au ralenti ; les oscillations provoquent l'émission d'un son.

• On remarquera que tous ces oscillateurs possèdent une **position d'équilibre vers laquelle ils sont ramenés** par l'action de forces : pesanteur ou forces élastiques. Nous préciserons ce phénomène dans quelques pages.

c) Les oscillateurs harmoniques.

• **Définitions :** un oscillateur est dit harmonique si sa position est une fonction **sinusoïdale du temps.** Par exemple :

— pour un oscillateur de translation sur un axe Ox :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{ou } x = X_m \sin(\omega_0 t + \psi)) ;$$

— pour un oscillateur de rotation autour d'un axe

$$\theta = \Theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{ou } \theta = \Theta_m \sin(\omega_0 t + \psi))\ ;$$

ω_0 est la **pulsation du mouvement** ;
l'angle variable $\omega_0 t + \varphi$ est la **phase instantanée** du mouvement ; φ est la phase initiale.
Au cours du temps, x reste compris entre $-X_m$ et $+X_m$; θ entre $-\Theta_m$ et $+\Theta_m$:
X_m ou Θ_m sont les **amplitudes** des mouvements.
De tels mouvements sont périodiques car il suffit que la phase $\omega_0 t + \varphi$ augmente de 2π pour que $\cos(\omega_0 t + \varphi)$, et ses dérivées par rapport au temps, reprennent leurs valeurs : la **période T_0** du mouvement est donc telle que :

$$\omega_0(t + T_0) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi$$

d'où l'on tire $\omega_0 . T_0 = 2\pi$

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}\ .$$

T_0 s'exprime en seconde ;
ω_0 s'exprime en radian par seconde (rd . s^{-1}).

• **Exemples :** nous allons montrer qu'une masse accrochée à un ressort hélicoïdal et un pendule de torsion sont des oscillateurs harmoniques.

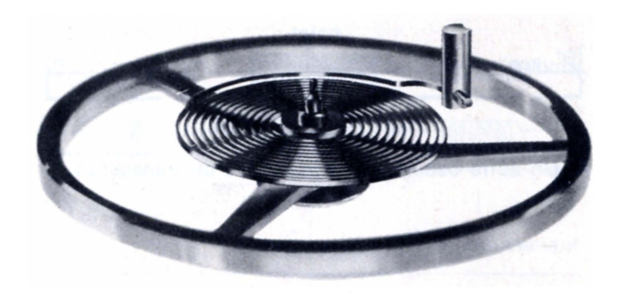
d) Remarque.

Il existe des oscillateurs plus compliqués, tels que les cordes, dans lesquels ont lieu des phénomènes de propagation. Ce genre d'oscillateur sera étudié dans un autre chapitre.

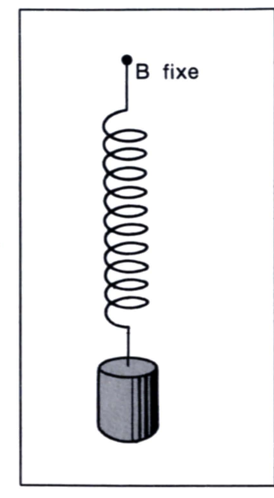
2. Étude dynamique de l'oscillateur harmonique de translation.

a) Choix du dispositif.

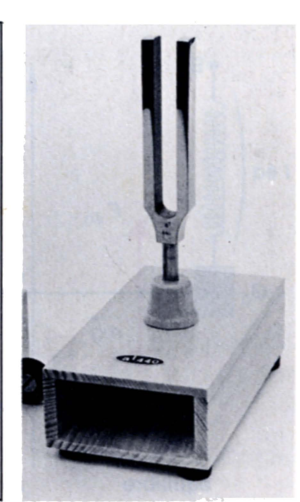
Nous utiliserons l'un des dispositifs décrits figures 4 et 6.
— Sur la figure 4, un solide de masse *m*, de forme cylindrique, est suspendu à un ressort hélicoïdal de constante de raideur *k*, de masse négligeable, accroché à un point fixe B. On obtient un mouvement oscillatoire de translation verticale en déplaçant le système verticale-



3. L'élément régulateur d'une montre mécanique est un balancier qui effectue des oscillations de rotation sous l'action d'un ressort spiral.

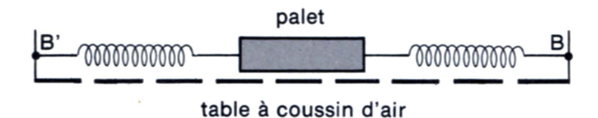


4. Oscillateur harmonique de translation.

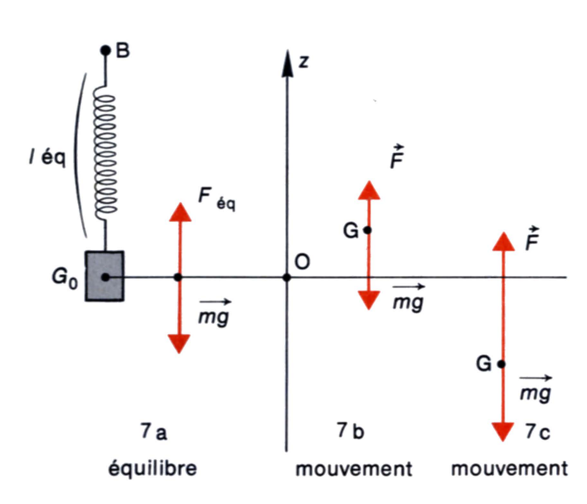


5. Diapason.

Un oscillateur est harmonique si la position du mobile est une fonction sinusoïdale du temps.



6. Un autre oscillateur harmonique de translation.



7. Oscillateur vertical, forces agissantes.
Si G est au-dessus de la position d'équilibre G_0, le ressort est moins tendu, $F < F_{éq}$, et la résultante des forces est dirigée vers le bas (figure 8b).
Au contraire si G est au-dessous de G_0, $F > F_{éq}$, la résultante des forces est dirigée vers le haut.
La somme $\vec{F} + \overrightarrow{mg}$ est toujours une force de rappel vers la position d'équilibre où elle s'annule.

ment à partir de sa position d'équilibre avant de le lâcher (d'autres mouvements, plus compliqués, seraient possibles avec d'autres modes de lancement).
— Sur la figure 6 un palet, mobile sur une table à coussin d'air, est accroché à deux ressorts de masse négligeable, de constante de raideur k', fixés en deux points B et B' ; à l'équilibre, le centre du palet est sur la droite BB' : en l'écartant de sa position d'équilibre sur cette droite puis en le lâchant, le palet prend un mouvement oscillatoire de translation horizontale sur la droite BB'.

b) Actions mises en jeu.

Dans les deux cas, choisissons la masse mobile comme système : nous l'appellerons l'oscillateur.

• **Forces appliquées à l'oscillateur vertical :** nous négligerons les actions de freinage produites par l'air. La masse m est alors soumise à son poids $\overrightarrow{mg}$ et à l'action $\vec{F}$ du ressort, force élastique.
On sait qu'un ressort de constante de raideur k, de longueur naturelle l_0, de longueur actuelle l, tend à reprendre sa longueur naturelle en exerçant une force élastique $F = k\,(l - l_0)$.

• **Équilibre du système :** le centre d'inertie G est alors en G_0 sur la verticale de B, et les forces $\vec{F}_{éq}$ et $\overrightarrow{mg}$ ont des modules égaux et sont opposées sur la même ligne d'action verticale (figure 7a) :

$$\vec{F}_{éq} + \overrightarrow{mg} = \vec{0}.$$

Prenons l'origine O de l'axe vertical Oz au niveau de G_0 et orientons Oz vers le haut.

• **Somme des forces $\vec{F} + \overrightarrow{mg}$ à une date quelconque du mouvement :** considérons les figures 7b et 7c qui montrent le passage de G en un point quelconque de hauteur z. Le ressort a alors la longueur $l = l_{éq} - z$, donc $F = k(l_{éq} - z - l_0)$.
Les forces, parallèles à Oz, s'y projettent en vraie grandeur : calculons la somme de leurs projections ΣF_z :

$$\Sigma F_z = k(l_{éq} - z - l_0) - mg\,.$$

Mais à l'équilibre nous avions : $\quad 0 = k(l_{éq} - l_0) - mg.$

D'où en simplifiant : $\quad \Sigma F_z = -\,kz$

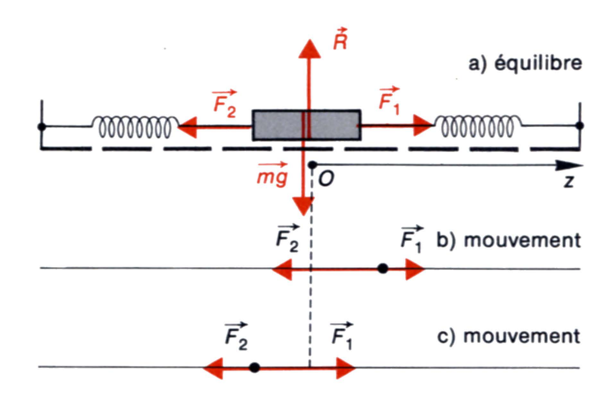
ΣF_z et z sont toujours de signes contraires : la résultante du poids et de la force élastique rappelle le système vers sa position d'équilibre (figures 7b et 7c). De plus, cette force de rappel est proportionnelle à l'élongation.

• **Forces appliquées à l'oscillateur horizontal :** le palet est soumis à son poids $\overrightarrow{mg}$, à l'action $\vec{R}$ verticale de la table à coussin d'air et à l'action de chaque ressort.

A l'équilibre, comme au cours du mouvement, $\vec{R}$ est opposée à $\overrightarrow{mg}$. Dans la position d'équilibre choisie comme origine des déplacements z, les actions des ressorts s'équilibrent : $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$ (figure 8a). Déplaçons le palet d'une distance z dans le sens positif : les ressorts ayant la même constante de raideur k', F_1 va diminuer de $k'z$, F_2 va augmenter de $k'z$. Leur résultante, nulle pour $z = 0$, est maintenant dirigée vers la gauche (figure 8b) et vaut $-2k'z$.
La figure 8c correspond au cas opposé ($z < 0$) ; elle montre que la somme des forces vaut encore $-2k'z$. Dans tous les cas on a donc, en posant $2k' = k$:

$$\Sigma F_z = -kz\,.$$

• **En résumé :** les deux dispositifs choisis sont **rappelés** vers leur position d'équilibre par une **force proportionnelle** à l'écart z par rapport à la position d'équilibre.



8. Oscillateur horizontal, forces agissantes.
A l'équilibre comme pendant le mouvement, l'action de la table équilibre le poids du palet.
La somme des forces élastiques est une force de rappel vers la position d'équilibre.

c) Équation différentielle du mouvement.

Choisissons par exemple d'étudier l'oscillateur vertical.
Appliquons à la masse m le théorème du centre d'inertie qui s'exprime par la relation

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = m\vec{a}_G\,.$$

Dans cette relation $\vec{a}_G$ désigne l'accélération du centre d'inertie G et $\vec{p}$ désigne la quantité de mouvement du système choisi (ici la masse m).
G se déplace parallèlement à Oz, sa vitesse $\vec{v}_G$ est donc constamment parallèle à Oz, ainsi que son accélération $\vec{a}_G$. La relation se projette alors sur l'axe Oz suivant :

$$-kz = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z}$$

Un oscillateur harmonique est soumis à une action résultante de rappel et proportionnelle à l'élongation, c'est-à-dire à l'écart par rapport à la position d'équilibre ; il s'ensuit que l'accélération est proportionnelle et de sens inverse à l'élongation.

La relation $\ddot{z} = \boxed{-\frac{k}{m} z}$ est l'**équation différentielle du mouvement.**

Dans un tel mouvement l'**accélération** est à tout instant **proportionnelle et de sens contraire à l'écart** du mobile par rapport à sa position d'équilibre.

d) Solution de l'équation différentielle : oscillations sinusoïdales.

• **Solution générale.**

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m} z \, .$$

Posons $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, ce qui est toujours possible car $\frac{k}{m} > 0$; il vient :

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z \, .$$

Montrons que la fonction $z = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est une solution de cette équation :

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = -\omega_0 Z_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = -\omega_0^2 Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 z \, .$$

Donc la solution sinusoïdale convient ; on démontre en mathématiques, et il faudra admettre ici, qu'elle est la seule à convenir : le mouvement de la masse m est **sinusoïdal ou harmonique** :

$$z = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

il a une pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, il a une période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Z_m est **l'amplitude du mouvement** puisque au cours du temps $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ varie entre $+1$ et -1 et z entre $+Z_m$ et $-Z_m$.

9a, b, c. Position, vitesse, accélération de l'oscillateur harmonique au cours du temps.

• **Expression des conditions de lancement :** les caractéristiques m et k de l'oscillateur ne nous fournissent que ω_0 et T_0. Pour connaître Z_m et φ il faut préciser les conditions de lancement.
Supposons par exemple que le mobile ait été lâché à la date $t = 0$, sans vitesse initiale, de la position $z = + A$.
$z = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ donne $A = Z_m \cos \varphi$ à la date $t = 0$;
$\dot{z} = - \omega_0 Z_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ donne $0 = - \omega_0 Z_m \sin \varphi$ à la date $t = 0$;
la deuxième relation permet de choisir $\varphi = 0$, et en portant dans la première on trouve $Z_m = A$, d'où finalement :

$$z = A \cos \omega_0 t.$$

Vous verrez en exercice des exemples de lancement avec vitesse initiale.

e) Position, vitesse, accélération, forces : variations au cours du temps.

Dans le cas de lancement précédent, on a :

$z = Z_m \cos \omega_0 t$ pour la position,

$\dot{z} = - \omega_0 Z_m \sin \omega_0 t$ pour la vitesse,

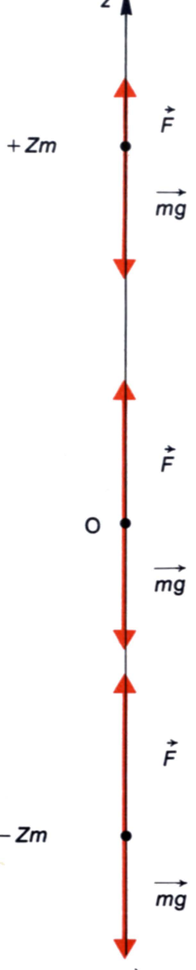
$\ddot{z} = - \omega_0 Z_m \cos \omega_0 t = - \omega_0^2 z$ pour l'accélération.

Les figures 9 donnent les variations de ces trois fonctions au cours du temps. On remarque en particulier que :
— v s'annule pour $z = \pm Z_m$ c'est-à-dire au moment où le mobile arrive à son point le plus haut ou le plus bas : c'est nécessaire puisqu'il fait demi-tour en ces points ;
— la position $z = 0$ est traversée avec le maximum de vitesse ;
— l'accélération est toujours proportionnelle et de signe opposé à z : c'est une **propriété caractéristique** du mouvement harmonique.

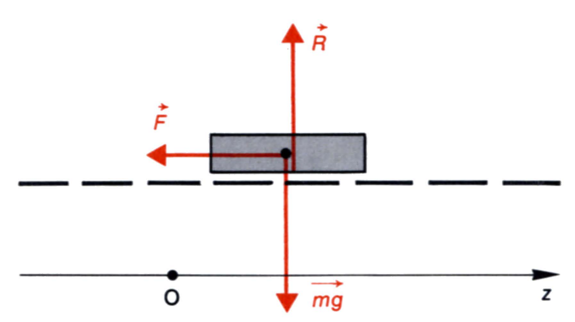
Les forces agissantes sont représentées, pour quelques positions du mobile, sur la figure 10 : il est bon de la confronter avec les figures 9a et 9c, en se rappelant que $\Sigma F_z = - kz = + m\ddot{z}$.

f) Quelques vérifications expérimentales.

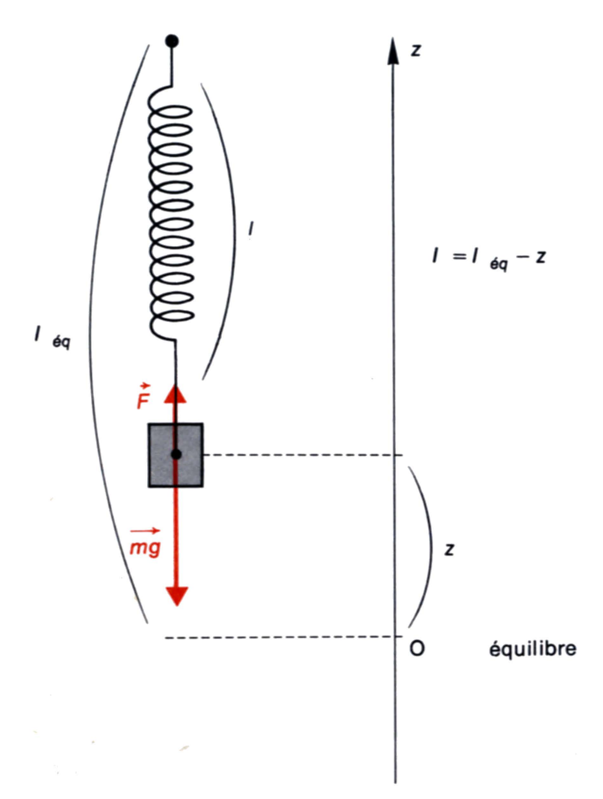
A l'aide d'un chronomètre on peut vérifier que :
— la période T est indépendante de l'amplitude Z_m du mouvement (à condition d'éviter que, au point le plus haut de la trajectoire, les spires du ressort n'entrent en contact entre elles, car alors la loi $F = k(l - l_0)$ ne s'applique plus) ;



10. Lorsque z est positif $\vec{F}$ est plus petit que $\vec{mg}$, la résultante des forces et l'accélération sont dirigées vers le bas (que l'oscillateur monte ou descende). Lorsque z est négatif, l'accélération est dirigée vers le haut, à la descente comme à la montée.



11. Dispositif pour le calcul de l'énergie potentielle de l'oscillateur de translation horizontale.



12. Dispositif pour le calcul de l'énergie potentielle de l'oscillateur, de translation verticale.

— la période T est proportionnelle à $\sqrt{m}$ (à condition de rester dans un domaine de valeurs de m très supérieures à la masse du ressort) ;
— la période T est inversement proportionnelle à $\sqrt{k}$ (rappelons que, par exemple, si l'on met bout à bout deux ressorts de même constante de raideur k, l'ensemble se comporte comme un ressort unique de constante $k/2$: voir l'exercice nº 37 page 262).

3. Étude énergétique de l'oscillateur harmonique de translation.

a) Les deux formes d'énergie de l'oscillateur.

Considérons les mouvements des deux dispositifs déjà envisagés (figures 11 et 12). La masse m, liée à un ressort, est :
— en mouvement : à tout instant elle possède une énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{z}^2,$$

— pesante : au poids correspond une énergie potentielle de pesanteur,
— soumise à une force élastique à laquelle correspond une énergie potentielle d'élasticité.

b) Calcul de l'énergie potentielle.

• **Dispositif de la figure 11 :** l'énergie potentielle de pesanteur est constante car le déplacement a lieu horizontalement ; comme il n'y a pas de frottement, la force élastique est nulle dans la position d'équilibre choisie comme origine des z, et on a donc $F_z = -kz$ pour toute autre position ; à une telle force correspond une énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}kz^2$. L'énergie potentielle totale est donc :

$$E_p = \frac{1}{2}kz^2 + C.$$

• **Dispositif de la figure 12 :** puisque la résultante de la force élastique et de la force de pesanteur est $F_z = -kz$, l'énergie potentielle totale est

$$E_p = \frac{1}{2}kz^2 + C.$$

On peut le vérifier de la façon suivante (figure 12) : la force élastique vaut $F = k(l_{éq} - z - l_0) = -k(l_0 - l_{éq} + z)$, l'énergie potentielle élastique correspondante est $E_p = \frac{1}{2}k(l_0 - l_{éq} + z)^2$;

l'énergie potentielle de pesanteur est $E_p = mgz + C'$, l'énergie potentielle totale est :

$$E_p = mgz + C' + \frac{1}{2}k[(l_0 - l_{éq}) + z]^2$$
$$= [mg + k(l_0 - l_{eq})]\,z + C' + \frac{1}{2}k(l_0 - l_{éq})^2 + \frac{1}{2}kz^2\,.$$

Or $mg - k(l_{éq} - l_0) = 0$ (condition d'équilibre)

$C' + \frac{1}{2}k(l_0 - l_{éq})^2$ est une constante.

Il reste bien E_p totale $= 1/2\,kz^2 +$ constante.
Dans la suite nous poserons que cette constante vaut zéro.

c) Conservation de l'énergie mécanique au cours du temps.

Nous avons donc :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_p = \frac{1}{2}kz^2}\,.$$

Avec un lancement sans vitesse initiale de la position $z = Z_m$ on a trouvé :

$$z = Z_m\,.\cos\omega_0 t$$
$$v = \dot{z} = -\,\omega_0 Z_m \cos\omega_0 t$$

d'où l'on tire :

$$E_p = \frac{1}{2}kZ_m^2\cos^2\omega_0 t$$

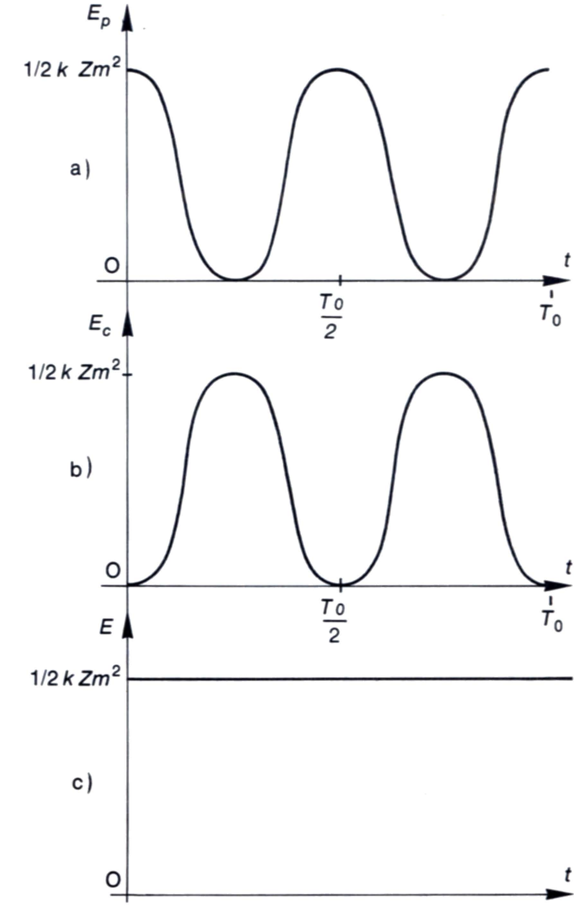
$$E_c = \frac{1}{2}m\omega_0^2 Z_m^2\sin^2\omega_0 t$$

ou encore, puisque $\omega_0^2 = k/m$:

$$E_c = \frac{1}{2}kZ_m^2\sin^2\omega_0 t\,.$$

En résumé

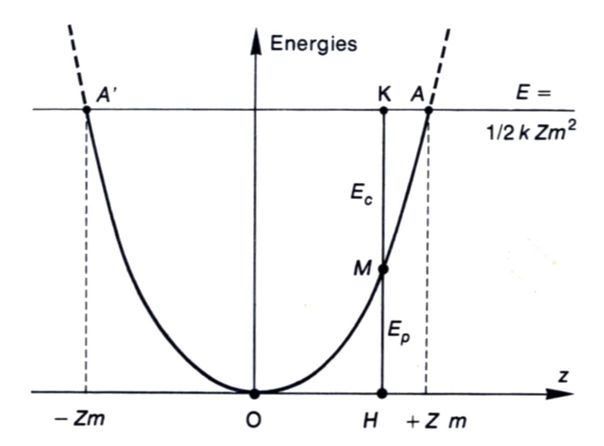
$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kZ_m^2\cos^2\omega_0 t;\; E_c = \frac{1}{2}kZ_m^2\sin^2\omega_0 t}\,.$$



13. Les énergies de l'oscillateur harmonique au cours du temps :
a) variations de l'énergie potentielle,
b) variations de l'énergie cinétique,
c) énergie totale.

Quand l'énergie potentielle croît, l'énergie cinétique décroît, et inversement ; quand l'une est maximale, l'autre est nulle ; leur somme, l'énergie mécanique, est constante au cours du temps.

L'énergie mécanique, ou totale, de l'oscillateur harmonique se conserve au cours du temps.



14. Les énergies de l'oscillateur harmonique en fonction de sa position. Cet oscillateur est dans une cuvette de potentiel parabolique : $E_p = \overline{HM} = \frac{1}{2}kz^2$; $E_c = \overline{MK}$; E totale $= \overline{HK}$ = constante.

Un oscillateur harmonique est dans une cuvette de potentiel parabolique.

Faisons leur somme, **l'énergie mécanique *E*** s'exprime alors par :

$$E = \frac{1}{2}kZ_m^2(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kZ_m^2}\ .$$

- L'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique **se conserve** au cours du temps et elle est proportionnelle **au carré de l'amplitude des oscillations.**

- Cette conservation était prévisible : en effet, par hypothèse, les systèmes choisis évoluent sans frottement : **ici il n'y a pas de forces dissipatives, il n'y a que des forces conservatives.**

Les figures 13 donnent les variations de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique au cours du temps : on y voit clairement que l'une augmente quand l'autre diminue, l'une est maximale quand l'autre s'annule ; ces deux énergies sont des fonctions périodiques du temps, de période $T_0/2$: il sera bon de comparer leurs variations avec celles de z et $\dot{z}$ (figures 9a et 9b).

On dit qu'il y a oscillation de l'énergie entre les formes cinétique et potentielle (la somme restant constante).

d) Diagramme énergie-position : cuvette de potentiel parabolique.

La figure 14 représente les trois formes d'énergie de l'oscillateur en fonction de sa position *z*.

$E_p = \frac{1}{2}kz^2$: on dit que le **potentiel est parabolique** ou que l'oscillateur est dans une **cuvette de potentiel parabolique.** L'énergie mécanique E est constante, elle ne dépend pas de z, elle est représentée par une parallèle à l'axe des z ; sa valeur est fixée lors du lancement.
L'état énergétique dans une position donnée est représenté par un point M ; HM mesure l'énergie potentielle, HK l'énergie totale ; leur différence est l'énergie cinétique, représentée par MK ; M oscille entre A correspondant à $+Z_m$ et A′ correspondant à $-Z_m$; l'énergie cinétique est nulle en A et A′, maximale en O, c'est l'inverse pour l'énergie potentielle.

e) L'équation de conservation de l'énergie fournit l'équation différentielle du mouvement.

• Montrons que l'étude énergétique de l'oscillateur peut conduire à l'équation du mouvement.

• Après un inventaire des forces (voir plus haut), on constate que toutes les forces appliquées à l'oscillateur sont des forces conservatives, donc l'énergie totale de l'oscillateur se conserve. On prend donc comme point de départ l'équation :

$$\frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = E = \text{constante} \qquad (1)$$

On dérive cette équation par rapport au temps : la dérivée du premier membre est égale à la dérivée du second membre ; il vient :

$$\frac{1}{2}\,2\,kz\,\frac{dz}{dt} + \frac{1}{2}\,2\,m\dot{z}\,\frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0$$

$kz\,.\,\dot{z} + m\dot{z}\,.\,\ddot{z} = 0$, soit (après élimination de la solution banale $\dot{z} = 0$)

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0 \qquad (2)$$

c'est l'équation différentielle du mouvement établie au § 2 page 244 à partir de la relation fondamentale de la dynamique. Cette équation nous a montré que le mouvement de l'oscillateur est harmonique.

• **Remarque :** partons de la relation (2), multiplions ses deux membres par $dz = \frac{dz}{dt}dt = \dot{z}dt$.

Il vient :

$$\frac{d\dot{z}}{dt}\dot{z}dt + \frac{k}{m}zdz = 0$$

$$\dot{z}d\dot{z} + \frac{k}{m}zdz = 0\,.$$

Intégrons cette équation de l'état initial (position z_0, vitesse $\dot{z}_0$) à l'état obtenu à la date t (position z, vitesse $\dot{z}$) ; on obtient :

$$\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right)_{\dot{z}_0}^{\dot{z}} + \left(\frac{1}{2}kz^2\right)_{z_0}^{z} = 0\,.$$

$$\frac{1}{2}mz^2 + \frac{1}{2}kz^2 = \frac{1}{2}m\dot{z}_0^2 + \frac{1}{2}kz_0^2$$

c'est l'équation (1) de conservation de l'énergie.

En résumé, il y a presque équivalence entre les équations

$$\frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = E \qquad (1)$$

et

$$kz + m\ddot{z} = 0 \qquad (2)$$

(1) fournit (2) ; (2) ne fournit (1) qu'à condition de connaître les conditions initiales du lancement.

15. Un pendule de torsion.

4. L'oscillateur harmonique de rotation.

a) Quelques dispositifs.

Les figures 15 et 16 représentent deux modèles de **pendules de torsion.** Le premier (figure 15) est obtenu en suspendant une tige par son milieu à un fil d'acier dont l'autre extrémité est fixe : la tige peut tourner dans un plan horizontal autour du fil, ce qui provoque la torsion de ce fil. Le second (figure 16) est un balancier de montre mécanique constitué par une roue mobile autour d'un axe monté sur deux pivots, et soumise à l'action d'un ressort spiral.

• Dans les deux cas il s'agit d'un solide **mobile autour d'un axe Δ** et rappelé vers une position d'équilibre par une action élastique.

b) Actions mises en jeu ; moments de forces par rapport à l'axe de rotation.

L'étude des équilibres nous a appris que, pour un solide mobile autour d'un axe Δ, il convient d'évaluer les moments des forces par rapport à Δ. Faisons-le dans le cas du mouvement.

• **Tige du pendule de torsion :** son axe de rotation Δ est le fil de torsion. Son poids est appliqué sur l'axe, il a un moment nul par rapport à Δ ; de plus son point d'application G ne bouge pas. Elle subit aussi un couple de torsion de la part du fil élastique ; à l'équilibre, ce couple est nul ; prenons la position d'équilibre de la tige pour origine des angles θ (figure 17) ; le couple s'exerçant sur la tige dans une position θ quelconque vaut alors $\mathcal{M}_\Delta = -C\theta$. (Voir classe de Première)
C est la constante de torsion du fil (elle s'exprime en m . N/rd).
Si l'on néglige les actions de freinage de l'air, on a finalement

$$\Sigma\mathcal{M}_\Delta = -C\theta.$$

Le moment des actions appliquées au pendule de torsion est de rappel et proportionnel à l'élongation angulaire.

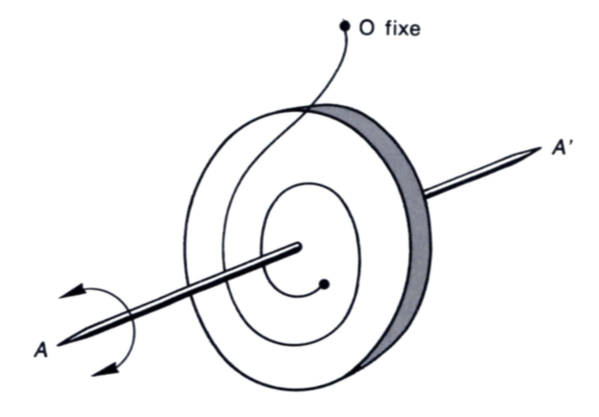
• **Balancier** : l'axe de rotation est défini par les pointes A et A′ des pivots. Le centre d'inertie G du balancier est sur l'axe, le poids a un moment nul par rapport à Δ ; de plus G est fixe au cours du mouvement.
Les actions des pivots, localisées en A et A′, ont des moments négligeables par rapport à Δ si les frottements sont négligeables.
Le ressort spiral exerce sur le balancier une action dont le moment par rapport à Δ vaut :

$$\mathcal{M}_\Delta = - C\theta .$$

En négligeant les actions de freinage on a encore

$$\Sigma\mathcal{M}_\Delta = - C\theta .$$

Désormais nous étudierons le pendule de torsion de la figure 17.



16. Un balancier de montre.

c) Conservation de l'énergie totale du système.

Choisissons comme système la **tige accrochée au ressort.** A la date t elle passe par la position θ avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

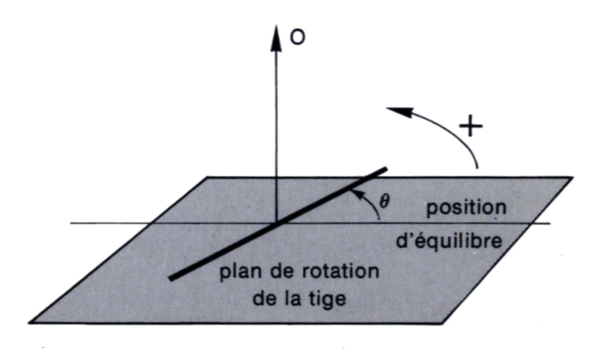
— Du fait de son mouvement la tige possède une **énergie cinétique**

$$E_c = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2.$$

— La tige est pesante : elle possède une énergie potentielle de pesanteur qui ne varie pas au cours du mouvement (G fixe).

— Elle est soumise à une action élastique $\mathcal{M} = - C\theta$ à laquelle correspond une **énergie potentielle d'élasticité** $E_p = \frac{1}{2} C\theta^2$. Les frottements étant supposés négligeables, toutes les actions mises en jeu sont conservatives : **l'énergie totale du système se conserve** au cours du temps :

$$\boxed{\frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C\theta^2 = E = \text{constante}} \quad . \qquad (1)$$



17. Pendule de torsion. La position angulaire, élongation angulaire, est repérée à partir de la position d'équilibre. Le fil exerce un couple de rappel vers cette position d'équilibre.

d) Équation différentielle du mouvement.

• Comme nous l'avons fait à la fin de l'étude énergétique de l'oscillateur de translation, partons de l'équation de conservation de l'énergie et dérivons-la par rapport au temps .

S'il n'y a pas de frottements, l'énergie mécanique du pendule de torsion se conserve au cours du temps.

La dérivée du premier membre est égale à la dérivée du second membre :

$$\frac{1}{2} 2 J\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \frac{1}{2} 2 C\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0 .$$

$$J\dot{\theta} . \ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0 .$$

Après élimination de la solution banale $\dot{\theta} = 0$ il vient

$$\boxed{J\ddot{\theta} + C\theta = 0} \text{ ou } \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{C}{J}\theta} .$$

C'est l'équation différentielle du mouvement du pendule. $\ddot{\theta}$ est **l'accélération angulaire** du mouvement.

• Dans le mouvement du pendule de torsion, **l'accélération** angulaire $\ddot{\theta}$ est à tout instant **proportionnelle et de sens contraire à l'écart angulaire** par rapport à la position d'équilibre (élongation angulaire).

L'accélération angulaire est proportionnelle et de sens inverse à l'élongation angulaire : il s'ensuit que celle-ci est une fonction sinusoïdale du temps.

e) Solution de l'équation différentielle : oscillations sinusoïdales.

• **Solution générale :** par analogie avec l'oscillateur de translation, posons :

$$\omega_0^2 = \frac{C}{J}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} .$$

La solution de l'équation $\ddot{\theta} = -\frac{C}{J}\theta$ est de la forme :

$$\boxed{\theta = \Theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)} .$$

Le mouvement de rotation du pendule de torsion est un mouvement **sinusoïdal,** ou **harmonique**

— de pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}}$

— de période propre : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{C}{J}}}$

— d'amplitude angulaire Θ_m (θ oscille entre $+\Theta_m$ et $-\Theta_m$).

• **Lancement sans vitesse initiale** : écartons le pendule d'un angle θ_0 avant de le lâcher sans vitesse angulaire à la date $t = 0$.
$\theta = \Theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ donne $\theta_0 = \Theta_m \cos \varphi$ à la date $t = 0$;
$\dot{\theta} = -\omega_0 \Theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ donne $0 = -\omega \Theta_m \sin \varphi$ à la date $t = 0$; on en tire $\varphi = 0$ puis $\Theta_m = \theta_0$ et finalement :

$$\theta = \Theta_m \cos \omega_0 t\,.$$

f) Quelques vérifications expérimentales.

A l'aide d'un chronomètre, on peut vérifier que la période T est :
— indépendante de l'amplitude Θ_m du mouvement ;
— proportionnelle à $\sqrt{J}$ (en utilisant diverses tiges ou cylindres de masses et de longueurs différentes) ;
— inversement proportionnelle à $\sqrt{C}$ (on rappelle que la constante de torsion d'un fil est inversement proportionnelle à sa longueur et proportionnelle à la quatrième puissance de son rayon).

g) Les différentes formes d'énergie au cours du temps.

• Pour les conditions de lancement choisies ci-dessus, on a

$$\boxed{\theta = \Theta_m \cos \omega_0 t \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = -\omega_0 \Theta_m \sin \omega_0 t}\,.$$

On trouve alors pour l'énergie potentielle E_p, l'énergie cinétique E_c, et l'énergie totale E :

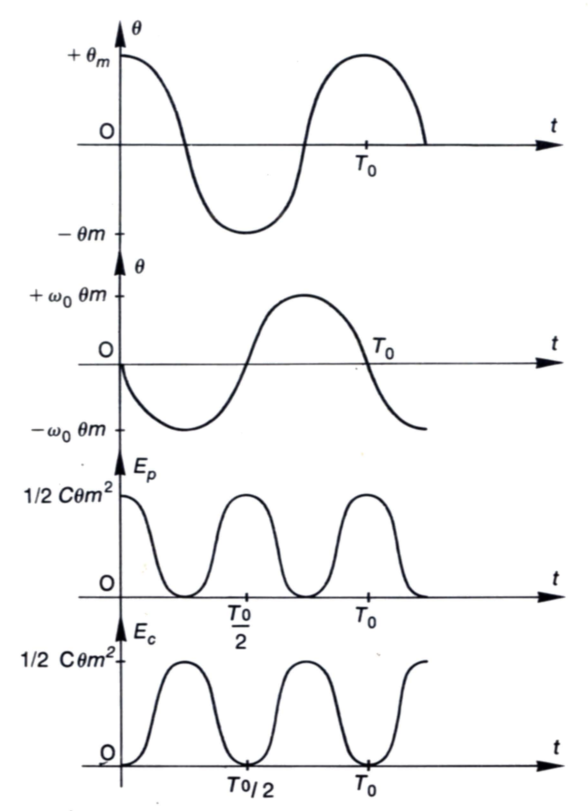
$$E_p = \frac{1}{2} C {\Theta_m}^2 \cos^2 \omega_0 t,$$

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega_0^2 {\Theta_m}^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} C {\Theta_m}^2 \sin^2 \omega_0 t \quad \text{puisque} \quad \omega_0^2 = \frac{C}{J}, \quad \text{et}$$

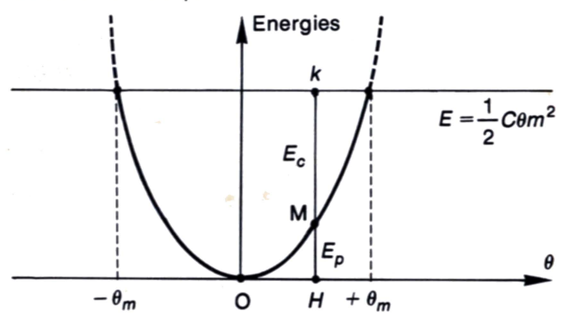
$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} C \Theta_m^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} C \Theta_m^2$$

En résumé

$$\boxed{\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} C {\Theta_m}^2 \cos^2 \omega_0 t \\ E_c &= \frac{1}{2} C {\Theta_m}^2 \sin^2 \omega_0 t \\ E &= \frac{1}{2} C {\Theta_m}^2\,. \end{aligned}}\,.$$



18. Élongation angulaire, vitesse angulaire, énergie potentielle et énergie cinétique du pendule de torsion, au cours du temps.



19. Les énergies du pendule de torsion en fonction de sa position angulaire θ.

• L'énergie mécanique, constante, est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations.

La conservation de l'énergie mécanique est due à **l'absence de forces dissipatives.** Les figures 18 donnent les variations de θ, $\dot{\theta}$, E_p et E_c au cours du temps : l'énergie potentielle est maximale pour $\theta = \pm \Theta_m$, c'est-à-dire lors de la déformation maximale du ressort ; la vitesse angulaire et l'énergie cinétique sont alors nulles ; l'énergie cinétique est maximale au passage par la position $\theta = 0$, l'énergie potentielle est alors nulle ; il y a constamment échange entre les deux formes d'énergie, leur somme restant constante.

• **Remarque :** on peut aussi donner une représentation des énergies de l'oscillateur en fonction de sa position angulaire θ. On obtient alors le diagramme de la figure 19 : l'énergie potentielle, représentée par $\overline{HM}$, est parabolique : **l'oscillateur harmonique est dans une cuvette de potentiel parabolique.**

L'énergie totale E vaut $\frac{1}{2} C\Theta_m{}^2$, elle est représentée par $\overline{HK}$, constant quel que soit θ.
L'énergie cinétique est représentée par $\overline{MK}$, elle est nulle pour $\theta = + \Theta_m$ et $\theta = - \Theta_m$ et maximale pour $\theta = 0$.

h) Relation fondamentale de la dynamique pour un solide mobile autour d'un axe.

Comparons l'oscillateur de translation et l'oscillateur de rotation.
Pour le premier la somme des forces appliquées est $F_z = - kz$, pour le second la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation Δ est $\mathcal{M}_\Delta = - C\theta$.
On peut alors dresser le tableau suivant :

	Translation	Rotation
Énergie potentielle	$\frac{1}{2} kz^2$	$\frac{1}{2} C\theta^2$
Énergie cinétique	$\frac{1}{2} m\dot{z}^2$	$\frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$
Énergie totale constante	$\frac{1}{2}(kz^2 + m\dot{z}^2)$	$\frac{1}{2}(C\theta^2 + J\dot{\theta}^2)$
Équation différentielle	$m\ddot{z} = - kz = F_z$	$J\ddot{\theta} = - C\theta = \mathcal{M}_\Delta$

De même que $m\ddot{z} = F_z$ exprime la relation fondamentale de la dynamique pour un corps en translation, nous admettrons que :
la relation fondamentale de la dynamique pour un solide en rotation autour d'un axe Δ s'exprime par l'équation :

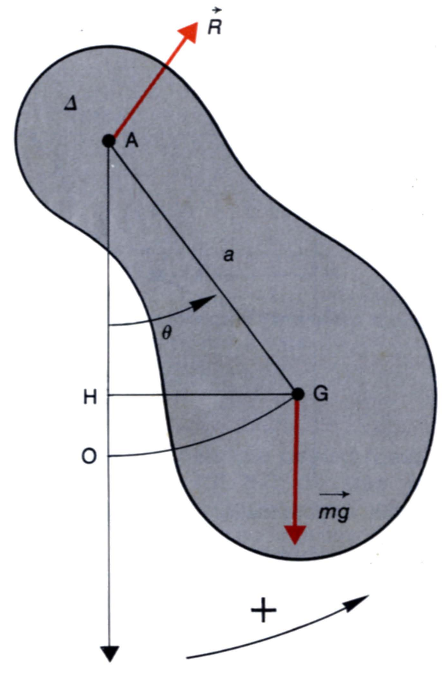
$$\boxed{J_\Delta \ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta}\,.$$

Cette équation est d'une grande importance : connaissant le moment, par rapport à l'axe de rotation Δ, des forces appliquées au solide, elle permet de connaître, par intégration, la loi du mouvement $\theta = f(t)$.

5. Un oscillateur non harmonique : le pendule pesant.

a) Constitution du pendule pesant.

C'est un solide mobile autour d'un axe horizontal Δ et dont le centre d'inertie G est en dehors de cet axe, à une distance a de l'axe. G décrit un cercle dans un plan vertical pris comme plan de la figure 20a. Δ perce ce plan en un point A. On repère la position du pendule par l'angle orienté θ que fait AG avec la verticale descendante.



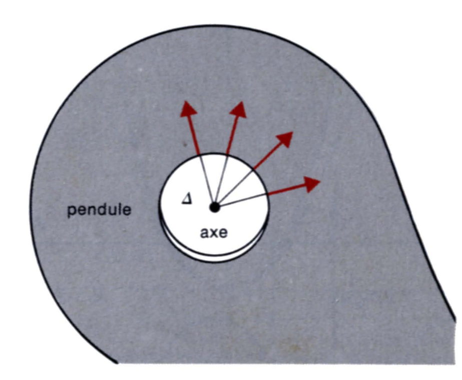
20a. Le pendule pesant.

b) Actions mises en jeu ; position d'équilibre.

- Le pendule est soumis à son poids appliqué en G, à la résistance de l'air que nous négligeons et à l'action de l'axe matériel : supposons qu'il n'y ait pas de frottement sur l'axe matériel, les actions qu'il exerce sur le pendule ont un moment nul par rapport à l'axe géométrique Δ (figure 20b).

On a donc $\qquad \Sigma\mathcal{M}_\Delta = -\,mga \sin\theta\,.$

- A l'équilibre $\Sigma\mathcal{M}_\Delta = 0$, ce qui entraîne : $\theta = 0$ (ou π) ; la position $\theta = 0$ est stable : le centre d'inertie G est à la verticale de A, en dessous.



20b. Agrandissement de l'axe matériel du pendule. S'il n'y a pas de frottement sur l'axe, les actions de l'axe sur le pendule sont perpendiculaires à la surface de l'axe matériel, et passent par l'axe géométrique Δ : donc $\Sigma\mathcal{M}_\Delta = 0$; on peut alors les représenter par un vecteur unique $\vec{R}$ passant par Δ.

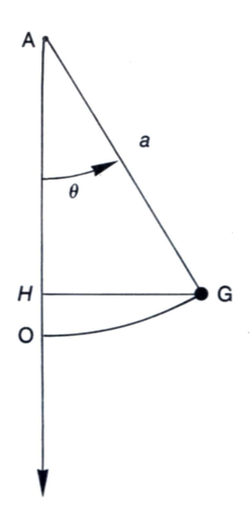
c) Les énergies du pendule.

- L'énergie potentielle du pendule est (figure 21, voir page suivante.) $E_p = mg\,.\,\text{OH}$, en posant $E_p = 0$ pour $\theta = 0$;

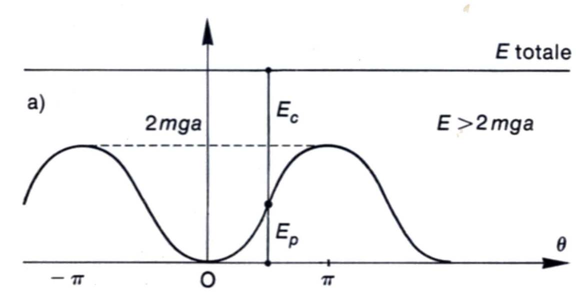
$$\text{OH} = a(1 - \cos\theta)\,.$$

D'où $E_p = mga(1 - \cos\theta)$. Cette énergie potentielle est bien minimale pour $\theta = 0$ (position d'équilibre stable).

- L'énergie cinétique est $E_c = \dfrac{1}{2} J\dot{\theta}^2$.



21. L'énergie potentielle du pendule est $E_p = mga(1 - \cos\theta)$ si on suppose qu'elle est nulle à la position d'équilibre 0.



22a. Les énergies du pendule pesant en fonction de sa position angulaire θ ; $E > 2\,mga$.

• L'énergie totale $E = E_p + E_c$ se conserve parce que la résistance de l'air est supposée négligeable et qu'il n'y a pas de frottement sur l'axe du pendule (la figure 20b montre que les actions sur l'axe ne travaillent pas au cours des oscillations du pendule car chacune se déplace perpendiculairement à sa propre direction).

d) Équation différentielle du mouvement.

Nous avons deux méthodes pour établir cette équation différentielle.

• Partons de l'équation de conservation de l'énergie totale du pendule :

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mga(1 - \cos\theta) = E = \text{constante}\ .$$

Dérivons cette équation par rapport au temps : il vient $J\dot{\theta}\,.\,\ddot{\theta} + mga\sin\theta\,.\,\dot{\theta} = 0$, soit, après élimination de la solution $\dot{\theta} = 0$

$$J\ddot{\theta} + mga\sin\theta = 0\ .$$

• Appliquons la relation fondamentale qui régit le mouvement d'un solide mobile autour d'un axe Δ :

$$J\ddot{\theta} = \Sigma\mathcal{M}_\Delta = -\,mga\sin\theta\ .$$

On retrouve la même relation :

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{mga}{J}\sin\theta}\ .$$

C'est l'équation différentielle du mouvement.
Elle contient $\sin\theta$, alors que dans le cas d'un oscillateur harmonique, elle serait de la forme $\ddot{\theta} = -K\theta$.

• **Conclusion :**

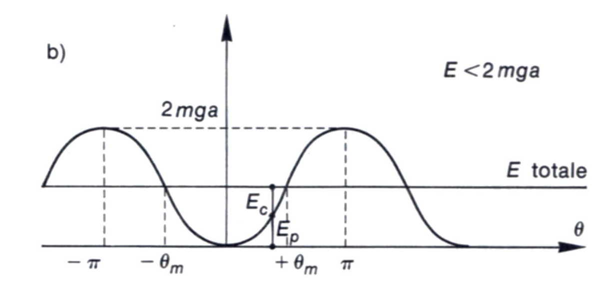
le pendule pesant n'est pas un oscillateur harmonique.

e) Harmonicité des mouvements de faible amplitude.

Nous allons montrer que le type de mouvement du pendule dépend de son énergie totale E : trois cas sont à distinguer.

• $E > 2\,mga$: la figure 22a donne la représentation des énergies du pendule en fonction de l'angle θ.
On voit que l'énergie potentielle $E_p = mga(1 - \cos\theta)$ est maximale pour $\theta = \pm\,\pi$: elle vaut alors $2\,mga$.

L'énergie cinétique $E_c = E - E_p$ ne s'annule donc jamais et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ non plus ($E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$) : le pendule tourne toujours dans le même sens (plus vite au passage par la position $\theta = 0$, moins vite pour $\theta = \pi$) : pour **$E > 2\,mga$ le pendule n'est pas un oscillateur.**



22b. Les énergies du pendule pesant en fonction de sa position angulaire θ ; $E < 2\,mga$.

• $E < 2\,mga$: dans ce cas l'énergie cinétique s'annule pour deux positions $\theta = \pm\,\Theta_m$ (figure 22b) : le pendule s'y arrête et repart en sens inverse ;

pour **$E < 2\,mga$ le pendule est un oscillateur.**
Cet oscillateur n'est généralement pas un oscillateur harmonique : en effet il se trouve dans une cuvette de potentiel non parabolique :

$$E_p = mga(1 - \cos\theta), \quad E_p \neq \frac{1}{2}K\theta^2 .$$

Ou encore, l'équation différentielle de son mouvement est

$$J\ddot{\theta} = -\,mga\sin\theta, \quad J\ddot{\theta} \neq -\,K\theta .$$

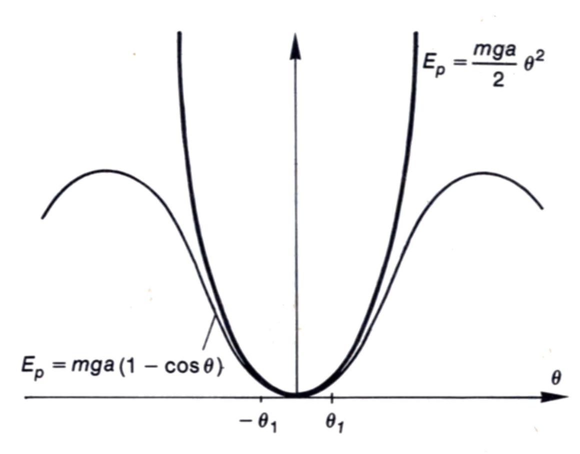
Le mouvement du pendule pesant n'est pas harmonique, sauf s'il est de très faible amplitude autour de la position verticale d'équilibre.

Le **mouvement du pendule est néanmoins périodique.** Cette propriété est connue depuis bien longtemps puisqu'il y a des siècles que le pendule sert **d'élément régulateur** pour les horloges.

• $E \ll 2\,mga$: énergie totale très faible.
Dans ce cas le pendule est un oscillateur ($E < 2\,mga$) et de plus ses oscillations sont de très faible amplitude angulaire : en effet si l'énergie E est très faible, c'est que le pendule a été lâché au voisinage de $\theta = 0$ avec une vitesse très faible ou nulle.

D'ailleurs la condition $E \ll 2\,mga$ entraîne a fortiori $E_p = mga(1 - \cos\theta) \ll 2\,mga$: $1 - \cos\theta$ est donc très faible et θ reste voisin de zéro au cours des oscillations.
L'expression approchée de l'énergie potentielle est alors, avec

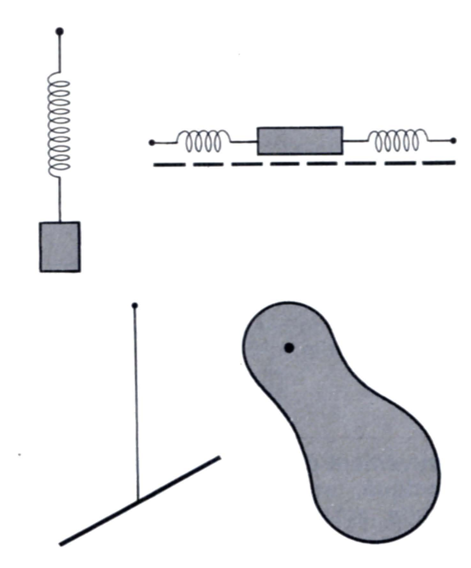
$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} : E_p \approx \frac{mga}{2}\,\theta^2 .$$



23. Le pendule pesant oscillant avec une faible amplitude. Entre θ_1 et $-\theta_1$ ($\theta_1 \approx 0{,}1$ rd) on peut confondre les courbes $E_p = mga(1 - \cos\theta)$ et $E_p = \frac{mga}{2}\,.\,\theta^2$.
La partie utile (le fond) de la cuvette de potentiel est alors parabolique : le mouvement du pendule est harmonique pour toute amplitude angulaire θ_m inférieure à θ_1.

Le pendule est alors dans une **cuvette de potentiel parabolique,** c'est un **oscillateur harmonique** (voir figure 23).
— L'expression approchée de l'équation différentielle du mouvement est alors, avec $\sin\theta \approx \theta$:

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{mga}{J}\,\theta .$$



24. Les oscillateurs s'amortissent.

C'est bien l'équation d'un mouvement harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mga}{J}}$, de période propre $T_0 = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{J}{mga}}$, de la forme

$$\theta = \Theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)\,.$$

f) Conclusion.

Il est fréquent, qu'un mouvement autour d'une position d'équilibre stable ne soit pas harmonique, et qu'il le devienne si son amplitude devient très faible. Citons par exemple le mouvement de rotation de l'aiguille de la boussole ou les oscillations des atomes d'une molécule.

6. Amortissement et entretien des oscillations mécaniques.

a) Amortissement.

Reprenons les différents dispositifs étudiés plus haut et rappelés sur la figure 24. Ils effectuent tous des oscillations dont l'amplitude décroît, plus ou moins rapidement, au cours du temps ; ils finissent tous par s'arrêter. On dit que leurs **oscillations sont amorties** (figure 25).

Les dispositifs de la figure 26 montrent que l'amortissement est provoqué par des forces de freinage ; il est d'autant plus rapide que ces forces sont plus grandes ; à la limite si le freinage est trop fort, l'oscillateur, écarté de sa position d'équilibre, y revient sans oscillation.

Sous l'action des frottements, inévitables dans les oscillateurs réels, les oscillations s'amortissent au cours du temps et les oscillateurs finissent par s'arrêter.

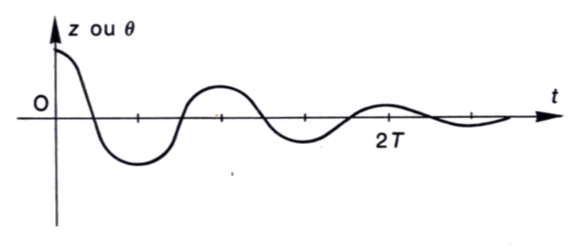
b) Interprétation énergétique.

- Rappelons le théorème de l'énergie mécanique : la variation d'énergie mécanique d'un solide entre deux instants t_1 et t_2 est égal au travail des forces non conservatives entre ces deux instants.

- Au départ, l'oscillateur reçoit une certaine énergie mécanique E_0 (sous forme potentielle par exemple si on l'écarte de sa position d'équilibre et qu'on le lâche sans vitesse initiale).

Mais les forces de frottement produisent un **travail négatif** quel que soit le sens du déplacement.

C'est le cas de la résistance de l'air, des frottements sur un axe ou des frottements introduits artificiellement (figure 26).



25. Oscillations amorties.

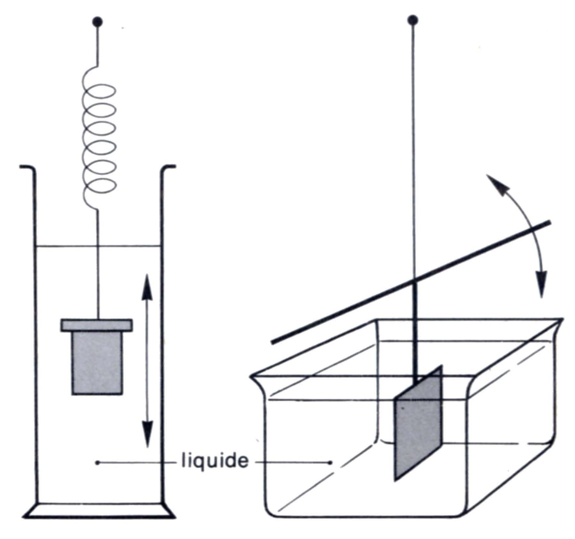
L'énergie mécanique E diminue donc progressivement. Il s'ensuit une diminution progressive de l'amplitude du mouvement et de la vitesse de passage par la position d'équilibre, en effet :

à l'écart maximal $E_c = 0$, $E = E_p = \frac{1}{2} kz^2$ (ou $\frac{1}{2} C\theta^2$) ;

au passage par la position d'équilibre.

$$E_p = 0,\ E = E_c = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 \left(\text{ou } \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2\right).$$

Finalement le système s'arrête, ayant perdu toute son énergie mécanique ; la position finale est la position d'équilibre (minimum d'énergie potentielle).
L'énergie initiale a été **dissipée en chaleur,** dans le milieu environnant (agitation des molécules d'air), dans les pièces de liaison (pivots, axes).



26. Dispositifs augmentant artificiellement l'amortissement des oscillateurs : ici on emploie des palettes plongeant dans un liquide.

• Exemple de l'oscillateur de translation (voir page 246). Soit Oz l'axe sur lequel se déplace l'oscillateur ; appelons E_0 son énergie mécanique initiale et W le travail des forces de frottement depuis le début du mouvement. Le théorème de l'énergie mécanique donne :

$$\frac{1}{2} m\dot{z}^2 + \frac{1}{2} k\dot{z}^2 - E_0 = W\,(W < 0)\ .$$

En dérivant cette relation par rapport au temps il vient :

$$m\ddot{z}\frac{dz}{dt} + kz\frac{dz}{dt} = \frac{dW}{dt},\ \text{d'où}\ m\ddot{z} = \frac{dW}{dz} - kz\ .$$

On reconnaît la relation fondamentale $\Sigma f = m\ddot{z}$ appliquée à l'oscillateur de masse m ; $\frac{dW}{dz}$ est donc la composante F_z sur Oz de la force de frottement responsable de la dissipation d'énergie.
Comme $\frac{dW}{dt}$ est toujours négatif (l'énergie diminue) et que $F_z = \frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{dt}{dz}$, on voit que F_z est toujours de signe opposé à celui de $\frac{dt}{dz}$ donc à celui de la vitesse : cela est bien en accord avec les lois des frottements.



27. Échappement à ancre.

Pour garder une amplitude constante aux oscillations, il faut fournir à l'oscillateur une énergie égale à celle que les frottements dissipent.

c) Entretien des oscillations.

• Entretenir les oscillations consiste à leur garder une amplitude constante grâce à un dispositif approprié qui a pour rôle de fournir à l'oscillateur, à chaque période, une énergie égale à celle que les forces dissipatives ont consommée en une période.
Le dispositif d'entretien est un **réservoir d'énergie** qui fonctionne en **synchronisme** avec l'oscillateur.
Citons deux exemples.

• Entretien des oscillations d'une balançoire.
Supposons que la personne placée sur la balançoire n'intervienne pas. Une personne extérieure pousse la balançoire, avec un gros effort au début pour établir un régime d'oscillation ; il lui suffit ensuite de pousser avec une force légère, sur quelques décimètres à partir de l'élongation maximale : ainsi, à chaque période, elle fournit du travail et la balançoire reçoit de l'énergie qui compense les pertes dues aux frottements. Le déclenchement synchronisé du dispositif d'entretien est commandé par le mouvement de la balançoire, par l'intermédiaire des yeux du pousseur.

• Entretien d'une horloge ou d'une montre.
L'énergie est emmagasinée dans des masses pesantes ou dans un ressort et la régulation est faite par un pendule (pesant ou de torsion).
La figure 27 montre un **échappement à ancre.** Le pendule commande le mouvement périodique de l'ancre A ; à chaque demi-période du mouvement, celle-ci libère une dent (échappement) et en bloque une autre sur la roue à ancre B, qui est entraînée par des masses pesantes ou un ressort.
Cette roue entraîne à son tour les aiguilles après démultiplication.

Le pendule régule la rotation de la roue à ancre. Mais inversement, à chaque échappement la roue à ancre agit sur le pendule et lui fournit l'énergie nécessaire à l'entretien de ses oscillations.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- Un oscillateur mécanique est animé d'un mouvement _______.
- Un oscillateur est harmonique lorsque son élongation, mesurée par rapport à sa _______, est une fonction _______ du temps.
- Un mouvement harmonique s'obtient si la force appliquée au mobile est de rappel et _______ à l'élongation. Il s'ensuit que l'accélération est constamment proportionnelle et _______ à l'élongation.
- L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique est à chaque instant proportionnelle au _______ de l'élongation. On dit que l'oscillateur est dans une cuvette de potentiel _______. L'énergie mécanique de l'oscillateur _______ au cours du temps.
- La période propre T_0 d'un oscillateur de translation est reliée à sa masse et à la constante de rappel par la relation $T =$ _______ ; pour un pendule de torsion $T =$ _______ : J est le moment d'inertie du pendule et C la _______.
- Le mouvement d'un pendule pesant n'est harmonique que si son amplitude angulaire est _______.
- Pour un oscillateur réel, l'énergie mécanique a tendance à _______ sous l'effet des forces _______. Il est nécessaire de _______ périodiquement de l'énergie à l'oscillateur pour _______ ses oscillations.

Petites questions.

1. Qu'est-ce qu'un oscillateur ?

2. Qu'est-ce qu'un oscillateur harmonique ?

3. La période propre d'un oscillateur harmonique dépend-elle de l'amplitude de ses oscillations ?

4. Quelle est la particularité de la force appliquée à un oscillateur harmonique ?

5. Comment l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique dépend-elle de son élongation ?

6. Sous quelle forme est l'énergie initiale d'un pendule de torsion qu'on lâche sans vitesse initiale après l'avoir écarté de sa position d'équilibre ?

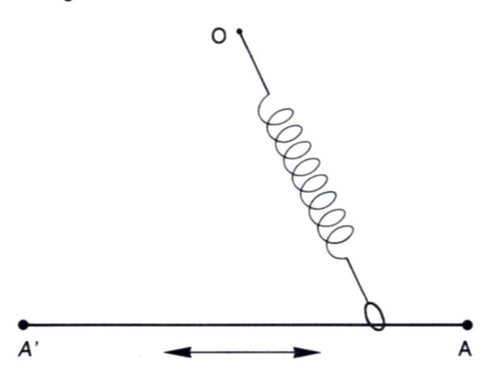
7. Pour quelles positions l'oscillateur de translation a-t-il son accélération maximale ?

8. Pourquoi une voiture devient-elle inconfortable quand ses amortisseurs sont usés ?

9. Montrez que des oscillations de translation se produisent si, avec le dispositif de la figure 6 (page 242), on écarte le palet de sa position d'équilibre horizontalement, mais dans une direction perpendiculaire à la ligne BB′, puis qu'on le lâche sans vitesse initiale.

10. Donnez l'allure de la courbe des variations, au cours du temps de l'inclinaison θ d'un pendule pesant quand les frottements ne sont pas négligeables, le pendule ayant été lâché sans vitesse initiale.
Donnez aussi l'allure des courbes représentant l'énergie potentielle, l'énergie cinétique, et l'énergie mécanique du pendule au cours du temps.

11. La figure ci-dessous représente un anneau qui glisse sans frottement sur une tige AA′ horizontale et qui est accroché à un ressort ; l'extrémité fixe O du ressort est dans le plan vertical de la tige. Quelle est la position d'équilibre de l'anneau ? Montrez que, écarté de sa position d'équilibre, il va osciller. On supposera que le ressort reste tendu même lorsqu'il est perpendiculaire à la tige AA′.



12. Pourquoi dit-on qu'un balancier d'horloge bat la seconde lorsque sa période vaut deux secondes ?

Exercices expérimentaux.

13. Pendule simple.
On l'obtient en suspendant une bille à un fil attaché à un point fixe O ; sa longueur l est la distance entre O et le centre de la bille.
Munissez-vous d'un chronomètre ; montrez que le mouvement du pendule est périodique, et que la période dépend de l'amplitude des oscillations. Comment la période T des petites oscillations dépend-elle de la longueur l du pendule : essayez les fonctions $T \propto l$, $T \propto l^2$, $T \propto \sqrt{l}$.

14. Inventoriez les oscillateurs mécaniques qui existent chez vous.

15. Pendule de torsion.
Fabriquez un pendule de torsion avec une règle suspendue par son milieu à un ruban de caoutchouc (découpé par exemple dans une vieille chambre à air de voiture). La période de ce pendule est-elle indépendante de l'amplitude angulaire des oscillations ? Quelle conclusion peut-on en tirer au sujet du caoutchouc ?
Placez deux surcharges égales symétriquement par rapport au centre de la règle et étudiez l'influence de leur position sur la période des oscillations du pendule. Concluez.

16. Pendule de translation.
Munissez-vous d'un chronomètre. Suspendez à un ruban de caoutchouc (découpé dans une vieille chambre à air) un objet dont vous avez plusieurs exemplaires. Faites osciller l'ensemble verticalement. Le mouvement est-il périodique ? La période dépend-elle de l'amplitude des oscillations ? Dans l'affirmative, quelle conclusion en tirez-vous au sujet du caoutchouc. Cherchez un moyen statique pour vérifier votre hypothèse.
Faites varier la période d'oscillation en changeant de masse oscillante, en doublant le ruban, ou en en mettant deux bout à bout, et étudiez l'influence de ces différents facteurs.

17. Oscillateur à lame métallique.
Bloquez une lame de scie à métaux au bord d'une table de façon qu'elle soit horizontale, puis vissez un objet à son extrémité libre (une plaque de bois par exemple). Faites osciller, mesurez la période.
Recommencez en disposant la lame verticalement, avec son extrémité libre en bas, puis avec son extrémité libre en haut. Dans chaque cas mesurez la période. Expliquez la cause des changements constatés.

Applications immédiates.

18. Calculez la pulsation propre d'un balancier d'horloge qui bat la seconde c'est-à-dire dont la période est 2 secondes.

19. Un ressort hélicoïdal s'allonge de 1 cm quand on le soumet à une force de 1 N. Quelle est sa constante de raideur ? On y suspend une masse de 0,5 kg. Quelle est la période des oscillations verticales du système ? Que devient-elle si on rajoute 1,5 kg ?

20. Un pendule de torsion est constitué d'un disque horizontal homogène suspendu par son centre à un fil de torsion. Dans quel rapport varie la période du pendule si on fixe un autre disque identique sous le premier ?

21. Supposons que la température soit sans effet sur la constante de torsion d'un ressort spiral. Montrez que l'élévation de température d'une montre la fait retarder.

22. Comment varie la fréquence de vibration d'un diapason si on surcharge les extrémités de ses deux branches ?

23. Calculez l'énergie potentielle d'un pendule de torsion écarté de 90° par rapport à sa position d'équilibre, et dont le fil a une constante de torsion $C = 0{,}4$ m . N/rd.

24. On place côte à côte une horloge à balancier et une pendulette dont l'élément régulateur est un pendule de torsion, puis on vérifie qu'elles sont parfaitement réglées l'une sur l'autre. On les transporte ensuite (avec beaucoup de soin) en un autre lieu et on s'aperçoit que, mise côte à côte, l'une prend du retard sur l'autre. Expliquez.

Approfondissement

25. Un point matériel est animé d'un mouvement vertical sinusoïdal d'élongation z, d'amplitude 5 cm et de période 2 s. A la date origine le point est au plus haut de sa trajectoire. Donnez :

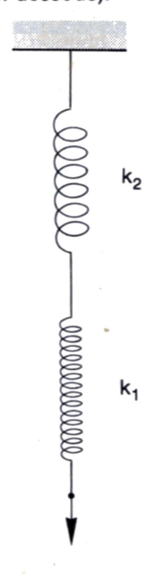
a) l'équation de son mouvement ;

b) la date des passages au point le plus bas de la trajectoire ;

c) la date du premier passage au point $z = +\,2{,}5$ cm et les valeurs correspondantes de la vitesse et de l'accélération.

Réponses : **a)** z cm $= 5 \cos \pi t$; **b)** $t = 1$ s, 3 s, 5 s ... **c)** $t = \frac{1}{3}$ s, $\dot{z} = -\,13{,}6$ cm/s, $\ddot{z} = -\,24{,}6$ cm . s^{-2}.

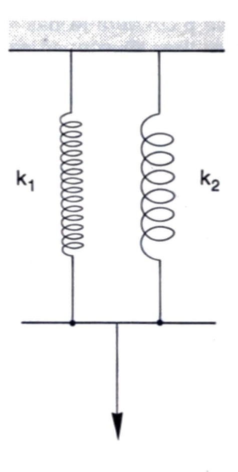
26. On met bout à bout deux ressorts de constante de raideur k_1 et k_2 et de masses négligeables. Soient l_{01} et l_{02} leurs longueurs à vide (figure ci-dessous).



On exerce sur l'ensemble une tension F qui se communique à chacun des ressorts et allonge l'ensemble de Δl.
Calculez les nouvelles longueurs l_1 et l_2 de chacun des ressorts, établissez la relation qui lie F et Δl et montrez que l'ensemble se comporte comme un ressort unique de constante de raideur $K = \dfrac{k_1\,k_2}{k_1 + k_2}$.
Appliquez cette relation au cas de deux ressorts de même constante de raideur k.

27. Deux ressorts de constantes de raideur k_1 et k_2 sont assemblés comme l'indique la figure ci-dessous. Un déplacement de la tige qui réunit leurs extrémités mobiles entraîne des allongements égaux de ces ressorts car la tige est assujettie à rester parallèle au support des ressorts. Montrez que l'ensemble des deux ressorts se comporte comme un ressort unique de constante de raideur k ; calculez k.

Réponse : $k = k_1 + k_2$.



28. Sur une table à coussin d'air (figure 8 page 243) un palet est accroché à deux ressorts différents, de constantes de raideur k et k'. Montrez que la force de rappel vers la position d'équilibre $z = 0$ reste néanmoins de la forme $f_z = -\,Kz$ lorsque le mouvement reste rectiligne : calculez K.

29. A la date $t = 0$, un oscillateur de translation de masse $m = 2$ kg dont le ressort a une constante de raideur $k = 80$ N/m, a une élongation $z = 2$ cm et une vitesse $v = 10$ cm/s vers le haut. Déterminez complètement les caractéristiques de son mouvement $z = Zm \cos(\omega_0 t - \varphi)$. A quelles dates le mobile passera-t-il par le point le plus haut de sa trajectoire ?

Réponses : $\omega_0 = 6{,}32$ rd/s, $\varphi = 0{,}669$ rd, $Zm = 2{,}55$ cm, $t = (0{,}106 + 0{,}994\ n)$ secondes, n entier.

30. En un lieu où l'accélération de la pesanteur vaut $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, un pendule simple, masse ponctuelle attachée à un fil inextensible de longueur 50 cm, est écarté de 25° de la verticale et lâché sans vitesse initiale. Quelle est sa vitesse angulaire au passage par la verticale ?

Réponse : $\dot{\theta} = 1{,}92$ rd/s.

31. Une masse $m = 1$ kg est suspendue à un ressort de constante de raideur $k = 20$ N/m. On l'écarte de 5 cm vers le bas et on lâche sans vitesse initiale. Quelle est sa vitesse de passage par la position d'équilibre ? Combien de temps s'écoule-t-il entre l'instant du lâcher et le premier puis le 2e passage par la position d'équilibre ? Quelle est l'énergie potentielle au point le plus haut de la trajectoire si on pose $E_p = 0$ à l'équilibre ?

Réponses : $v = 0{,}223$ m/s ; 0,35 s puis 1,05 s ; $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ J.

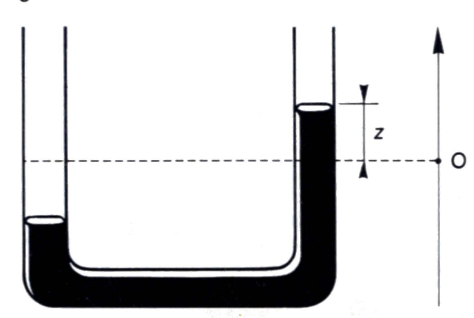
32. La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène H — Cl est voisine de $8{,}5 \cdot 10^{13}$ Hz. Les masses molaires atomiques de ses atomes constituants sont 1 g pour l'hydrogène, 35 g pour le chlore : l'atome de chlore, plus massif, pourra en première approximation être considéré comme immobile au cours des oscillations de la molécule. Calculez dans ces conditions la « constante de raideur » de la liaison H — Cl en assimilant celle-ci à un ressort élastique. On rappelle la valeur du nombre d'Avogadro : $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$.

Réponse : $k = 4{,}74 \cdot 10^2$ N/m.

33. De la période des petites oscillations du pendule pesant $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}$, déduisez la période du pendule simple constitué d'une masse ponctuelle attachée à un fil inextensible, sans masse, de longueur l.

Réponse : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

34 Un tube cylindrique de section intérieure s a la forme d'un U possédant deux branches verticales ; il contient une masse m de mercure de masse volumique ρ (figure ci-dessous). Le niveau de la surface libre du mercure en équilibre est choisi comme origine O d'un axe Oz vertical.



Le mercure n'étant plus en équilibre, sa surface libre est à la hauteur z dans une branche, $-z$ dans l'autre : quelle est l'énergie potentielle du système si l'on pose qu'elle est nulle à l'équilibre ?
Lorsque le liquide est en mouvement, on émet l'hypothèse suivante : les vitesses de tous les éléments de volume du mercure ont la même norme, $\dot{z}$; quelle est l'énergie cinétique du mercure ? En négligeant les frottements, montrez que le mouvement de cette masse de mercure est harmonique et calculez la période de ses oscillations.
Application numérique : $m = 1$ kg, $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³, $g = 9{,}81$ m/s²
$s = 1$ cm².

Réponses : $E_p = \rho s g z^2$, $E_c = \dfrac{1}{2} m \dot{z}^2$,

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2\rho s g}}$, $T = 1{,}216$ s.

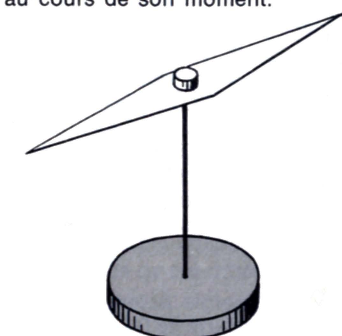
35. Un pendule de torsion est constitué d'une tige horizontale de longueur $2\,l$, de masse négligeable, portant une masse ponctuelle m à chacune de ses extrémités, et suspendue par son centre à un fil de constante de torsion C.

a) Calculez la période des oscillations de ce pendule sachant que $m = 200$ g, $l = 10$ cm, $C = 2 \cdot 10^{-2}$ N . m/rd.

b) On lâche le pendule sans vitesse initiale après l'avoir écarté d'un angle $\theta = \pi/4$ par rapport à sa position d'équilibre : déterminez sa vitesse angulaire au passage par la position $\theta = 0$.

Réponses : $T = 2{,}81$ s, $\dot{\theta} = 1{,}75$ rd/s.

36. Une boussole est constituée d'une aiguille aimantée caractérisée par un vecteur moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ porté par l'axe de l'aiguille ; celle-ci est mobile autour d'un axe vertical passant par son centre d'inertie. Elle est plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et horizontal et elle reste horizontale au cours de son moment.



a) Quelle est la direction d'équilibre de l'aiguille de la boussole ?

b) Montrez que si on l'écarte peu de cette position, elle prend un mouvement de rotation sinusoïdal : calculez la période de ce mouvement (on donne J, moment d'inertie de l'aiguille par rapport à son axe de rotation).

Réponses : **a)** l'aiguille est parallèle à $\vec{B}$;
b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{\mathfrak{M}B}}$.

37 On considère le système constitué de deux palets de **même masse** placés sur une table à coussin d'air et reliés par un ressort de constante de raideur k.
On écarte ces deux palets l'un de l'autre et on les lâche **simultanément sans vitesse initale.**

a) Montrez que le centre d'inertie du système reste fixe au cours du mouvement ; quelle conséquence pouvez-vous en tirer quant au mouvement des palets ?

b) Un palet est repéré sur l'axe d'oscillation par son écart x par rapport à sa position d'équilibre.
Calculez la force appliquée à ce palet à une date quelconque ; en fonction du résultat, déduisez la période T d'oscillation du système.

c). Montrez que le milieu du ressort est immobile.
Calculez la constante de raideur d'un demi-ressort.
Retrouvez ainsi l'expression de la période.

Réponses : **a)** G immobile ; **b)** $f_x = -2\,kx$, $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{2\,k}}$; **c)** $2\,k$.

38. Un pendule de torsion est formé d'un disque de masse 1 kg, de rayon 10 cm suspendu par son centre à un fil de constante de torsion $C = 5\,.\,10^{-2}$ m . N/rd. On l'écarte de 45° de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale : au bout d'une période, il ne revient qu'à 44°. Calculez le travail des forces de frottement et la puissance nécessaire pour entretenir les oscillations d'un tel pendule.

Réponses : $W = -6{,}77\,.\,10^{-4}$ J, $T = 1{,}98$ s, $P = 3{,}41\,.\,10^{-4}$ W.

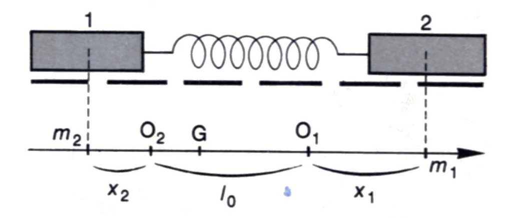
39 On reprend l'expérience de l'exercice précédent avec cette fois-ci deux palets de masses m_1 et m_2 différentes. Leurs centres occupent les positions O_1 et O_2 à l'équilibre (figure ci-dessous) ; on les écarte l'un de l'autre le long de $O_1 O_2$ et on les lâche simultanément sans vitesse initiale.

a) Montrez que le centre d'inertie du système reste fixe au cours du mouvement. Quelle relation existe-t-il à chaque instant entre les écarts algébriques x_1 et x_2 de chaque palet par rapport à sa position d'équilibre ?

b) Calculez la force appliquée à chaque palet puis la période d'oscillation du système.

c) Application numérique :
La constante de raideur de la liaison H — Cl vaut $k = 4{,}61\,.\,10^2$ N/m. Calculez la fréquence d'oscillation N, de la molécule de chlorure d'hydrogène H — Cl constituée d'hydrogène, de masse molaire atomique 1 g, et de l'isotope $^{35}_{17}Cl$ du chlore, de masse molaire atomique 35 g. On rappelle que le nombre d'Avogadro vaut $N = 6{,}02\,.\,10^{23}$.
Soit f_2 la fréquence d'oscillation de la molécule H — Cl constituée avec l'isotope $^{37}_{17}Cl$ de masse molaire atomique 37 g. Calculez le rapport $\frac{f_1}{f_2}$ sachant que la constante de raideur de la liaison est la même dans les deux molécules.

Réponses : **a)** $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$;
b) $f_1 = -k(x_1 - x_2)$, $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m_1\,m_2}{k(m_1 + m_2)}}$;
c) $N_1 = 8{,}65\,.\,10^{13}$ Hz, $\frac{f_1}{f_2} = 1{,}000\,75$.



14 Circuits oscillants.

1. Régimes transitoires dans quelques circuits.
2. Oscillations électriques d'un circuit *LC* sans résistance.
3. Etude énergétique des oscillations électriques.



Pierre Henry au pupitre d'un synthétiseur. Le synthétiseur est constitué d'oscillateurs électriques qui alimentent des haut-parleurs et fournissent des sons variés en hauteur et en timbre.

Nous nous proposons de montrer ici qu'il est possible de produire des **oscillations électriques,** *c'est-à-dire un courant allant alternativement dans un sens puis dans l'autre dans un circuit, à condition de choisir convenablement les composants de ce circuit et de lui fournir une énergie initiale. Nous verrons ainsi apparaître des analogies avec ce qui a été étudié à propos des oscillations mécaniques.*

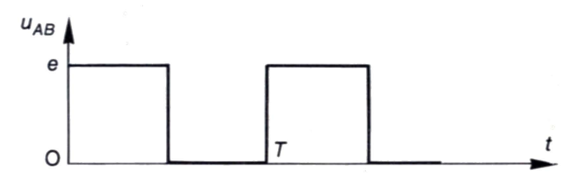
1. Régimes transitoires dans quelques circuits.

• **Un régime transitoire** a lieu lorsqu'on provoque une modification non périodique dans un circuit. Par exemple nous avons déjà étudié, au chapitre 12 (page 229), l'évolution au cours du temps de l'intensité du courant dans un circuit contenant un générateur de courant continu, une inductance et une résistance : si on ferme le circuit, l'intensité du courant, d'abord nulle, évolue au cours du temps jusqu'à atteindre une valeur constante : on est passé par un régime transitoire avant d'atteindre un régime permanent.

• Un régime transitoire est parfois très rapide : par exemple l'allumage d'une lampe. C'est pourquoi nous allons employer l'oscillographe pour étudier quelques régimes transitoires.

a) Charge et décharge d'un condensateur dans une résistance.

• **Montage** : on met en série **une résistance de valeur *R* et un condensateur de capacité *C*,** et on alimente l'ensemble par un générateur basse fréquence fournissant une tension « en créneaux » (figures 1 et 2). L'oscillographe est branché aux bornes de la résistance, la tension mesurée entre ces bornes est donc $u_R = Ri$ et, à un coefficient près, la courbe qui apparaît sur l'écran représente l'intensité i dans le circuit en fonction du temps : $i = f(t)$.
Lorsque la tension en créneaux vaut e, le condensateur se charge à travers la résistance ; lorsque la tension en créneaux vaut zéro, tout se passe comme si le circuit était fermé sur lui-même entre A et B, le condensateur se décharge. Puis les phénomènes se reproduisent puisque la tension en créneaux est périodique.



1. Tension en créneaux. La valeur de u_{AB} alterne brusquement entre zéro et e. Lorsque $u = 0$, tout se passe comme si un court-circuit était branché entre A et B.

La décharge d'un condensateur dans une résistance pure n'est jamais oscillante, quelles que soient les valeurs choisies pour les composants.

• **Courbes de charge et de décharge** : leur allure est donnée sur la figure 3a et les photos 3b et 3c : il **s'agit d'un régime transitoire.** L'intensité du courant change de signe (le courant change de sens) quand on passe de la charge à la décharge. Mais l'intensité ne change jamais de signe pendant la charge : on dit que **le régime de charge n'est pas oscillant.** De même la décharge n'est pas oscillante.

• **Influence des valeurs des composants du circuit** : si on fait varier les valeurs de R ou C, les conclusions précédentes restent valables. Seule la rapidité du régime transitoire dépend de R et C : la variation de i est d'autant plus rapide que R, ou C, ou les deux, sont plus petits.

b) Régimes transitoires dans une résistance en série avec une inductance.

• **Montage :** il est donné par la figure 4 (page 270) : dans le montage précédent, on a remplacé le condensateur par une inductance. Grâce à la tension en créneaux on branche alternativement un générateur de tension e et un court-circuit entre les bornes A et B.

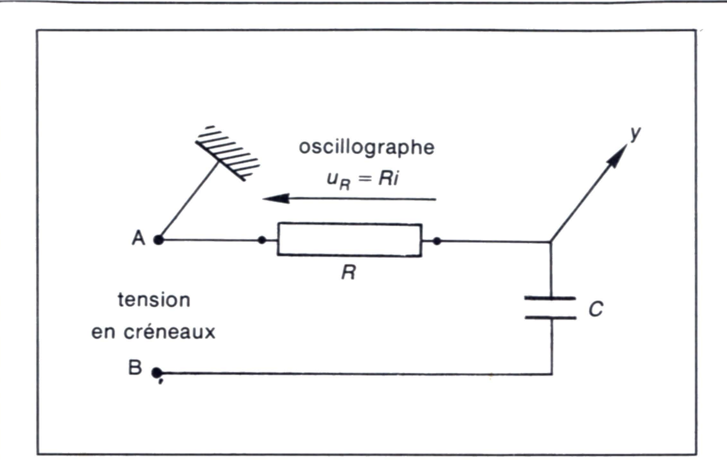
• **Courbes** : leur allure est donnée par la figure 5a et les photos 5b et 5c (p. 270). Il s'agit à nouveau de régimes transitoires, que nous avons déjà étudiés au chapitre 12, à propos du phénomène d'auto-induction : lorsque u_{AB} passe **brusquement** de zéro à la valeur e, le courant s'établit progressivement grâce à la présence de l'inductance ; lorsque u_{AB} s'annule brusquement, l'intensité diminue progressivement. Mais ces régimes **ne sont jamais oscillants** : i est toujours positif.

c) Décharge d'un condensateur dans une résistance en série avec une inductance.

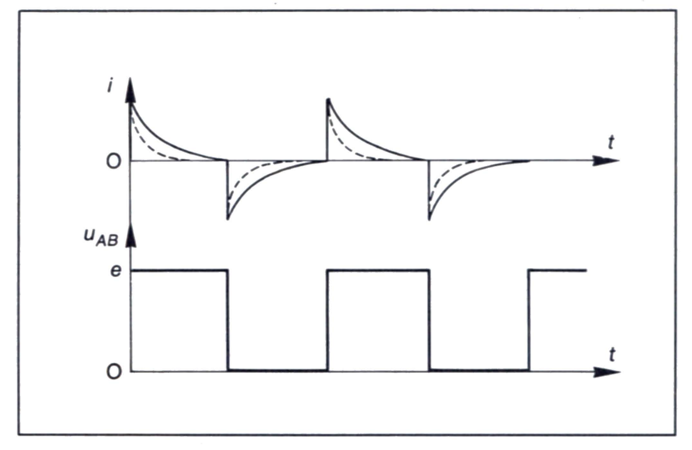
• **Montage :** il est représenté par la figure 6 (p. 271) : par rapport au montage précédent, on a ajouté un condensateur de capacité C : on a ce qu'on appelle **un circuit *R, L, C.*** Grâce à la tension en créneaux il est alternativement branché sur une tension e puis fermé sur lui-même entre A et B.

Les régimes transitoires dans un circuit contenant une inductance et une résistance ne sont jamais oscillants.

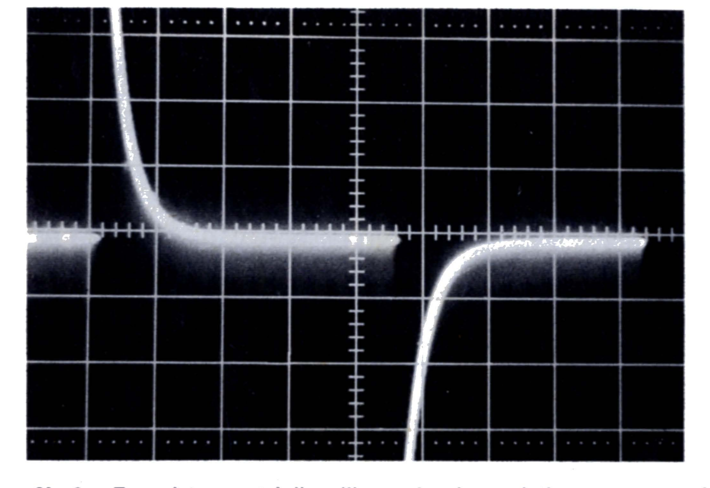
• **Courbes. Oscillations électriques** : dans les cas précédents a) et b), la valeur de la résistance R avait une influence sur la rapidité du régime transitoire, mais celui-ci n'était jamais un régime oscillant. Mais avec le circuit R, L, C, la forme de la courbe $i = f(t)$ change complètement quand on passe d'une forte valeur de R à une faible valeur.

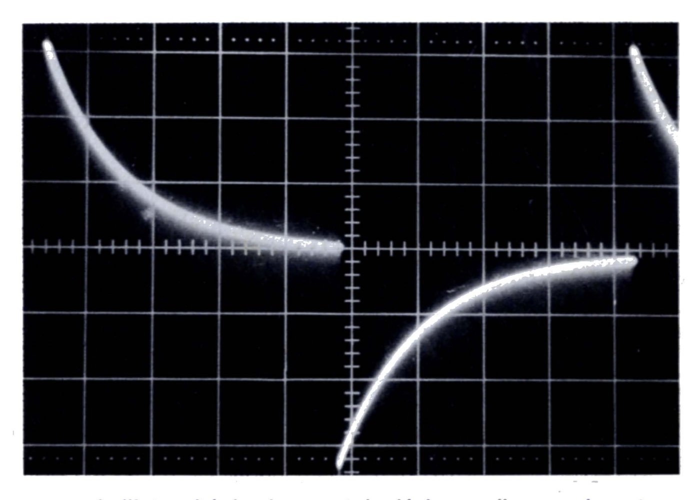


2. Montage permettant l'étude de la charge et de la décharge d'un condensateur à travers une résistance. La tension en créneaux ayant une fréquence de l'ordre de 100 Hz, on prendra pour R de 100 à 1 000 Ω et pour C de 0,5 à 5 μF.

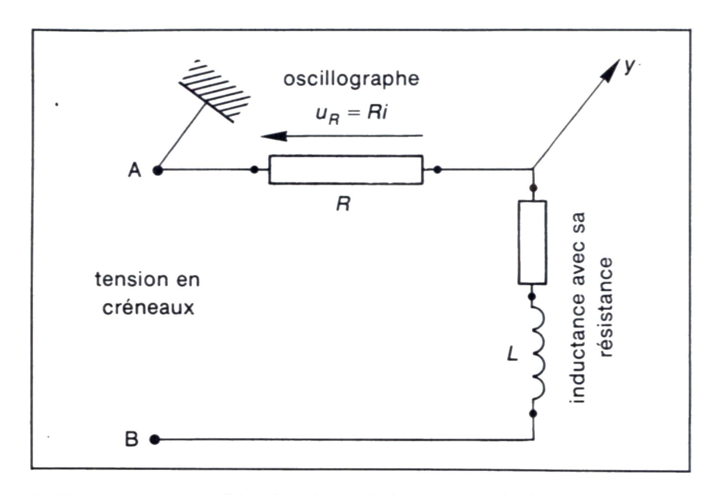


3a. Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance. Les courbes $i = f(t)$ en traits pleins correspondent à une certaine valeur du produit $R \cdot C$; les courbes en pointillés correspondent à une autre valeur, plus faible.

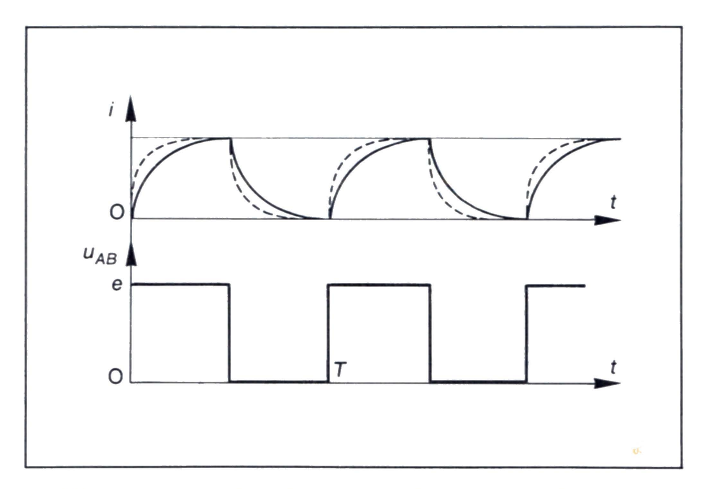




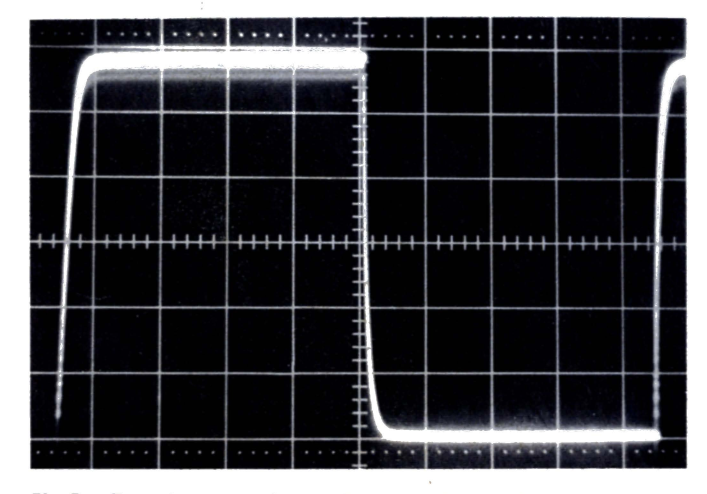
3b, 3c. Enregistrement à l'oscillographe des variations, au cours du temps, de l'intensité de charge et de décharge d'un condensateur, au travers d'une résistance. La valeur du produit RC augmente de la photo 3b à la photo 3c. Ni la charge, ni la décharge ne sont oscillantes. On remarquera qu'entre la fin d'une courbe de décharge et la courbe suivante, il y a une variation très rapide de l'intensité dans le circuit : on dit que l'intensité est discontinue.

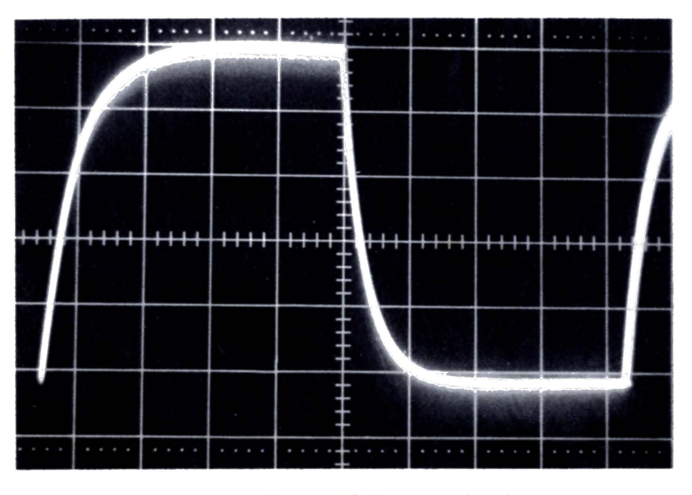


4. Montage pour l'étude des régimes transitoires dans une résistance en série avec une inductance.
La tension en créneaux ayant une fréquence de l'ordre de 100 Hz, on prendra pour R de 500 à 1 000 Ω et pour L de 0,5 à 2 H.



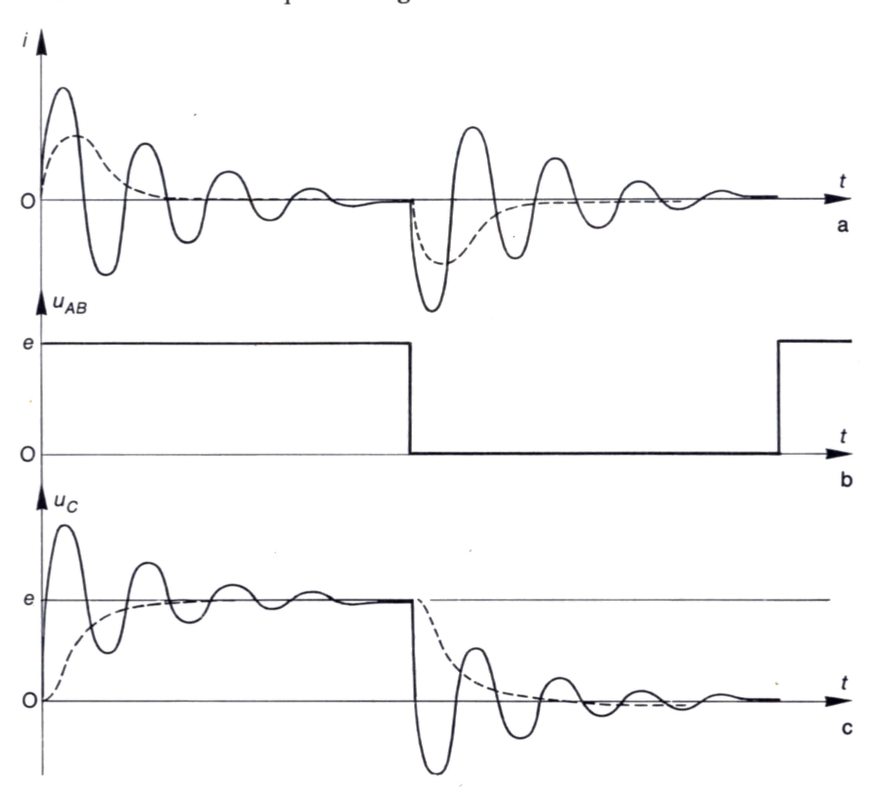
5a. Régimes transitoires dans une résistance en série avec une inductance. L'intensité croît ou décroît progressivement, elle n'est pas discontinue ; elle ne change pas de signe : le régime n'est pas oscillant. La valeur de $\frac{L}{R}$ est plus grande pour les courbes en traits pleins que pour celles en pointillés.



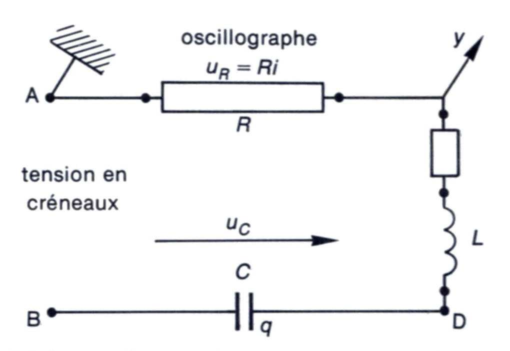


5b, 5c. Enregistrement à l'oscillographe (page ci-contre), des variations au cours du temps de l'intensité dans un circuit contenant une résistance en série avec une inductance. Sur la photo 5c, la valeur de L/R est plus grande que sur la photo 5b.

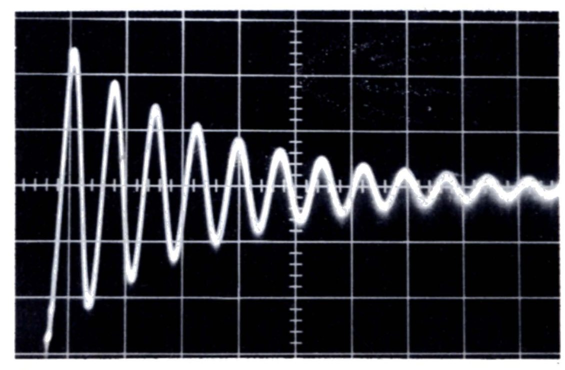
La figure 7a montre les variations de l'intensité i en fonction du temps (oscillographe branché aux bornes de R), en traits pleins lorsque la résistance est faible, en pointillés lorsque la résistance est forte.
La figure 7c montre les variations de la tension u_c aux bornes du condensateur (oscillographe branché entre D et B). On sait que la charge du condensateur vaut, à chaque instant, $q = Cu_c$. En traits pleins on voit le régime de charge et de décharge du condensateur avec une faible résistance, en pointillés le régime avec une forte résistance. Pour les faibles valeurs de R, l'intensité i aussi bien que la tension u_c et donc la charge q, évoluent, chacune vers sa valeur finale, en passant par une suite de valeurs alternativement supérieures puis inférieures à cette valeur finale : on dit que les **régimes sont oscillants.**



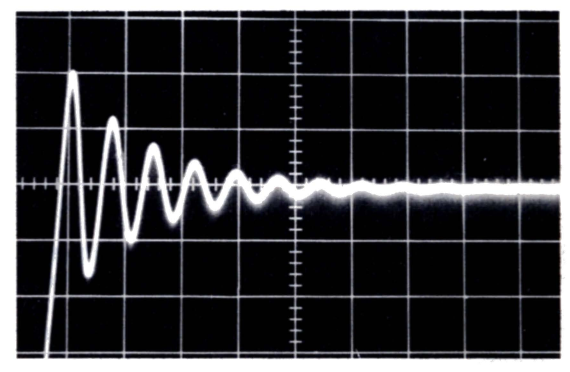
7a, 7b, 7c. Circuit *RLC.* Intensité dans le circuit (figure 7a), et tension aux bornes du condensateur (figure 7c). En traits pleins, régime oscillant obtenu pour une résistance faible. En pointillés, régime non oscillant obtenu pour une résistance forte.



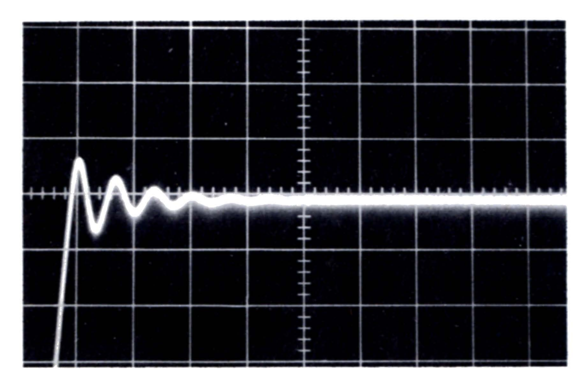
6. Décharge d'un condensateur dans une résistance en série avec une inductance. La tension en créneaux a une fréquence de l'ordre de 500 Hz, on prendra pour L une bobine de 500 spires, on choisira C de l'ordre de 100 pF et on fera varier R de 0 à 100 000 Ω.



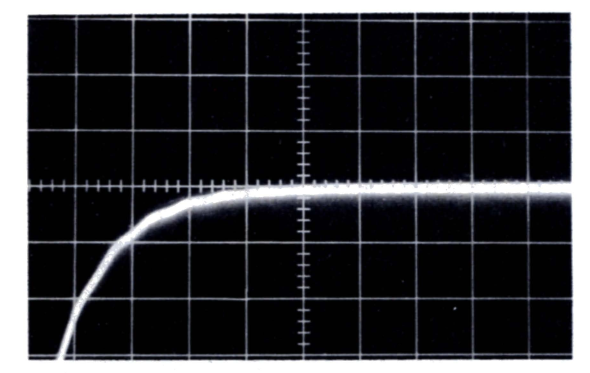
8a.



8b.



8c.



8d.

8. De la photo 8a à la photo 8d, on a progressivement augmenté la valeur de la résistance R sans changer celles de L et C. Les oscillations, de plus en plus amorties, ont fini par disparaître.

On peut obtenir des oscillations électriques à condition que le circuit contienne une inductance et une capacité ; de plus, la résistance du circuit doit être suffisamment faible.

• **Conclusion** : il est possible d'obtenir des oscillations électriques dans un circuit à une **double condition** :
— il faut que le circuit possède une **capacité et une inductance** disposées en série ;
— il faut que la **résistance totale** du circuit soit **suffisamment faible.**
En augmentant progressivement R, le nombre d'oscillations diminue : on dit que le régime est de plus en plus **amorti.** Quand R dépasse une certaine valeur, il n'y a plus d'oscillations. L'influence de R sur la nature du régime est progressive (photos 8).

2. Oscillations électriques d'un circuit *LC* sans résistance.

En diminuant progressivement la résistance R du circuit RLC, on constate que les oscillations électriques sont de moins en moins amorties. Nous nous proposons d'étudier le **cas limite** où la **résistance** du circuit est **nulle.**

a) Montage. Conventions.

• Le montage (figure 9) est constitué d'une inductance L de résistance négligeable en série avec un condensateur de capacité C. **Le condensateur ayant été préalablement** chargé, le courant commencera à passer dans le circuit après la fermeture de l'interrupteur K : ce courant est **provoqué par la décharge du condensateur** (il n'y a pas d'autre source de courant dans le circuit).

• Le sens positif du courant est indiqué par les flèches sur la figure 9. Appelons q la charge de l'armature du condensateur reliée à B (l'armature reliée à A porte alors $-q$).

• Entre les dates t et $t + dt$, la charge q varie de dq (elle passe de q à $q + dq$) : pour cela il est nécessaire que toute section du circuit soit traversée par une quantité d'électricité dq pendant l'intervalle de temps dt, ce qui correspond à un courant d'intensité

$$\boxed{i = + \frac{dq}{dt}}$$

(le signe + qui figure dans cette relation correspond à nos conventions pour q et pour le sens positif de i : ici une intensité positive contribuerait à une augmentation de q).

• D'autre part la charge q du condensateur vaut

$$q = C(v_B - v_A) = -Cu_{AB}.$$

b) Les énergies dans le circuit.

• Nous avons vu plus haut (chapitres 12 et 7) :

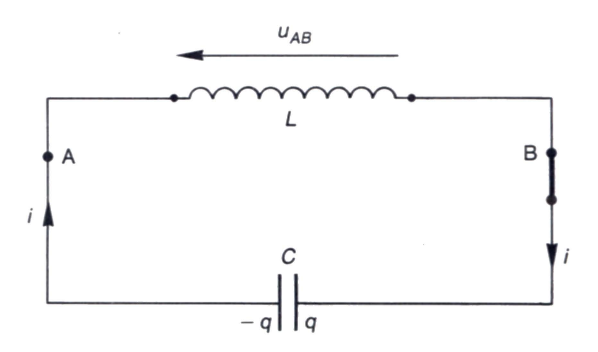
— qu'une inductance L parcourue par un courant d'intensité i possède **une énergie magnétique** $E_B = \frac{1}{2}Li^2$;

— qu'un condensateur de capacité C portant la charge q possède une **énergie électrostatique** $E_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$.

Ces énergies sont **emmagasinées ;** elles varient au cours du temps si i et q varient. La **résistance** du circuit **étant nulle,** il ne peut pas y avoir de dissipation d'énergie par effet Joule : **l'énergie totale E** du circuit va **se conserver au cours du temps.**

• Nous verrons plus loin que des échanges d'énergie vont s'effectuer entre les formes magnétique et électrostatique mais leur somme restera constante, et, parce que $R = 0$:

$$\boxed{E_B + E_E = E = \text{constante}}$$



9. Circuit LC. Les conventions de signe sont telles que l'on ait $i = \frac{dq}{dt}$ (q augmente lorsque i est positif, et inversement).

Dans le circuit LC de résistance nulle, l'énergie totale se conserve au cours du temps.

c) Equation différentielle régissant le circuit.

Comme nous l'avons fait dans **l'étude des oscillateurs mécaniques** (chapitre 13), nous avons ici deux moyens d'établir cette équation différentielle.

• Calculons les tensions aux bornes des composants du circuit (figure 9). On sait qu'aux bornes d'un générateur, la loi d'Ohm s'exprime par $u_{AB} = Ri_{AB} - e$. De plus, une inductance L parcourue par un courant d'intensité i variable est le siège d'un phénomène d'auto-induction, avec apparition d'une f.é.m. $e = -L\frac{di}{dt}$.

D'où $u_{AB} = Ri + L\frac{di}{dt}$, et comme ici $R = 0$, $u_{AB} = L\frac{di}{dt}$.

Comme, par ailleurs, $u_{AB} = -\frac{q}{C}$, il vient, en identifiant les deux expressions : $L\frac{di}{dt} = -\frac{q}{C}$. Enfin $i = \frac{dq}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$.

D'où : $$\boxed{L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad \text{ou} \quad \ddot{q} + \frac{1}{LC}\,q = 0}\ .$$

C'est l'équation différentielle à laquelle obéit la charge du condensateur. Nous reconnaissons ici l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique.**

• **Partons de l'équation de conservation de l'énergie.**

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = E = \text{constante}\ .$$

Dérivons ses deux membres par rapport au temps :

il vient : $Li\,\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C}\,\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dE}{dt} = 0$. Or $\dfrac{dq}{dt} = i,\ \dfrac{di}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$

$$\text{d'où}\quad i\left(L\,\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}\right) = 0$$

Le circuit *LC* de résistance nulle est un oscillateur électrique harmonique.

Après élimination de la solution banale $i = 0$, il vient : $L\ddot{q} + \dfrac{q}{C} = 0$; c'est l'équation différentielle trouvée ci-dessus.

d) Solution de l'équation différentielle : oscillations harmoniques.

• **Solution générale.**

$$\ddot{q} = -\frac{1}{LC}q$$

Posons $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$. Nous avons alors $\ddot{q} = -\,\omega_0^2\,q$.

Comme en mécanique (voir chapitre précédent), on sait que la solution d'une telle équation est de la forme :

$$q = A\cos(\omega_0 t + \varphi)\ .$$

Vérifions-le. On a :

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = -\,A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} = -\,A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\,\omega_0^2\,q\ .$$

Comme on a aussi $i = \frac{dq}{dt}$, il vient

$$\boxed{q = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad i = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

Le régime est oscillant, plus précisément il est sinusoïdal, ou harmonique, de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}.$$

Le « circuit LC » est un **oscillateur électrique** de **période propre** $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ dont la valeur dépend de celles de ses composants L et C. (L : inductance du circuit ; C : capacité du condensateur).

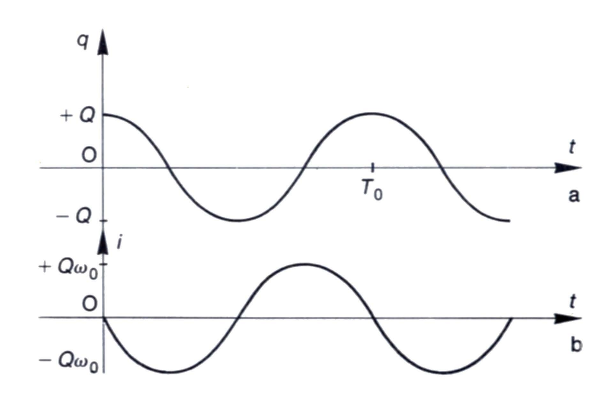
La période propre d'oscillation d'un circuit *LC* de résistance nulle vaut $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

• **Détermination des constantes A et φ** : elles s'obtiennent en exprimant les **conditions initiales** : on charge le condensateur sous la tension U puis on ferme l'interrupteur K à la date $t = 0$.

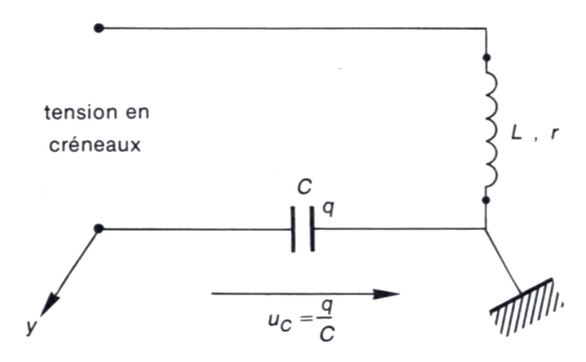
— L'énergie emmagasinée dans un condensateur vaut $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$, celle que contient une inductance vaut $\frac{1}{2}Li^2$; or aucune de ces deux formes d'énergie ne peut varier de façon brutale, la même propriété est donc vraie pour la charge q d'un condensateur et aussi pour l'intensité i à travers une inductance : au cours du temps, **la charge q d'un condensateur varie de façon continue, l'intensité i traversant une inductance varie de façon continue.**

— **Remarque :** sur les figures 3 (page 269) on observe la décharge d'un condensateur dans une résistance : l'intensité $i(t)$ paraît discontinue parce que le circuit étudié possède une inductance négligeable.

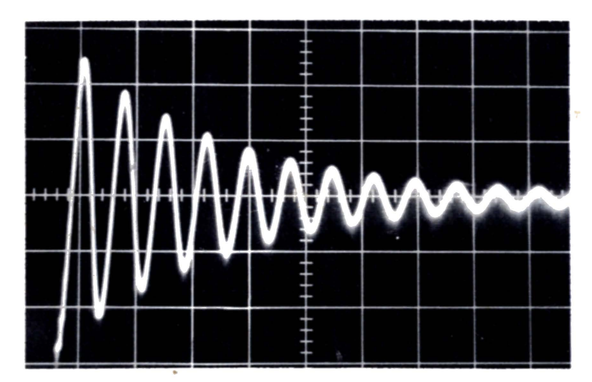
— **Exprimons les continuités de q et de i,** puisque le circuit étudié ici possède à la fois une capacité et une inductance : avant la date $t = 0$ on a $q = Q = CU$ et $i = 0$; à la date $t = 0$ où l'interrupteur est fermé, q a encore sa valeur précédente, soit $q_0 = Q$, et i a encore sa



10a, 10b. Variations au cours du temps, de la charge q du condensateur et de l'intensité i dans le circuit : $q = Q\cos\omega_0 t$, $i = -Q\omega_0 \sin\omega_0 t$.



11. Oscillations d'un circuit *LC*. On étudie les variations de $u_C = \frac{q}{C}$, en fonction du temps. Par rapport au montage de la figure 6, on a supprimé la résistance *R*, mais on ne peut pas éviter la présence de la résistance *r* de la bobine d'inductance *L*. Avec $C \approx 10^{-10}$ *F* (100 *pF*), $L \approx 10^{-1}$ H, $r \approx$ quelques ohms (bobine de 500 spires), et une tension en créneaux de fréquence 1 000 Hz, on obtient des oscillations peu amorties.



12. Oscillations électriques peu amorties.

valeur précédente soit $i_0 = 0$; avec $q = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $i = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ on a donc : $Q = A \cos \varphi$ et $0 = A\omega_0 \sin \varphi$ d'où $\varphi = k\pi$ (k entier). On choisit $\varphi = 0$, d'où $Q = A$ et finalement :

$$\boxed{q = Q \cos \omega_0 t, \quad i = -Q\omega_0 \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}.$$

• **Remarque** : on ne manquera pas de faire **le parallèle avec l'étude du mouvement d'un oscillateur mécanique.** Par exemple :
— l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur linéaire est de la forme $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$,
— le mouvement est de la forme $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ de période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$.
— Pour déterminer complètement le mouvement il faut préciser la position initiale et la vitesse initiale, nulle par exemple.

e) Variation au cours du temps. Vérifications expérimentales

• Les variations au cours du temps de $q = Q \cos \omega_0 t$, et $i = -Q\omega_0 \sin \omega_0 t$, sont représentées sur les figures 10a et 10b (voir p. 275). On y constate par exemple que q diminue pendant que i est négatif et que q augmente pendant que i est positif ; ceci est bien conforme aux conventions de la figure 9.

• Expérimentalement, en reprenant le montage de la figure 6, on peut essayer de se rapprocher des conditions de notre étude actuelle, celle d'un circuit de résistance nulle. Pour réduire l'amortissement produit par la résistance (voir 1c)), il faut choisir convenablement les valeurs de *R*, *L* et *C* (la figure 11 indique le montage employé et les ordres de grandeur retenus). La photo 12 montre l'enregistrement obtenu à l'oscillographe avec de telles valeurs : l'amplitude des oscillations diminue peu d'une période à l'autre.

• Avec un oscillographe étalonné en temps il est facile de constater l'influence des valeurs de L et C sur la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ du circuit, et même de vérifier numériquement cette relation.

3. Étude énergétique des oscillations électriques.

• Nous allons préciser comment évoluent les deux formes d'énergie dans l'oscillateur électrique harmonique où la résistance est supposée nulle ; puis nous nous intéresserons au cas où cette résistance n'est plus nulle ; enfin nous verrons comment réaliser un générateur d'oscillations électriques.

• **Rappels** : l'énergie emmagasinée dans une inductance parcourue par un courant d'intensité i est $E_B = \frac{1}{2} Li^2$; l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité C est $E_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$.

Si un courant d'intensité i traverse une résistance R, celle-ci est le siège d'un effet Joule : la puissance p associée à l'énergie dissipée vaut $p = Ri^2$; si ce courant est variable au cours du temps, la puissance p est également une fonction du temps, mais elle est toujours positive (ou nulle) quel que soit le sens du courant : l'énergie correspondante est toujours dissipée vers le milieu extérieur.

a) Circuit de résistance nulle : conservation de l'énergie.

• **Expressions des deux formes d'énergie emmagasinée** : reprenons les conditions initiales choisies précédemment : le condensateur porte initialement la charge Q et l'intensité est nulle : l'énergie totale $E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2$ est initialement sous forme électrostatique :

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

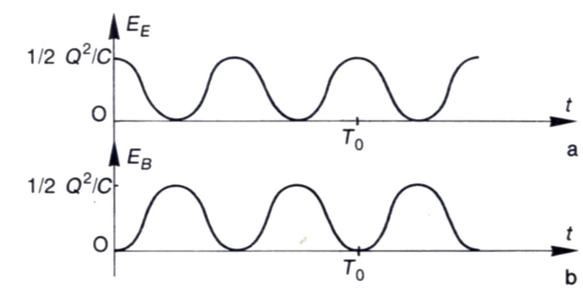
A la date $t = 0$ on ferme le circuit et on obtient un régime d'oscillations harmoniques :

$$q = Q \cos \omega_0 t, \qquad i = -Q\omega_0 \sin \omega_0 t.$$

La résistance étant nulle, il n'y a pas de dissipation d'énergie, l'énergie totale se conserve, ce que nous allons vérifier ; en effet :

$$E_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \cos^2 \omega_0 t \qquad E_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} LQ^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

et comme $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ il vient : $E_B = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \sin^2 \omega_0 t$



13a, 13b. Circuit LC sans résistance : variations au cours du temps de l'énergie électrostatique $E_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \cos^2 \omega_0 t$ et de l'énergie électromagnétique $E_B = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \sin^2 \omega_0 t$. A chaque instant elles varient en sens inverses et leur somme est constante.

On trouve donc $E = E_E + E_B = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}(\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t)$

d'où $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ quel que soit t.

On retrouve bien à tout instant une énergie totale égale à l'énergie initialement emmagasinée dans le condensateur.

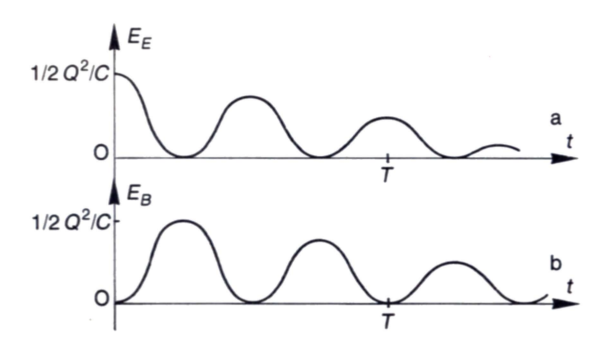
• **Échanges entre les deux formes d'énergie** : les figures 13a et 13b donnent les variations des deux formes d'énergie au cours du temps. Ces énergies sont des fonctions périodiques du temps, de période $\frac{T_0}{2}$.

De plus l'une augmente quand l'autre diminue. Leur somme restant constante, on dit que :
les oscillations électriques consistent en un **échange périodique d'énergie** entre le condensateur et l'inductance, entre la forme électrostatique et la forme magnétique.

• **Analogie mécanique** : on a une situation tout à fait comparable avec un oscillateur harmonique mécanique : par exemple dans un oscillateur de translation il y a de l'énergie cinétique $\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right)$, de l'énergie potentielle $\left(\frac{1}{2}kz^2\right)$; s'il n'y a pas de frottement leur somme est constante, il y a donc échange périodique entre les deux formes d'énergie (voir chapitre 13, page 247).
On peut pousser plus loin la comparaison entre les deux types d'oscillateurs comme le montre le tableau ci-contre.

Grandeur mécanique		Grandeur électrique	
élongation	z	q	charge
vitesse	v	i	intensité
énergie potentielle	$\frac{1}{2}kz^2$	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	énergie électrique dans le condensateur
énergie cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}Li^2$	énergie magnétique dans l'inductance

Analogie entre grandeurs mécaniques et électriques.



14a, 14b. Circuit LC avec résistance : variations au cours du temps de l'énergie électrostatique E_E et de l'énergie électromagnétique E_B. Il y a encore échange entre ces deux formes d'énergie, mais leur somme diminue (on peut le vérifier aux dates $T/4$, $T/2$, $3\,T/4$ ...), et finit par s'annuler. L'énergie initiale a été dissipée en chaleur par effet Joule dans la résistance.

b) Dissipation de l'énergie lorsque *R* existe.

• **Évolution des énergies au cours du temps** : dans le cas réel où la résistance R n'est pas nulle, les courbes de variation des énergies en fonction du temps ont les allures données par les figures 14a et 14b. Chacune des énergies emmagasinées varie au cours du temps et diminue d'une période à l'autre. La somme $E_E + E_B$ diminue constamment. Au bout d'un temps suffisant le condensateur est déchargé et l'intensité est nulle. L'énergie emmagasinée s'est annulée.
C'est dans la résistance que l'énergie s'est dissipée : à chaque instant la puissance correspondant à l'effet Joule vaut $p = Ri^2$ et pendant chaque intervalle de temps dt il se dégage l'énergie $dW = Ri^2\,dt$. Cet effet Joule a lieu quel que soit le signe de i : il consomme progressivement

toute l'énergie initiale du circuit : celle-ci est dégagée dans le milieu extérieur après avoir servi à échauffer la résistance.

• **Conclusion : la présence d'une résistance** dans un circuit *RLC* est une cause **d'amortissement des oscillations,** consécutif à une **dissipation de l'énergie** du système.

• **Équation différentielle de l'oscillateur amorti** : entre le début de la décharge du condensateur et la date t, l'énergie dégagée par effet Joule vaut $W = \int_0^t Ri^2\,dt$ et elle est égale à la diminution de l'énergie totale du circuit :

$$\int_0^t Ri^2\,dt = E_{\text{initiale}} - \left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2\right).$$

Dérivons cette relation par rapport au temps ; il vient :

$$Ri^2 = \frac{dE_{\text{initiale}}}{dt} - \left(\frac{q}{C}\,\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt}\right).$$

Mais $\dfrac{dE_{\text{initiale}}}{dt} = 0$ (car E_{initiale} est une valeur particulière constante)

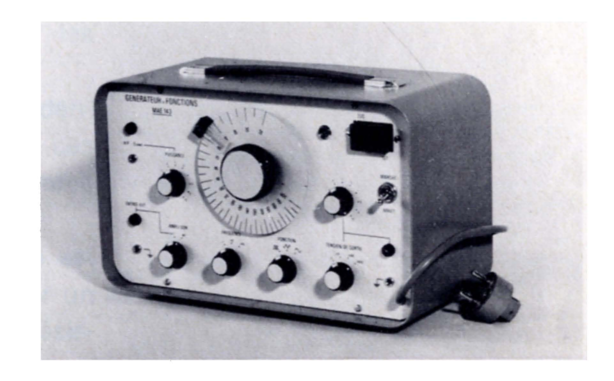
et puisque $\dot{q} = i$ et $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$:

$$\left(Ri + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right)i = 0 \qquad L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

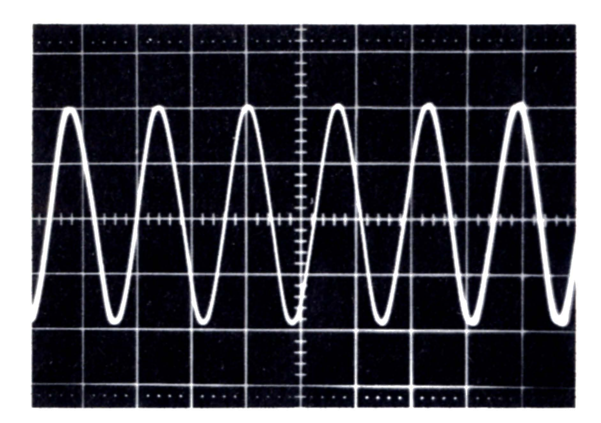
C'est l'équation différentielle du circuit oscillant amorti.
Cette équation peut d'ailleurs s'établir à partir de l'étude des tensions dans le circuit : reprenons la figure 9 de la page 273 et supposons que l'inductance L possède aussi une résistance R ; on a alors :

$$u_{AB} = Ri + L\frac{di}{dt}\ ,\quad u_{AB} = -\frac{q}{C}$$

d'où : $$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0,\quad L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$



15a. Générateur basse fréquence.
Le vernier des fréquences commande la valeur de la capacité d'un condensateur variable appartenant à un circuit oscillant. Le changement de gamme de fréquence s'obtient en changeant d'inductance.



15b. Oscillations sinusoïdales fournies par un générateur à basse fréquence.

Pour réaliser un oscillateur électrique, il faut associer un circuit *LC* à un dispositif d'entretien qui y compense les pertes d'énergie causées par l'effet Joule.

• **Analogie mécanique** : la situation est comparable pour un oscillateur mécanique : les frottements sont une cause d'amortissement, ils provoquent une diminution de l'amplitude des oscillations, et l'énergie mécanique du système est progressivement transformée en chaleur.

c) Principe d'un générateur d'oscillations sinusoïdales.

• Entretenir les oscillations, c'est maintenir leur amplitude, Q pour q, et $Q\omega_0$ pour i ; c'est donc maintenir l'énergie totale du circuit : il faut lui fournir constamment une énergie égale à celle qui est dissipée par l'effet Joule.

• Les composants principaux d'un oscillateur électrique (un générateur basse fréquence par exemple) sont, **très schématiquement** :
— une source d'énergie,
— un composant électronique convenable (un transistor),
— un circuit oscillant de période T.

Le transistor sert d'intermédiaire entre la source et le circuit oscillant, il a un rôle de robinet d'énergie chargé de délivrer, pendant une partie convenable de chaque période T, et en quantité convenable, l'énergie nécessaire à l'entretien des oscillations. Comme cet entretien doit être synchronisé avec les oscillations, le système doit fonctionner en boucle fermée : dans le montage de type émetteur commun, le circuit oscillant a une action sur le courant de base du transistor, qui influe sur le courant de collecteur avec un effet amplificateur, et enfin le courant de collecteur agit sur le circuit oscillant en lui fournissant de l'énergie.

• On trouve ainsi la même situation que pour l'entretien d'une horloge, d'une montre mécanique : l'échappement à ancre assure la liaison entre un balancier et une réserve d'énergie potentielle de pesanteur ou d'élasticité. De même, la personne qui pousse une balançoire doit éviter de le faire à contre-temps : elle fournit de l'énergie sur une portion bien déterminée de la trajectoire de la balançoire et elle doit faire usage de sa vision pour réaliser la synchronisation (les yeux du pousseur jouent le rôle de la base du transistor).

• La photo 15a montre un générateur basse fréquence. La photo 15b montre les oscillations électriques sinusoïdales qu'il fournit. La modification de la période s'obtient soit de façon continue en faisant varier la capacité d'un condensateur variable (voir chapitre 7 page 115), soit de façon discontinue en changeant d'inductance.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- Pour qu'un circuit électrique soit oscillant, il faut qu'il contienne un ______ et une ______ , et que sa ______ ne soit pas trop forte.
- Dans le circuit *LC* idéal de résistance nulle, l'énergie totale ______ , les oscillations sont ______ , de période $T_0 =$ ______ .
- L'énergie se trouve emmagasinée sous forme ______ dans le condensateur et sous forme ______ dans l'inductance. Chacune de ces énergies varie périodiquement au cours du temps, mais leur somme ______ puisque la ______ est supposée nulle.
- Dans un circuit réel de résistance non négligeable, l'énergie totale est progressivement ______ sous forme ______ . Cela se traduit par un ______ des oscillations électriques, d'autant plus rapide que la résistance est plus ______ .
- Pour entretenir les oscillations propres d'un circuit *RLC,* il faut qu'une source d'énergie ______ l'énergie perdue par le circuit ; c'est généralement un ______ qui assure ce transfert synchronisé d'énergie.

Petites questions.

1. La décharge d'un condensateur dans une résistance est-elle oscillante ?

2. Comment se modifie l'amortissement des oscillations d'un circuit *RLC* quand on augmente sa résistance ?

3. Quelle est la particularité de l'intensité dans un circuit oscillant à l'instant où la charge du condensateur passe par un extremum ?

4. Quelle est la forme de l'énergie dans un circuit oscillant à un instant où la charge du condensateur est maximale ?

5. Quelle est la période de variation de l'énergie dans le condensateur d'un circuit *LC* de résistance négligeable ?

6. Soit un circuit *LC* sans résistance. A une date *t* donnée la charge du condensateur est nulle. *L* et *C* étant connus en savez-vous assez pour pouvoir préciser l'évolution immédiatement ultérieure de : a) la charge du condensateur ; b) l'énergie emmagasinée dans le condensateur ?

7. A l'entrée d'un poste de radio se trouve un circuit oscillant *LC* dont on fait varier la fréquence propre grâce à un condensateur variable à air et grâce à différentes bobines d'inductance. Que fait-on lorsqu'on enclenche un bouton de changement de gamme ; lorsqu'on tourne le bouton d'accord ?

Applications immédiates.

8. Calculez la fréquence propre N_0 des oscillations d'un circuit *LC* d'inductance $L = 1$ H et de capacité $C = 10{,}1$ µF.
Même question pour un circuit dans lequel $L = 1$ µH et $C = 10^{-3}$ µF ; à quel domaine appartient cette fréquence N_0 ?

9. On double la capacité d'un circuit oscillant : dans quel rapport la fréquence propre d'oscillation est-elle modifiée ?

10. On charge le condensateur d'un circuit *RLC* série sous une tension U_0 puis on ferme le circuit : des oscillations électriques amorties se produisent puis disparaissent. Calculez l'énergie qui s'est dégagée par effet Joule dans la résistance. On prendra $C = 1$ µF, $R = 10\ \Omega$, $L = 1$ H, $U_0 = 100$ V.

Réponse : $W = 5$ mJ.

Approfondissement.

11. On étudie la décharge oscillante d'un condensateur de capacité 0,1 µF dans une inductance *L*, en branchant un oscillographe entre les bornes du condensateur. Le balayage employé donne en abscisse sur l'écran une échelle de 0,2 ms/cm. Sur la courbe obtenue, les abscisses de deux maxima successifs diffèrent de 4,4 cm. Déduisez de cette mesure la valeur de *L*.

Réponse : 0,196 H.

12. Un circuit oscillant est constitué d'un condensateur formé de deux armatures de 1 dm² de surface, planes, parallèles, distantes de 1 mm, et d'un solénoïde formé de 100 spires de fil régulièrement bobinées sur un cylindre de section 20 cm² et de longueur 10 cm (le champ magnétique créé par ce solénoïde sera assimilé à celui d'un solénoïde infiniment long).

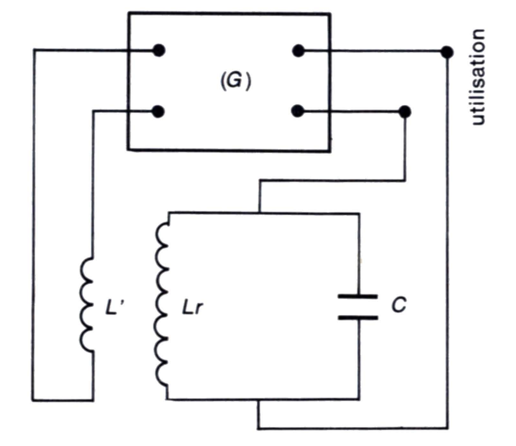
a) Calculez la fréquence propre de ce circuit.

b) Que devient cette fréquence propre si la distance entre les armatures passe à 4 mm ?

Réponses : a) $C = 8{,}84 \cdot 10^{-11}$ F, $L = 0{,}251$ mH, $N_0 = 1{,}06 \cdot 10^6$ Hz ;
b) N_0 double.

13 Étudiez l'évolution des énergies dans l'oscillateur harmonique mécanique (masse *m* rappelée sans frottement vers sa position d'équilibre par un ressort de constante de raideur *k*) et dans l'oscillateur harmonique électrique (condensateur de capacité *C* et bobine d'inductance *L* et de résistance négligeable). On prend les conditions de lancement habituelles : on écarte la masse de sa position d'équilibre et on lâche sans vitesse initiale ; on charge le condensateur puis on ferme le circuit sur l'inductance. Comparez les deux oscillateurs où les rôles du condensateur et de l'inductance se retrouvent dans la masse et le ressort : précisez si le condensateur équivaut à la masse ou au ressort.

14. Le montage ci-dessous est constitué d'un circuit *rLC* dont la bobine *L* agit, par son champ magnétique, sur une bobine *L'* voisine. Le **quadripôle** (*G*) est un **amplificateur.** Expliquez pourquoi cet ensemble peut constituer un générateur d'oscillations électriques sinusoïdales.



15 Un poste récepteur radio est accordé sur un émetteur lorsque le circuit oscillant *LC* d'entrée du récepteur a une fréquence propre N_0 égale à la fréquence N de l'onde porteuse envoyée par l'émetteur.

a) Dans le circuit *LC,* le condensateur est constitué de deux lames distantes de 0,5 mm et dont la surface en regard peut varier de 4 cm² à 20 cm². Calculez les deux valeurs extrêmes que peut prendre C.

b) Montrez que si l'on associe à ce condensateur une inductance $L_1 = 32$ mH on peut couvrir la gamme des « grandes ondes » dont les fréquences sont comprises entre 150 kHz et 330 kHz.

c) Montrez qu'il est impossible en utilisant le même condensateur et une seule inductance de couvrir la gamme des « ondes moyennes », qui s'étend de 500 à 1 500 kHz.

d) Si l'on met en service un condensateur variable dont les lames, distantes de 0,5 mm, ont une surface en regard variant de 2 à 20 cm², donnez des valeurs d'inductances convenables pour couvrir la gamme des « ondes moyennes ».

Réponses : a) C varie de $7{,}07 \,.\, 10^{-12}\, F$ à $35{,}35 \,.\, 10^{-12}\, F$; b) on couvre la gamme 149-334 kHz ; c) C varie dans un rapport de 1 à 5 alors qu'il faudrait un rapport de 1 à 9 ; d) avec $L = 3{,}18$ mH on couvre 474-1 500 kHz, avec $L = 2{,}86$ mH on couvre 500-1 580 kHz ; on choisira par exemple $L = 3$ mH.

16. Un circuit est constitué d'une bobine d'inductance $L = 1$ H, de résistance R inconnue, et d'un condensateur de capacité $C = 10\ \mu$F. On charge celui-ci sous une tension de 100 V et on étudie la décharge à l'oscillographe. Au bout d'une période, la tension aux bornes du condensateur repasse par un maximum qui n'est plus que de 90 V. Calculez :

a) l'énergie perdue pendant cette première période ;

b) la période propre du circuit ;

c) l'ordre de grandeur de la puissance qui serait nécessaire pour entretenir les oscillations de ce circuit ;

d) l'ordre de grandeur de l'intensité maximale I_m dans le circuit au cours de cette première période ;

e) l'ordre de grandeur de la résistance de ce circuit.

Réponses : a) 9,5 mJ ; b) $1{,}98 \,.\, 10^{-2}$ s ; c) $P \approx 0{,}5$ W ; d) $I_m^2 \approx 10^{-1}$ A ; e) $R \approx 10\ \Omega$.

15 Dipôles en régime sinusoïdal forcé.

I. Généralités.

1. Le courant sinusoïdal et ses principaux effets.
2. Intensité et tension efficaces.

II. Étude expérimentale du comportement de quelques dipôles.

1. Loi d'Ohm pour une résistance.
2. Etude expérimentale du condensateur et de l'inductance.

III. Étude théorique.

1. Relations instantanées entre intensités et tensions.
2. Calcul de l'intensité par la méthode de Fresnel.
3. Calcul de l'intensité par la méthode des nombres complexes.



Un radiateur électrique est un dipôle qui fonctionne en régime sinusoïdal forcé lorsqu'on le branche sur le « secteur ».

Nous nous proposons d'étudier maintenant le comportement d'un dipôle électrique lorsqu'il est soumis à une tension sinusoïdale : le générateur impose alors sa fréquence au circuit et on obtient un régime d'oscillations électriques forcées.

I. Généralités.

1. Le courant sinusoïdal et ses principaux effets.

a) Tension sinusoïdale. Régime sinusoïdal forcé.

• **Tension sinusoïdale :** elle est de la forme $u = U_m \cos \omega t$, elle est donc périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, de fréquence $N = \frac{\omega}{2\pi}$. Par exemple les générateurs électriques de l'E.D.F. (alternateurs) produisent des tensions sinusoïdales de fréquence 50 Hz.

• **Régime sinusoïdal forcé. Intensité sinusoïdale :** lorsqu'on branche un circuit (résistance, condensateur, etc...) sur une tension sinusoïdale de fréquence N, il se produit d'abord un régime transitoire puis, très vite, (généralement en une fraction de seconde) s'établit un régime sinusoïdal de même fréquence N que la source, caractérisé par une intensité de la forme :

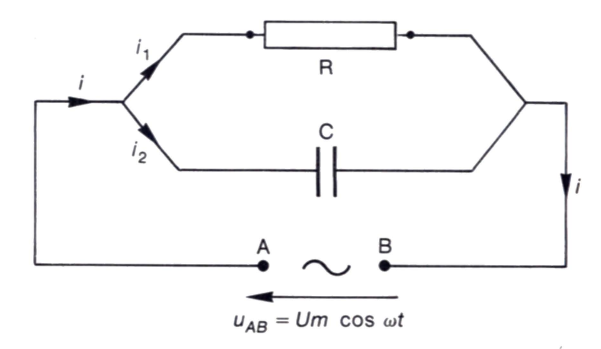
$$i = I_m \cos(\omega t - \varphi) .$$

Le circuit est obligé d'osciller à la fréquence du générateur, on a un **régime sinusoïdal forcé.** L'intensité i est alternativement positive puis négative, ce qui signifie qu'un courant sinusoïdal circule alternativement dans un sens puis dans l'autre, de A vers B puis de B vers A (figure 1).

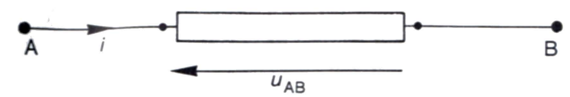
• **Remarque :** désormais nous réserverons les **lettres minuscules** $i, u, \ldots$ pour désigner les **valeurs instantanées** de grandeurs variables au cours du temps ; au contraire les grandeurs constantes seront désignées par des lettres majuscules : I_m, U_m, puis plus loin I, U.

b) Cas des courants de basse fréquence.

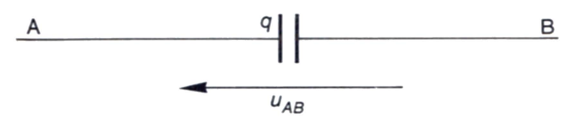
• Les courants industriels ou domestiques fournis par le réseau E.D.F. ($N = 50$ Hz) et les courants circulant dans les appareils électro-acoustiques (téléphones, électrophones, haut-parleurs, $N < 20\,000$ Hz) sont des courants de basse fréquence.



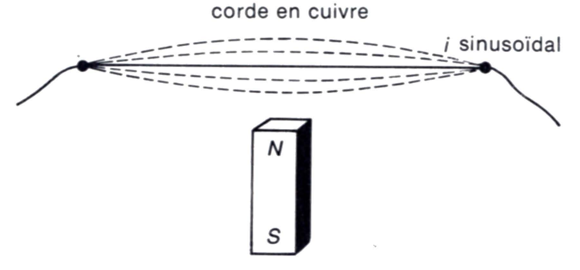
1. Une tension sinusoïdale est représentée conventionnellement par ~. Les lois des courants dérivés sont applicables en régime sinusoïdal, à chaque instant : $i = i_1 + i_2$.



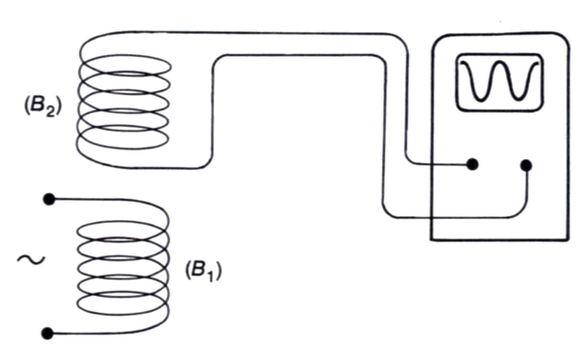
2. En régime sinusoïdal $u_{AB}(t) = Ri(t)$.



3. En régime sinusoïdal $q_A(t) = Cu_{AB}(t)$ ou plus simplement $q(t) = C \cdot u(t)$.



4. Action d'une induction magnétique indépendante du temps sur un circuit parcouru par un courant sinusoïdal : les vibrations ont même fréquence que le courant.



5. Induction électromagnétique en régime sinusoïdal. La bobine (B_2) reçoit de (B_1) un flux d'induction sinusoïdal ; (B_2) est donc le siège d'une faculté électromotrice sinusoïdale visible sur l'oscillographe.

• Leur étude bénéficie d'une condition favorable : les dimensions des circuits que nous utiliserons n'excéderont jamais quelques mètres. Comme les actions électromagnétiques se transmettent de proche en proche à tous les points d'un circuit à la vitesse de la lumière, il est facile de calculer qu'il leur faudra 10^{-8} s pour parcourir 3 m par exemple. Comparée à cette durée, la période $T = 2 \cdot 10^{-2}$ s du courant E.D.F. paraît très longue, ce courant « paraît varier très lentement » donc :

• Les lois des courants continus sont **applicables à chaque instant** aux courants de basse fréquence. Citons quelques conséquences :

— l'intensité est la même en tous les points d'un circuit ne comportant pas de dérivation (figure 1) ;
— les lois d'Ohm sont applicables, en particulier $u_R(t) = Ri(t)$ aux bornes d'une résistance non inductive (figure 2) ;
— le champ magnétique est proportionnel à l'intensité du courant qui le crée : $b(t) = ki(t)$; un courant sinusoïdal crée un champ magnétique sinusoïdal ;
— la charge d'un condensateur est proportionnelle à la tension entre ses armatures : $q(t) = Cu(t)$ (figure 3) ;
— le flux propre dans une inductance est proportionnel à l'intensité qui la traverse : $\Phi_p(t) = Li(t)$;

C et L gardent en courant alternatif basse fréquence les mêmes valeurs qu'en régime continu.

c) Quelques propriétés des courants sinusoïdaux.

Passons-les rapidement en revue.

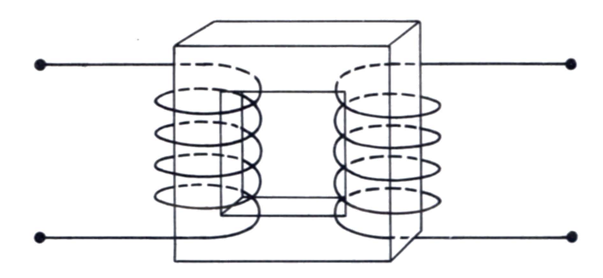
• **Effet Joule :** chacun sait qu'un radiateur ou une lampe branchés sur le « secteur » dégagent de la chaleur.

• **Actions électromagnétiques :** la corde de cuivre représentée figure 4, parcourue par un courant sinusoïdal, se met à vibrer si on en approche un aimant qui crée un champ magnétique indépendant du temps.

• **Induction électromagnétique :** principe d'un transformateur.
La bobine (B_1) de la figure 5 étant parcourue par une intensité $i_1 = I_m \cos \omega t$, produit dans (B_2) un flux $\Phi_2 = KI_m \cos \omega t$ qui est responsable d'une faculté électromotrice sinusoïdale :

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = KI_m\,\omega \sin \omega t\,.$$

Ceci constitue le principe d'un transformateur ; dans un transformateur réel les deux bobines sont reliées par une carcasse de fer (figure 6).

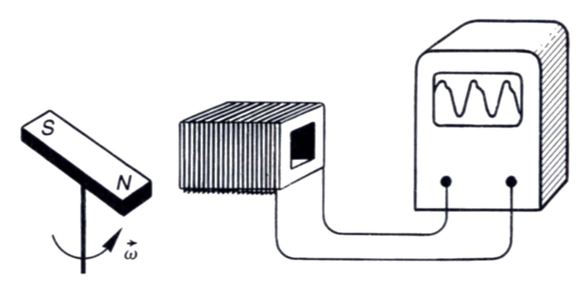


6. Schéma d'un transformateur : deux bobines sont réunies par une carcasse de fer.

- **Auto-induction :** nous en verrons les manifestations dans la suite de ce chapitre.

- **Principe de l'alternateur :** la figure 7 montre un aimant permanent tournant à vitesse angulaire constante devant une bobine. L'oscillographe montre que la bobine est le siège d'une faculté électromotrice périodique : le flux reçu par la bobine varie périodiquement, sa période est égale à celle de la rotation, donc la faculté électromotrice a aussi la même période.

L'alternateur et le transformateur sont très importants pour la production et le transport de l'énergie électrique. Nous y reviendrons dans le prochain chapitre.



7. Principe d'un alternateur. En faisant tourner un aimant à la vitesse angulaire ω devant une bobine, il apparaît dans celle-ci une f.é.m. de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2. Intensité et tension efficaces.

a) Effet Joule produit par un courant sinusoïdal. Intensité efficace.

Soit une résistance parcourue par l'intensité $i = I_m \cos \omega t$.

- La puissance instantanée dans cette résistance vaut :

$$p = Ri^2 = RI_m^2 \cos^2 \omega t \,.$$

Elle est donc variable.

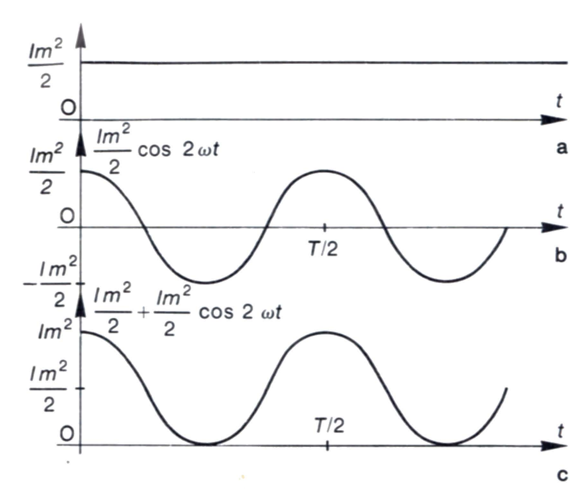
Par contre, entre les dates t et $t + dt$, on peut considérer que $p(t)$ ne varie pas si dt est infiniment petit ; l'énergie dissipée par l'effet Joule pendant ce court laps de temps s'écrit alors :

$$dW = p(t)\, dt = Ri^2\, dt \,.$$

Entre la date origine et la date t, on a alors :

$$W_0^t = \Sigma Ri^2\, dt = \int_0^t Ri^2\, dt \,.$$

- La même énergie peut être dissipée dans la même résistance R pendant le même temps par un **courant continu** d'intensité I convenable que nous appelerons intensité efficace.



8a. Pour la construction de la figure 8c.

8b. Pour la construction de la figure 8c.

8c. Représentation, au cours du temps, de la fonction
$$i^2 = I_m^2 \cos^2 \omega t = \frac{I_m^2}{2} + \frac{I_m^2}{2} \cos 2\,\omega t.$$

Par définition cette intensité I est appelée **intensité efficace** du courant sinusoïdal.

On doit avoir :

$$RI^2\,t = \int_0^t Ri^2\,dt, \quad \text{ou} \quad I^2\,t = \int_0^t i^2\,dt.$$

Transformons l'expression de i^2 :

$$i^2 = I_m^2 \cos^2 \omega t = \frac{I_m^2}{2} + \frac{I_m^2}{2} \cos 2\,\omega t.$$

C'est la somme d'un terme constant et d'une fonction sinusoïdale de période $T/2$ moitié de la période T du courant i.
Les figures 8a et 8b représentent ces deux termes au cours du temps.
On en déduit la représentation de i^2 au cours du temps sur la figure 8c : c'est une fonction périodique de période $T/2$; donc il nous suffit de calculer $\int i^2 dt$ sur une durée égale à $T/2$.
On sait que $\int i^2\,dt$ est l'aire comprise entre la courbe 8c et l'axe des t, ou la somme des aires algébriques comprises entre les courbes 8a et 8b et leurs axes des t.
On trouve :

$$\int_t^{t+T/2} \frac{I_m^2}{2} \cdot dt = \frac{I_m^2}{2} \cdot \frac{T}{2} \qquad \text{(aire d'un rectangle)}$$

$$\int_t^{t+T/2} \frac{I_m^2}{2} \cos 2\,\omega t \,.\, dt = 0$$

(car sur cet intervalle on trouve deux aires égales mais pour l'une $\cos 2\,\omega t$ est positif tandis que pour l'autre il est négatif).
On a donc :

$$I^2 \cdot \frac{T}{2} = \int_t^{t+T/2} i^2\,dt = \frac{I_m^2}{2} \cdot \frac{T}{2},$$

$$I^2 = \frac{I_m^2}{2} \qquad \boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}\,.$$

L'intensité efficace d'un courant sinusoïdal est égale au quotient de son intensité maximale par $\sqrt{2}$.

Un courant sinusoïdal d'intensité maximale I_m produit, en un temps donné, dans une résistance donnée, le même effet Joule qu'un courant continu de valeur $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$; I est la valeur efficace du courant sinusoïdal.

• **Remarque :** si sur un appareil de chauffage, une prise de courant, un interrupteur, vous trouvez une indication d'intensité, il s'agit d'intensité efficace.

• **Rappel :** insistons sur les notations : nous employons i pour l'intensité **instantanée** variable, I_m pour sa valeur **maximale,** I pour sa valeur **efficace.**

b) Tension efficace.

• **Définition.**
Soit une tension sinusoïdale $u = U_m \cos \omega t$.
Sa tension efficace est :

$$\boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}} \ .$$

Elle s'exprime en volts.

• **Signification physique :** reprenons d'une autre façon le calcul de l'effet Joule entre les dates 0 et T :

$$p(t) = Ri^2 .$$

Mais d'après la loi d'Ohm, $u = Ri$, d'où :

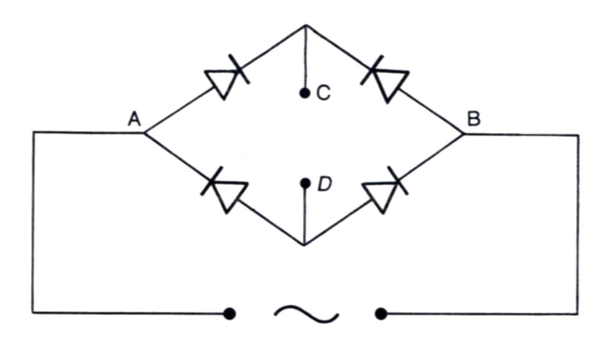
la puissance variable est $\quad p(t) = \dfrac{u^2}{R}$.

$$\text{Donc} \quad W_0^T = \int_0^T \frac{u^2}{R}\, dt .$$

Si $\dfrac{U^2}{R}\, T = \displaystyle\int_0^T \frac{u^2}{R}\, dt$, la tension U constante appliquée à la résistance R pendant le même temps T produira le même effet Joule que la tension variable u : cette équivalence d'effet nous donne la signification physique de la tension efficace.
On a donc :

$$U^2\, T = \int_0^T U_m^2 \cos \omega t \; dt$$

ce qui nous conduit à : $\quad U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$.



9. Pont de diodes. Si on branche une tension sinusoïdale entre A et B, il passera un courant redressé dans le circuit placé entre C et D, qui est par exemple le cadre mobile d'un ampèremètre.

La plupart des appareils de mesure en courant continu peuvent être utilisés en courant alternatif à condition de leur associer un pont redresseur et de les étalonner.

• **Remarques.**

— Lorsque l'on dit que la tension du secteur est de 220 V il s'agit d'une tension efficace.

— Nos notations sont les suivantes : u pour la valeur instantanée de la tension, U_m pour sa valeur maximale, U pour sa valeur efficace.

c) Mesure des grandeurs efficaces.

• On peut utiliser l'oscillographe (voir la partie II de ce chapitre) ; citons ici les appareils les plus courants : les appareils électromagnétiques à redresseur.

• **Ampèremètre électromagnétique à redresseur :** vous savez qu'un circuit parcouru par un courant d'intensité i, et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ indépendant du temps, subit des actions proportionnelles à $|\vec{B}|$ et à i (chapitre 9).

Si l'intensité i est sinusoïdale, ces actions le sont aussi, le circuit se met à vibrer mécaniquement, ce qui est sans intérêt.
Néanmoins si le courant est redressé avant de passer dans le circuit (figure 9), celui-ci subit des actions (un couple par exemple) de sens constant et de module proportionnel à l'intensité maximale du courant.
En appliquant aussi au circuit des actions de rappel élastique (ressort spiral par exemple) le circuit prendra une position d'équilibre dépendant de l'intensité maximale du courant : c'est ce qui se passe par exemple dans un ampèremètre à cadre mobile où le cadre est le circuit décrit ci-dessus (voir chapitre 9 page 154).

• **Voltmètre électromagnétique à redresseur :** on l'obtient en plaçant une forte résistance en série avec le cadre de l'appareil décrit ci-dessus (voir le cours de la classe de Seconde, voir aussi page 291 de ce chapitre).

II. Étude expérimentale du comportement de quelques dipôles.

Nous allons voir maintenant comment se comportent quelques dipôles simples : résistance, condensateur, inductance, en régime sinusoïdal forcé.

1. Loi d'Ohm pour une résistance.

• La loi d'Ohm reste valable de façon instantanée :

$$\boxed{u(t) = Ri(t)}.$$

• **1re conséquence.**

L'intensité qui parcourt une résistance est **en phase avec la tension** entre ses bornes :

en effet si $u = U_m \cos \omega t$, on a : $i = \dfrac{U_m}{R} \cos \omega t$.

Cette propriété est utilisée dans les études à l'oscillographe : en effet celui-ci est sensible aux tensions donc, si l'on veut étudier les variations d'une intensité en fonction du temps, on la fait passer dans une résistance R et on étudie la tension u entre ses bornes qui lui est à chaque instant proportionnelle (voyez les montages du chapitre précédent et ceux qui vont suivre dans ce chapitre).

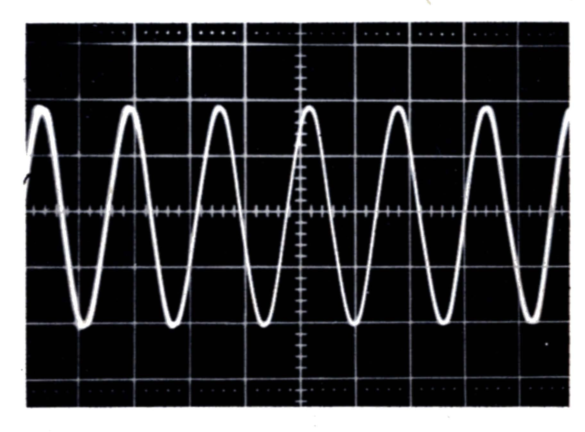
La tension aux bornes d'une résistance pure parcourue par un courant sinusoïdal est en phase avec l'intensité du courant qui traverse la résistance.

• **2e conséquence.**

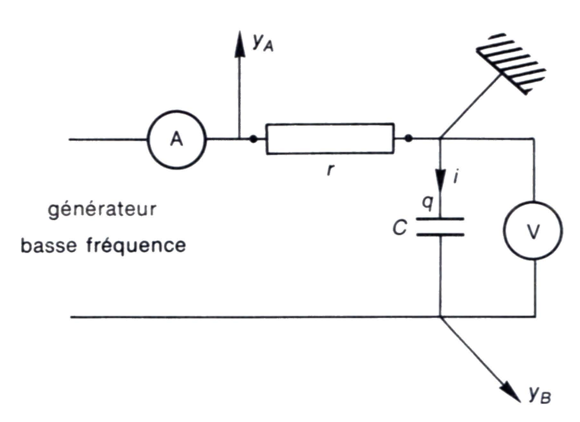
$$U_m = RI_m.$$

Grâce à cette relation :
— un ampèremètre peut être transformé en voltmètre (revoyez le cours de Seconde) ;
— un oscillographe étalonné en tension peut servir à déterminer une intensité si on utilise une résistance étalon : on déduit I_m de la mesure de la tension crête à crête (photo 10).

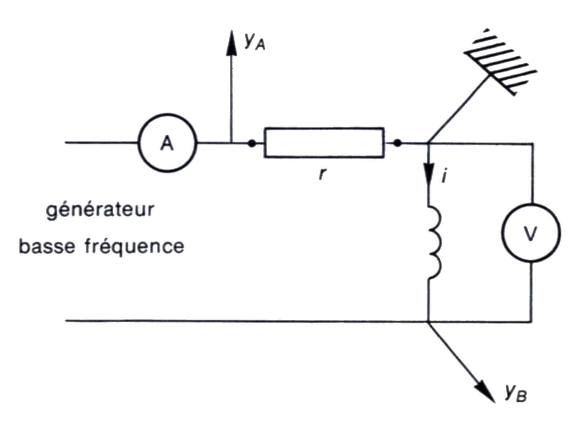
• **Remarque :** nous ne vérifierons pas les lois : u_R en phase avec i, et $U_m = RI_m$, puisque nos appareils sont construits en admettant ces lois.



10. Mesure d'une tension et d'une intensité à l'oscillographe. La sinusoïde représente la tension aux bornes d'une résistance de 10 Ω. La sensibilité de l'oscillographe est de 2 V/cm d'ordonnée. On en déduit $U_m = 4$ V puis $I_m = 0{,}4$ A.



11. Condensateur.
L'oscillographe montre le passage d'un courant sinusoïdal dans le circuit du condensateur. Si à une fréquence donnée on fait varier U, le rapport $\frac{U}{I}$ (donc $\frac{U_m}{I_m}$) est constant ; par contre il diminue quand la fréquence augmente.



12. Inductance.
L'oscillographe montre le passage d'un courant périodique (pas toujours sinusoïdal) dans le circuit de l'inductance.

A une fréquence donnée, le rapport $\frac{U}{I}$ est constant quand U varie ; par contre ce rapport augmente avec la fréquence.

2. Étude expérimentale du condensateur et de l'inductance.

a) Existence d'un courant sinusoïdal.

• **Condensateur :** le montage de la figure 11 montre un condensateur soumis à une tension sinusoïdale. On peut faire les constatations suivantes :

— l'ampèremètre indique le passage d'un courant ;

— l'oscillographe montre que ce courant est sinusoïdal : pour cela on le branche aux bornes de la résistance r où l'on trouve $u_r = ri$; en branchant l'oscillographe aux bornes du condensateur, on peut voir ainsi que les courbes $i(t)$ et $u_C(t)$ ont même période et même forme.

— Par contre si l'on remplace le générateur de courant alternatif par un générateur continu, on constate qu'au bout d'un court instant le condensateur est sous tension, il s'est chargé, et l'intensité du courant est alors nulle.

• **Inductance :** grâce au montage de la figure 12b on peut faire les constatations suivantes :

— il passe un courant dans l'inductance ;

— la courbe $i(t)$ de l'intensité de ce courant est **généralement déformée** par rapport à celle de la tension $u_L(t)$ appliquée, bien qu'elles aient toutes deux la même période : ces déformations se produisent si le noyau de fer de la bobine employée est trop important, s'il n'est pas feuilleté..., bref, si l'environnement du circuit est particulier.
Dans ce qui suit **nous nous placerons dans les conditions où le courant** qui traverse l'inductance **est bien sinusoïdal ;** nous verrons que cela correspond au cas où le coefficient d'auto-inductance L **est bien déterminé et constant.**

— Si l'on emploie un générateur de courant continu et qu'on applique à l'inductance une tension égale à la tension efficace du courant alternatif utilisé précédemment (même indication du voltmètre), un courant continu passe dans la bobine, et il a une intensité beaucoup plus grande qu'en régime sinusoïdal : tout se passe comme si, en régime sinusoïdal, l'inductance « possédait alors une plus grande résistance ».

b) Proportionnalité entre intensité efficace et tension efficace : impédance.

• **Condensateur :** reprenons le montage de la figure 11 ; on constate que :

— le rapport $\frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$ ne varie pas quand on modifie U à fréquence constante ;
— la valeur de ce rapport diminue quand on augmente la capacité C à fréquence constante ;
— la valeur de ce rapport diminue quand on augmente la fréquence donc la pulsation ω du courant.

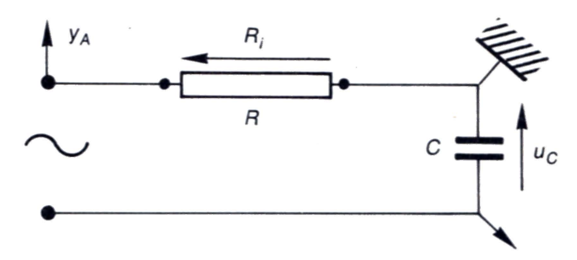
• **Inductance :** avec le montage de la figure 12 on peut constater que :
— $\frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$ est indépendant de la valeur de U à fréquence constante ;
— la valeur de ce rapport augmente avec celle de l'inductance L ;
— la valeur de ce rapport augmente avec celle de la fréquence ou de la pulsation ω.

• **Impédance d'un dipôle :**
c'est le rapport $Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$ entre la tension efficace aux bornes du dipôle et l'intensité efficace du courant qui le traverse. L'impédance s'exprime en ohms (Ω), comme une résistance (volt par ampère). On remarquera que, pour une résistance, le rapport $\frac{U}{I}$ ne dépend pas de la fréquence.

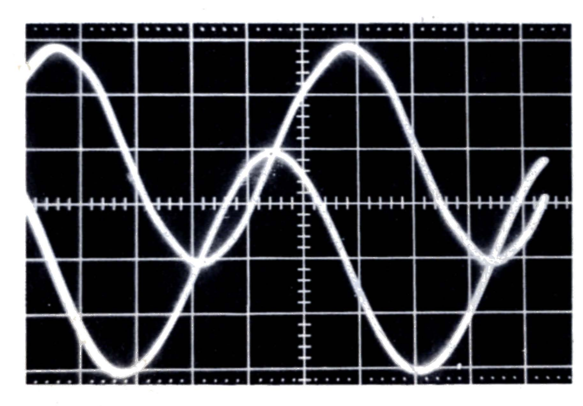
c) Déphasage entre intensité et tension instantanées.

• Condensateur : avec le montage de la figure 13a on compare à l'oscillographe $u_C(t)$ et l'intensité $i(t)$ dans le circuit du condensateur. La photo 13b montre que :

— **l'intensité** dans le circuit d'un condensateur **est en quadrature avance sur la tension,** c'est-à-dire présente une avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension.

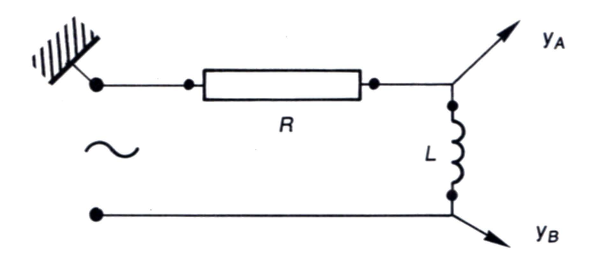


13a. Condensateur : étude du déphasage intensité-tension. La nécessité de brancher la masse entre R et C fait que les signaux envoyés sur l'oscillographe sont u_C et $-Ri$.
Remarque : sur certains oscillographes on peut changer le signe d'un signal sur une des voies : on peut alors avoir sur l'écran les courbes $u_C(t)$ et $Ri(t)$.

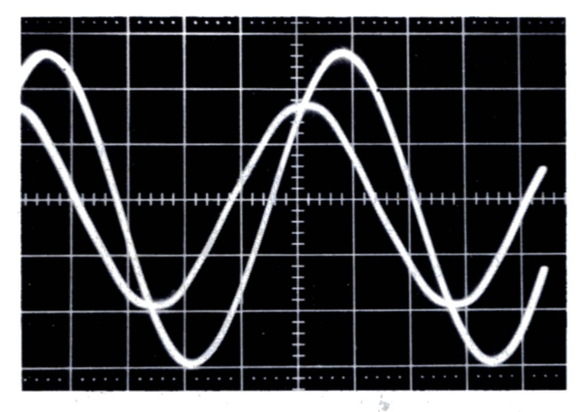


13b. Condensateur : i est en quadrature avance sur u_C (parce que $-Ri$, courbe supérieure, est en quadrature retard sur u_C, courbe inférieure).

Pour une fréquence donnée du courant sinusoïdal, l'intensité qui traverse et la tension aux bornes d'un condensateur, d'une inductance, d'une résistance ou d'un dipôle constitué par leur association, ont des valeurs efficaces proportionnelles : le rapport $\frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = Z$ est l'impédance du dipôle.



14a. Inductance L associée à une résistance R : étude du déphasage intensité-tension. Les signaux envoyés sur l'oscillographe sont u_L et Ri.



14b. Inductance : l'intensité i (courbe d'amplitude la plus grande) est en retard de phase sur la tension u_L.

En régime sinusoïdal, l'intensité instantanée à travers un dipôle et la tension instantanée aux bornes, ne sont généralement pas en phase, sauf dans le cas d'une résistance pure (et de certains montages).

• **Inductance :** avec le montage 14a on compare $u_L(t)$ et $i(t)$.
La photo 14b montre que l'intensité dans une inductance est en retard de phase sur la tension entre ses bornes.

• **En résumé : à l'exception de la résistance,**

— intensité et tension instantanées dans un dipôle ne sont généralement pas en phase ;
— le rapport tension sur intensité efficaces, appelé impédance, dépend de la fréquence du courant.
L'étude théorique qui va suivre nous permettra d'expliquer ces faits expérimentaux.

III. Étude théorique.

Nous allons voir maintenant les méthodes de calcul de l'intensité dans un dipôle électrique dont on connaît les composants et auquel on applique une tension sinusoïdale donnée.

1. Relations instantanées entre intensités et tensions.

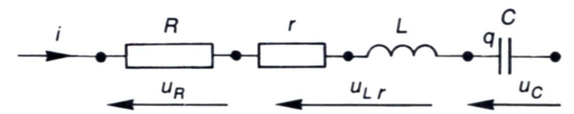
a) Rappels de conventions et de lois.

Mettons en série quelques dipôles simples, une résistance R, une bobine de résistance r et d'inductance L, un condensateur (figure 15). La flèche sur le circuit indique le sens positif des intensités i. On appelle charge q du condensateur celle de **l'armature par laquelle on entrerait** dans le condensateur en circulant dans le sens positif du courant.

On a ainsi $u_C = \dfrac{q}{C}$ et $i = \dfrac{dq}{dt}$ (voir chapitre précédent), ou $q = \displaystyle\int i dt$.

Aux bornes d'un générateur $u = ri - e$; aux bornes de la bobine on a donc $u_{Lr} = ri + L\dfrac{di}{dt}$ puisque la f.é.m. d'induction vaut $e = -L\dfrac{di}{dt}$.

$$\boxed{u_R = Ri\,, \quad u_{Lr} = ri + L\frac{di}{dt}, \quad u_C = \frac{q}{C}}\,.$$



15. Conventions et lois instantanées.

$u_R = Ri$, $u_{Lr} = ri + L\dfrac{di}{dt}$, $u_C = \dfrac{q}{C}$ et $i = \dfrac{dq}{dt}$.

b) Relations instantanées en régime forcé, figures 16a-16b-16c.

Appliquons séparément à chaque dipôle la même tension $u = U_m \cos \omega t$.

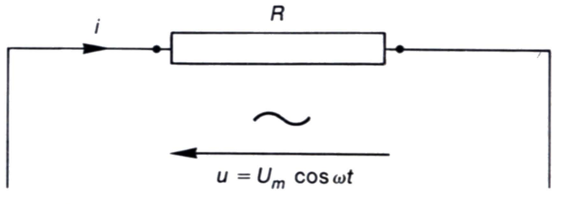
Cas de la résistance $\qquad Ri = U_m \cos \omega t\,,$

cas du condensateur $\qquad ri + L\dfrac{di}{dt} = U_m \cos \omega t\,,$

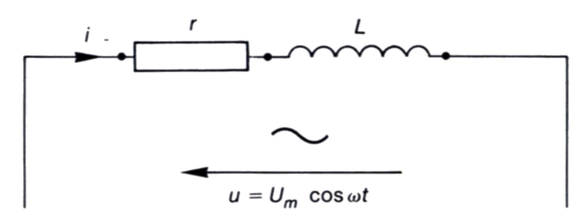
cas du condensateur $\qquad \dfrac{q}{C} = \displaystyle\int i dt = U_m \cos \omega t\,.$

Il s'agit maintenant de déterminer $i(t)$ dans chaque cas. On est en régime sinusoïdal, i est donc de la forme :

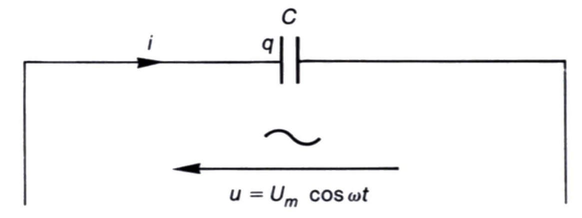
$$i = I_m \cos(\omega t - \varphi)\,.$$



16a. $Ri = U_m \cos \omega t$



16b. $ri + L\dfrac{di}{dt} = U_m \cos \omega t.$



16c. $\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i dt = U_m \cos \omega t.$

Pour des raisons qui n'apparaîtront pas ici, nous utiliserons la notation habituelle consacrée par l'usage, $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ alors que $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ conviendrait aussi.
φ est appelé le **retard de *i* sur *u*,** c'est donc aussi **l'avance de *u* sur *i*.**
Nous allons exposer successivement deux méthodes de détermination de I_m et φ : la méthode de Fresnel et la méthode des nombres complexes.

2. Calcul de l'intensité par la méthode de Fresnel.

a) Principe de la méthode.

• Toute fonction sinusoïdale $x = a \cos(\omega t - \varphi)$ peut être considérée comme la projection sur l'axe des x d'un **vecteur de Fresnel** $\overrightarrow{OA}$ de norme a, d'origine O, appartenant au plan de figure et faisant avec l'axe Ox l'angle $(\widehat{Ox, OA}) = \omega t - \varphi$: ce vecteur tourne à la vitesse angulaire ω (figure 17).
$\overrightarrow{OA}$ est le **vecteur de Fresnel associé** à la fonction x.

• Dérivons x par rapport au temps.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t - \varphi) = a\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OA'}$ associé à la fonction $\dot{x}$ se déduit de $\overrightarrow{OA}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ accompagnée d'une multiplication par ω de la norme a.

• Inversement : $\int x dt = \frac{a}{\omega} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OA''}$:
il se déduit de $\overrightarrow{OA}$ par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ accompagnée d'une division par ω de la norme a.

• Une égalité algébrique entre deux sommes de fonctions sinusoïdales se traduit par une égalité entre deux sommes géométriques de vecteurs de Fresnel.

17. Le vecteur tournant $\overrightarrow{OA}$ « représente » la fonction $x = a \cos(\omega t - \varphi)$ car la projection de A sur Ox a cette abscisse.
$\overrightarrow{OA'}$ représente $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.
$\overrightarrow{OA''}$ représente $\int x dt$.

La norme d'un vecteur de Fresnel représente l'amplitude de la fonction sinusoïdale associée ; la position angulaire du vecteur donne la phase de la fonction sinusoïdale.

b) Quelques applications de la méthode.

Appliquons la méthode à quelques exemples.

- **Résistance inductive :**

$$ri + L\frac{di}{dt} = U_m \cos \omega t \qquad i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

donc : $rI_m \cos(\omega t - \varphi) + L\omega I_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cos \omega t$

égalité qui se traduit vectoriellement par la figure 18, dont on tire :

$$r^2 I_m^2 + L^2 \omega^2 I_m^2 = U_m^2$$

d'où $$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}$$

et $$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{r}$$

ou $$\cos \varphi = \frac{rI_m}{U_m} = \frac{rI_m}{ZI_m}, \quad \boxed{\cos \varphi = \frac{r}{Z}}.$$

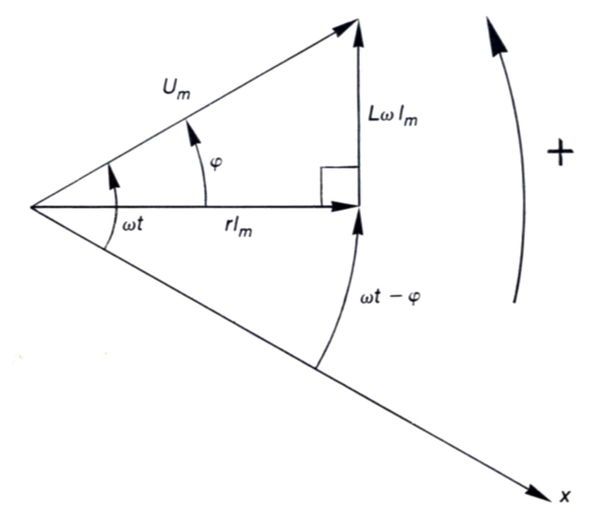
Comme on a posé $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, φ est le retard de i sur u, donc : l'intensité i dans une inductance est en retard sur la tension. Ce retard varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ quand $\frac{L\omega}{r}$ varie de zéro à l'infini.

- **Cas particulier d'une inductance pure :** $r = 0$, donc le courant est en quadrature retard sur la tension qui est $L\frac{di}{dt}$; elle provient uniquement de la f.é.m. d'auto-induction.

- **Résistance en série avec un condensateur.**

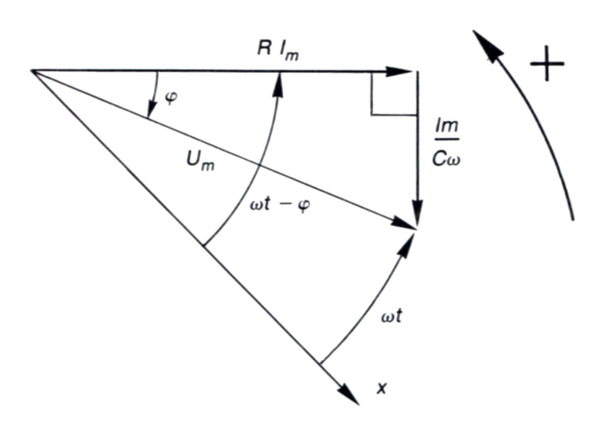
$$Ri + \frac{1}{C}\int i dt = U_m \cos \omega t, \quad i = I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

D'où : $RI_m \cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{C\omega} I_m \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cos \omega t$



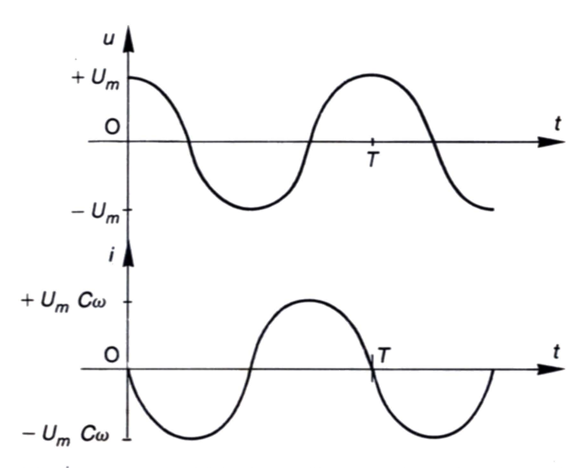
18. Résistance inductive : le schéma de Fresnel est la traduction vectorielle d'une égalité entre fonctions sinusoïdales. L'intensité est en retard sur la tension : en effet ri est en retard sur u et il faut se rappeler que i est en phase avec ri.

La tension aux bornes d'une inductance est en avance de phase sur l'intensité du courant sinusoïdal qui la traverse.



19. Condensateur et résistance en série. L'intensité est en avance sur la tension.

La tension aux bornes d'un condensateur est en quadrature retard sur le courant de charge sinusoïdal.



20. Charges et décharges d'un condensateur : quel que soit le signe de la charge *q*, elle augmente quand *i* est positif, diminue quand *i* est négatif ; *i* est en quadrature avance sur *u*.

égalité qui se traduit vectoriellement par la figure 19 dont on tire :

$$R^2 I_m^2 + \frac{I_m^2}{C^2 \omega^2} = U_m^2$$

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$$

$$\text{tg}\,(-\varphi) = \frac{1}{RC\omega}, \qquad \boxed{\text{tg}\,\varphi = -\frac{1}{RC\omega}},$$

ou

$$\cos\varphi = \frac{RI_m}{U_m}, \qquad \boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z}}.$$

• **Condensateur seul.**

— On peut faire tendre R vers zéro dans les expressions précédentes d'où :

$$Z = \frac{1}{C\omega}, \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Donc i est en quadrature avance sur u aux bornes d'un condensateur seul.

— On peut aussi écrire :

$$u = U_m \cos \omega t$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt} = U_m C\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

D'où :

$$I_m = U_m C\omega, \quad Z = \frac{1}{C\omega}.$$

On retrouve encore que i est en quadrature avance sur u.

La figure 20 représente $u(t)$ et $i(t)$. On voit que $q = Cu$ diminue de zéro à $\frac{T}{2}$ puisque i est constamment négatif pendant cet intervalle de temps ; q passe par son minimum $-CU_m$ à la date $\frac{T}{2}$; puis de $\frac{T}{2}$ à T, i est constamment positif, q augmente pour passer par son maximum $+CU_m$ à la date T... Le « **courant dans le condensateur** » **ne le traverse pas,** il sert à le charger puis à le décharger périodiquement.

3. Calcul de l'intensité par la méthode des nombres complexes.

a) Principe de la méthode.

Soit j le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$; contrairement à la coutume en usage en mathématiques ($i^2 = -1$) nous appelons ce nombre j pour éviter des confusions avec l'intensité i.

$$\text{On sait que} \quad e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$ae^{j\omega t} = a(\cos \omega t + j \sin \omega t).$$

De plus
$$\frac{d}{dt}(ae^{j\omega t}) = j\omega a e^{j\omega t}$$

$$\int ae^{j\omega t}\,dt = \frac{a}{j\omega} e^{j\omega t}.$$

D'où la méthode : à chaque fonction $a \cos \omega t$, associons une fonction exponentielle complexe $ae^{j\omega t}$; **$a \cos \omega t$ en est la partie réelle.**

Utilisons la commodité de dérivation de la fonction exponentielle complexe pour traduire une équation électrique instantanée : comme on va le voir, on en tire les mêmes renseignements que par la méthode de Fresnel.

b) Quelques applications de la méthode.

Appliquons la méthode à quelques exemples.

- **Résistance inductive :**

$ri + L\dfrac{di}{dt} = U_m \cos \omega t$, $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ se traduisent en complexes

par :
$$rI_m e^{j(\omega t - \varphi)} + jL\omega I_m e^{j(\omega t - \varphi)} = U_m e^{j\omega t}$$

$$e^{j\omega t}(r + jL\omega) I_m e^{-j\varphi} = U_m e^{j\omega t}$$

$$(r + jL\omega) = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi}$$

$$\frac{U_m}{I_m}(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r + jL\omega.$$

Cette relation complexe équivaut à deux relations réelles :

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{r^2 + L^2\omega^2} \quad \text{(égalité des modules)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{r} \quad \text{(égalité des arguments)}.$$

• **Résistance en série avec un condensateur.**

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = U_m \cos \omega t \quad \text{et} \quad i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$RI_m\, e^{j(\omega t - \varphi)} + \frac{1}{jC\omega} I_m\, e^{j(\omega t - \varphi)} = U_m\, e^{j\omega t}$$

$$\left(R - \frac{j}{C\omega}\right) I_m\, e^{-j\varphi} = U_m$$

$$\frac{U_m}{I_m}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R - \frac{j}{C\omega}.$$

D'où : $$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{RC\omega}.$$

• **Remarque :** dans la méthode de Fresnel (figure 21) :
$a \cos \omega t$ est la projection sur Ox du vecteur $\overrightarrow{OA}$,
$a \sin \omega t$ en est la projection sur Oy.
Dans la méthode des nombres complexes :

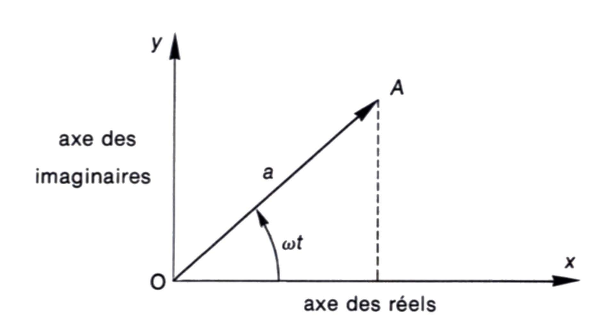
$$ae^{j\omega t} = a\cos\omega t + ja\sin\omega t$$

$a \cos \omega t$ est la partie réelle de $ae^{j\omega t}$,

$a \sin \omega t$ en est la partie imaginaire.

Conclusion :

En conséquence, si l'on considère que le plan de Fresnel est un plan complexe, d'axe des réels Ox, et d'axe des imaginaires Oy, $ae^{j\omega t}$ apparaît alors comme l'affixe de l'extrémité A du vecteur $\overrightarrow{OA}$.



21. Méthode de Fresnel et méthode des complexes : l'affixe de l'extrémité A du vecteur $\overrightarrow{OA}$ est $ae^{j\omega t}$; tous deux servent à représenter la fonction $a \cos \omega t$.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- Un courant est sinusoïdal si son intensité est de la forme $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$. Il produit en moyenne le même effet Joule qu'un courant continu d'intensité $I =$ └──────┘ que l'on appelle intensité └──────┘ du courant sinusoïdal.
- La tension aux bornes d'une résistance R est └──────┘ avec l'intensité du courant. Sa valeur maximale vaut $U_m =$ └──────┘.
- La tension aux bornes d'un condensateur de capacité C est en └──────┘ de phase de └──────┘ sur l'intensité. Sa valeur maximale vaut $U_m =$ └──────┘.
- La tension aux bornes d'une inductance L de résistance R est en └──────┘ de phase sur l'intensité. Sa valeur maximale vaut $U_m =$ └──────┘.
- L'impédance d'un dipôle est le rapport $Z =$ └──────┘ ; elle vaut R pour une résistance, └──────┘ pour un condensateur.

Petites questions.

1. Combien le déphasage entre tension et intensité vaut-il pour une résistance ?

2. Comment l'impédance d'un condensateur évolue-t-elle avec la fréquence ?

3. Comment l'impédance d'une bobine évolue-t-elle avec la fréquence ?

4. Aux bornes d'un condensateur, la tension est-elle en avance ou en retard sur l'intensité, et de combien ?

Applications immédiates.

5. Sur une tension sinusoïdale 50 Hz, 220 V efficaces, on branche une résistance de 100 Ω : calculez l'intensité efficace qui traverse la résistance. Calculez la valeur maximale de l'intensité instantanée.

6. Mêmes questions si l'on remplace la résistance par un condensateur de capacité 10 μF.

7. Calculez l'inductance d'une bobine de résistance négligeable ayant une impédance de 100 Ω pour une fréquence de 50 Hz. Calculez de même la capacité d'un condensateur d'impédance 100 Ω à 50 Hz.

8. On met en série un ampèremètre d'impédance négligeable et un condensateur et on applique à l'ensemble une tension sinusoïdale. On place alors un deuxième condensateur identique en parallèle avec le premier. Comment varie l'indication de l'ampèremètre ?

Approfondissement.

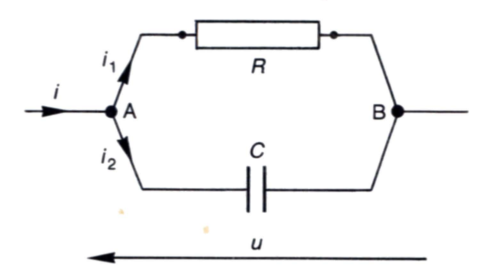
9. On mesure la tension aux bornes d'une bobine et l'intensité qui la traverse, d'abord en courant continu, ensuite en courant sinusoïdal 50 Hz. On trouve successivement $I = 0{,}1$ A pour $U = 12$ V en continu, puis $I' = 0{,}08$ A pour $U' = 24$ V en alternatif. Calculez la résistance R et le coefficient d'inductance L de cette bobine.

Réponses : $R = 120\ \Omega$, $L = 0{,}87$ H.

10. On branche une résistance $R = 300\ \Omega$ en série avec un condensateur de capacité 10 μF, et on applique à l'ensemble une tension $u = 220 . \sqrt{2} . \cos \omega t$ de fréquence 50 Hz. Quelle est la valeur numérique de ω ? Quelle est l'expression de l'intensité instantanée qui parcourt le circuit ? On branche un voltmètre aux bornes de la résistance puis du condensateur : quelles sont ses indications successives ?

Réponses :
$i = 0{,}503 . \sqrt{2} . \cos(\omega t + 0{,}814)$,
$U_R = 151$ V, $U_C = 160$ V.

11 Un circuit formé de deux branches en dérivation est soumis à une tension alternative ; l'intensité efficace du courant dans la branche supérieure vaut $I_1 = 1$ A ; dans la branche inférieure elle vaut $I_2 = 0{,}5$ A et l'intensité i_2 est en avance de $\pi/2$ sur i_1.



Par une construction de Fresnel appliquée aux intensités, traduisez la relation instantanée $i = i_1 + i_2$ qui donne la valeur du courant principal ; calculez sa valeur efficace et son déphasage par rapport à i_1.
Montrez que la situation ainsi décrite correspond au circuit ci-dessus avec $R = 100\ \Omega$, $C = 15{,}9$ μF, $U = 100$ V.
Définissez et calculez numériquement l'impédance du dipôle AB.

Réponses : $I = 1{,}12$ A, i est en avance de 0,46 rd sur i_1, $Z = 89{,}3\ \Omega$.

12 Montrez que deux inductances pures L_1 et L_2 se comportent comme une seule inductance pure : **a)** de valeur $L = L_1 + L_2$ si on les place en série ; **b)** de valeur $L' = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ si on les place en dérivation.



Poste de transformation E.D.F. (tension de départ en ligne : 400 kV, puissance 300 MVA).

16 Circuits en régime sinusoïdal forcé.

I. Le circuit « *RLC* » série.

1. Intensité dans le circuit soumis à une tension alternative.
2. La résonance du circuit « *RLC* » série.

II. Puissance. Facteur de puissance.

1. Puissance instantanée en régime sinusoïdal.
2. Puissance moyenne ; facteur de puissance.
3. Applications.

Nous nous proposons d'étudier d'abord une association de composants déjà connus, le « circuit RLC série », lorsqu'on lui applique une tension sinusoïdale.
Nous passerons ensuite à l'étude des phénomènes énergétiques qui apparaissent dans un circuit parcouru par un courant sinusoïdal.

I. Le circuit « *RLC* » série.

1. Intensité dans le circuit soumis à une tension sinusoïdale.

Mettons une résistance, une bobine et un condensateur en série ; soit R la résistance totale, y compris celle de la bobine ; soit L l'inductance de la bobine ; soit C la capacité du condensateur. Nous avons constitué ce que nous appellerons désormais le « circuit RLC série ».
Appliquons à l'ensemble la tension sinusoïdale $u = U_m \cos \omega t$ (figure 1).
Calculons l'intensité i qui parcourt le circuit. A un instant donné on a :

$$u_{AB} + u_{BD} + u_{DE} = u$$

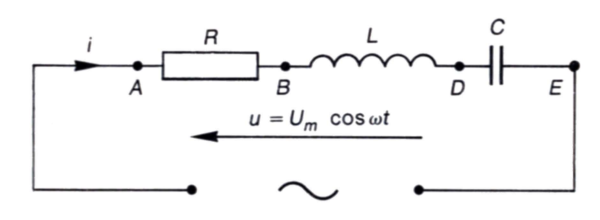
soit

$$\boxed{Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = U_m \cos \omega t} .$$

En régime forcé, $i = I_m \cos (\omega t - \varphi)$, d'où :

$$RI_m \cos (\omega t - \varphi) + L\omega I_m \cos (\omega t - \varphi + \pi/2) + \frac{I_m}{C\omega} \cos (\omega t - \varphi - \pi/2)$$

$$\boxed{= U_m \cos \omega t .}$$



1. Circuit *RLC* série.

Pour déterminer I_m et φ (retard de i sur u) nous utiliserons successivement la méthode de Fresnel et la méthode des nombres complexes.

a) Méthode de Fresnel.

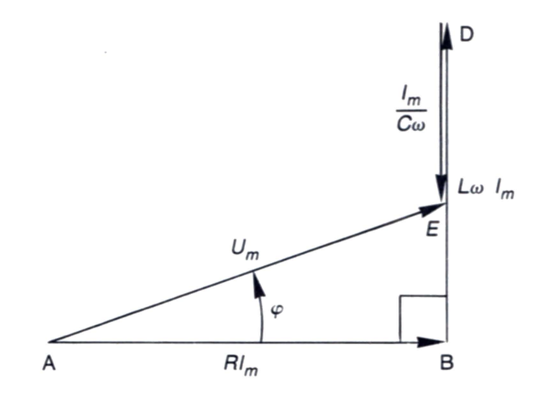
• L'égalité ci-dessus se traduit vectoriellement par la figure 2 dont on tire :

$$R^2 I_m^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 I_m^2 = U_m^2$$

Soit :

$$\boxed{Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}} \qquad \cos\varphi = \frac{RI_m}{U_m} = \frac{RI_m}{ZI_m} \qquad \boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z}}.$$



2. Graphique de Fresnel du circuit *RLC* série.

Pour un dipôle *RLC* série, le déphasage courant-tension peut être positif, négatif, ou même nul, suivant les valeurs de l'inductance *L* et de la capacité *C*.

• **Discussion :**

Si l'inductance est prépondérante, c'est-à-dire si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$, φ est positif, donc ***i* est en retard de phase sur *u*.**

Si la capacité est prépondérante, c'est-à-dire si $L\omega < \frac{1}{C\omega}$, φ est négatif, donc ***i* est en avance de phase sur *u*.** La figure 2 a été faite dans le cas d'un circuit à inductance prépondérante. On pourra aussi avoir *i* en phase avec *u* si $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ (voir plus loin).

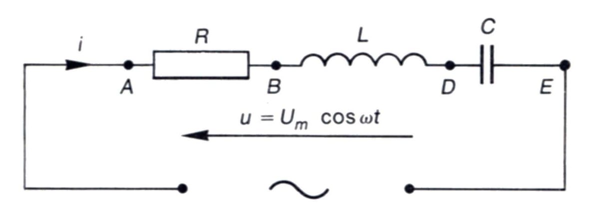
b) Méthode des nombres complexes.

En associant à la tension *u* la fonction complexe $U_m e^{j\omega t}$, et à l'intensité *i* la fonction complexe $I_m e^{j(\omega t - \varphi)}$, la relation (1) s'écrit :

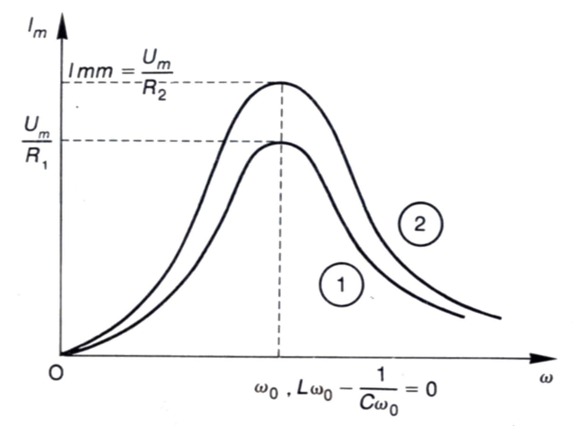
$$\left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) I_m e^{j\omega t} e^{-j\varphi} = U_m e^{j\omega t}$$

$$\frac{U_m}{I_m}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right).$$

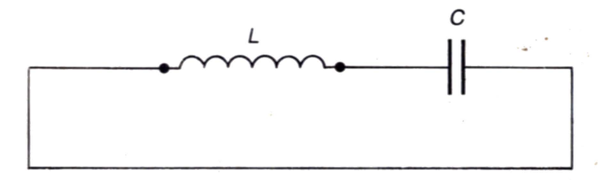
D'où l'on tire : $Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$



3. Circuit *RLC*.



4. Circuit *RLC* : courbe de réponse en intensité. La réponse maximale a toujours lieu pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. La courbe 2 correspond à une résistance plus faible que pour la courbe 1.



5. Oscillateur *LC*. Sa pulsation propre vaut $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

2. La résonance du circuit « *RLC* » série.

Donnons-nous un circuit *RLC* série (figure 3) et étudions son comportement en régime sinusoïdal forcé sous l'effet d'une tension u **d'amplitude U_m constante** mais dont la **pulsation ω prend différentes valeurs.**

Nous avons trouvé $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$, $\quad \text{tg}\, \varphi = \dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$.

a) Variation de l'intensité en fonction de la pulsation de la tension.

• **Tableau de variations :** il résume les variations de Z, $I_m = \frac{U_m}{Z}$, tg φ et φ lorsque la pulsation ω du générateur varie.

$L\omega - \frac{1}{C\omega}$ s'annule pour $\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. On a donc :

ω	0	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	∞
Z	∞ ↘	R	↗ ∞
I_m	0 ↗	$\frac{U_m}{R}$	↘ 0
tg φ	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$
φ	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0	↗ $+\frac{\pi}{2}$

• **Courbe de réponse en intensité :** on peut calculer $I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ pour toute valeur de ω et tracer la courbe $I_m = f(\omega)$ (ou $I = f(\omega)$) : c'est la **courbe de réponse en intensité** (figure 4).

L et C ayant des valeurs fixées, on peut donner à R différentes valeurs et tracer une courbe par valeur de R : on obtient un réseau de courbes. Elles présentent toutes un maximum pour la valeur particulière :

$$\boxed{\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \text{ pour laquelle } L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0,$$

ce maximum vaut $I_{mm} = \frac{U_m}{R}$, sa valeur est d'autant plus grande que R est plus petite.

- **Retard de phase du courant sur la tension.**
Il peut varier de $-\pi/2$ à $+\pi/2$.
Il est nul pour $\omega = \omega_0$.

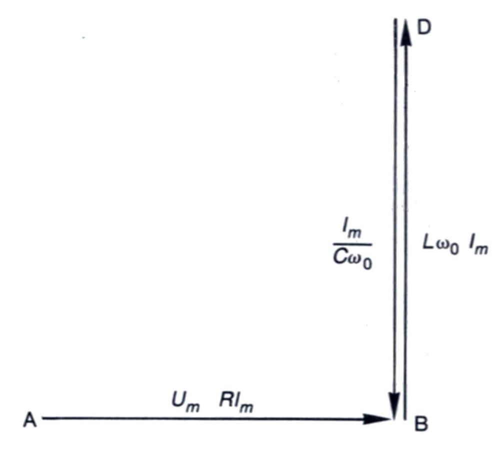
b) Résonance.

- **Définition :** on dit qu'il y a **résonance** lorsque la réponse du circuit est maximale.

- **Excitateur et résonateur :** la résonance a lieu pour une pulsation ω_0 du courant fourni par le générateur telle que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
Or cette valeur est justement celle de la pulsation propre du circuit LC (figure 5). D'où l'interprétation :
— la tension u (figure 3) est **l'excitateur** de pulsation ω ;
— le circuit RLC série est un **oscillateur** (amorti) de pulsation propre ω_0 (voir page 275 chap. 14), auquel on impose des oscillations forcées de pulsation ω ;
— sa réponse (I_m) est très mauvaise pour les pulsations trop basses ou trop élevées (courbes 4). Cette réponse est maximale si $\omega = \omega_0$: l'oscillateur entre en **résonance** s'il est excité avec une pulsation égale à sa pulsation propre.

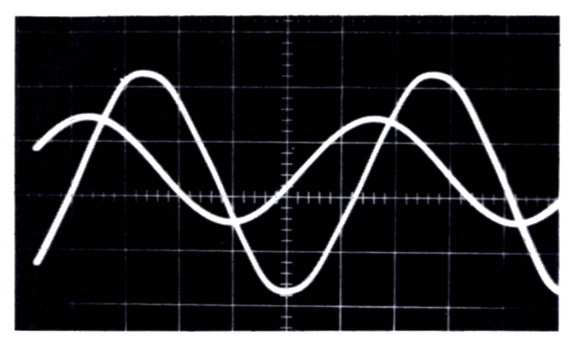
- **Particularités à la résonance** : $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$ entraîne $I_{mm} = \frac{U_m}{R}$ ($Z = R$) et $\varphi = 0$: **le courant est alors en phase avec la tension.**
La construction de Fresnel de la figure 2 prend alors la forme de la figure 6. De même, en complexes, on a alors :

$$\frac{U_m}{I_m}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R \quad \text{d'où : } \sin\varphi = 0, \cos\varphi = 1 \text{ et } \frac{U_m}{I_m} = R.$$

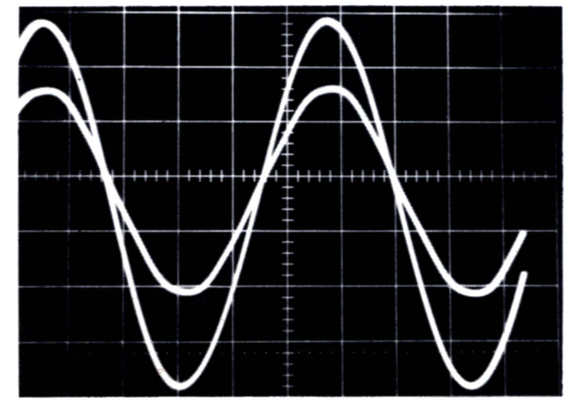


6. Circuit *RLC* à la résonance. L'intensité est en phase avec la tension totale. La tension aux bornes du condensateur est en opposition de phase avec celle qui est due à la f.é.m. d'induction.

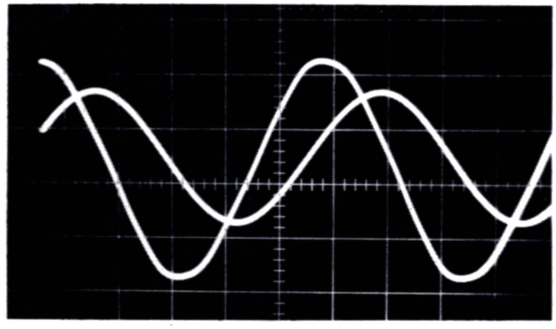
Pour la valeur $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ de la pulsation du courant, l'impédance d'un circuit *RLC* est minimale (elle vaut $Z = R$), l'intensité est maximale, le circuit est en résonance.



7a. $L < L_0$



7b. $L = L_0$



7c. $L > L_0$

7a. b. c. Étude à l'oscillographe de la réponse d'un circuit *RLC* ; *u* (*t*) a la même amplitude sur les trois photos, tandis que celle de *i* (*t*) varie.

En résumé, on peut dire que, à la résonance, le circuit « *RLC* » se comporte **globalement comme une résistance pure.**

• **Vérification expérimentale** : l'étude à l'oscillographe, grâce au montage de la figure 7d, confirme les calculs précédents (photos 7a, 7b, 7c).

Dans cette expérience on maintient ω constant et on utilise une inductance variable. La résonance s'obtient pour une valeur L_0 (photo 7b), la photo 7a correspond à $L < L_0$, la photo 7c correspond à $L > L_0$. On remarque que $i\ (t)$ est en phase avec $u\ (t)$ dans le cas où l'amplitude de $i\ (t)$ est maximale.

c) Surtension à la résonance. Facteur de qualité du circuit.

Sur le montage de la figure 8, un voltmètre permet de s'assurer que la tension d'alimentation U du circuit ne varie pas quand on fait varier ω ; l'autre voltmètre mesure la tension U' aux bornes du condensateur. Si la résistance R est assez faible, à la résonance indiquée par l'ampèremètre, U' peut être largement plus grande que U : il y a **surtension** aux bornes du condensateur. En effet, entre les valeurs efficaces, on peut écrire : $U' = \dfrac{I}{C\omega}$,

$$I = \frac{U}{R} \text{ et } \omega = \omega_0 \text{ à la résonance.}$$

On a donc : $\boxed{\dfrac{U'}{U} = \dfrac{1}{RC\omega_0} = \dfrac{L\omega_0}{R}}$ $\left(\text{puisque } L\omega_0 = \dfrac{1}{C\omega_0}\right)$.

Numériquement, avec $R = 10\ \Omega$, $L = 1$ H, la résonance a lieu pour $N_0 = 50$ Hz, $\omega_0 = 100\ \pi$ rd/s, si

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} \approx 10^{-5}\ \text{F} = 10\ \mu\text{F}.$$

On a alors

$$\frac{U'}{U} = \frac{1}{10\,.10^{-5}\,.\,100\ \pi} = \frac{10^2}{\pi} \approx 30.$$

On appelle **facteur de surtension ou facteur de qualité** du circuit *RLC* le rapport

$$\boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}}.$$

On peut s'étonner de trouver aux bornes du condensateur une tension plus forte que celle que fournit le générateur : cette tension s'installe pendant le régime transitoire qui précède le régime d'oscillations forcées sinusoïdales ; comme le montre le schéma de Fresnel (figure 6) cette tension est en opposition de phase avec celle qui est due à la f.é.m. d'auto-induction dans la bobine L : elles s'annulent l'une par l'autre à chaque instant. Il n'empêche que cette tension existe aux bornes du condensateur et peut entraîner son **claquage** si elle devient trop forte.

• **Acuité de la résonance. Bande passante :** le réseau de courbes de réponses (figure 4) montre que, les valeurs de L et C étant fixées, quand R diminue, la valeur du maximum de la courbe augmente et celle-ci devient plus « pointue » :

— avec une faible résistance la **résonance est aiguë,**

— avec une forte résistance la **résonance est floue.**

On démontre que la réponse du circuit est telle que la valeur de l'intensité efficace reste supérieure ou égale à sa plus grande valeur (celle de la résonance) divisée par $\sqrt{2}$ (figure 9) si la pulsation appartient à l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ de largeur

$$\boxed{\omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{Q}\omega_0}.$$

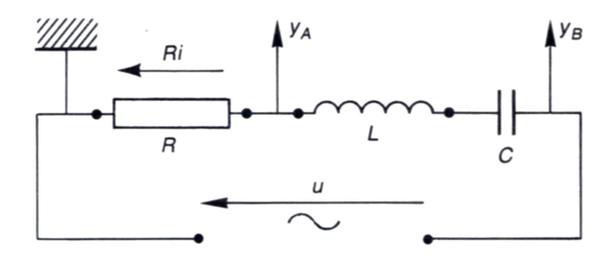
Cet intervalle est appelé bande passante du circuit. Un circuit de grand facteur de qualité a une bande passante étroite.

d) Applications.

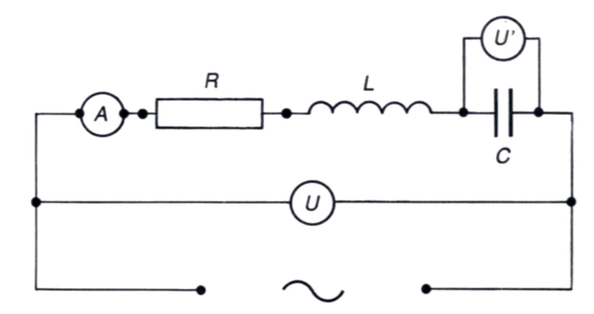
Nous les étudierons dans le prochain chapitre.
Signalons toutefois dès maintenant que, dans les circuits électriques parcourus par des courants alternatifs, on sera amené :

— soit à éviter les phénomènes de résonance : c'est par exemple le cas des circuits amplificateurs haute fidélité, car ces appareils sont destinés à reproduire une large gamme de fréquences ; on leur donnera donc une courbe de réponse plate ;

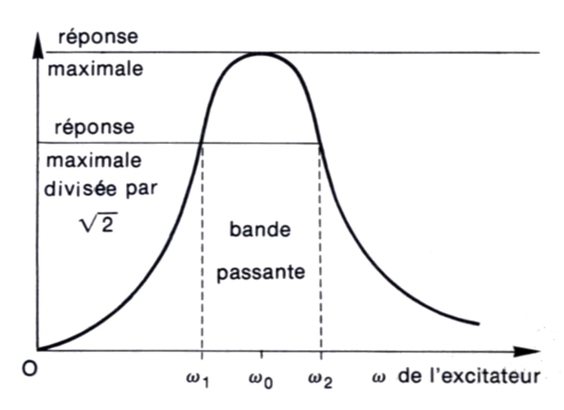
— soit à rechercher une résonance aiguë : ce sera le cas du circuit d'accord d'un récepteur radio.



7d. Étude à l'oscillographe de la réponse d'un circuit *RLC*. *u* est obtenue avec un générateur basse fréquence dont on peut modifier la pulsation ω.



8. Surtension : à la résonance la tension *U'* peut être considérablement plus forte que la tension *U* d'alimentation.



9. Courbe de résonance et bande passante d'un circuit *RLC*. *L* et *C* étant fixés donc ω_0 aussi, la résonance est plus aiguë et la bande passante plus étroite si *R* diminue.

II. Puissance. Facteur de puissance.

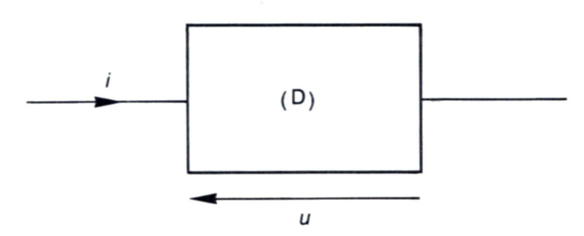
1. Puissance instantanée en régime sinusoïdal.

a) Puissance instantanée.

Soit un dipôle qui, à la date t, est soumis à la tension variable u et parcouru par l'intensité variable i (figure 10). Par extension des propriétés des courants continus, la puissance associée à l'énergie électrique **fournie par les porteurs de charge** au dipôle vaut, à la date t :

$\boxed{p = ui}$. C'est la **puissance instantanée.**

Elle est positive si les porteurs de charge fournissent au dipôle de l'énergie dégagée dans le milieu extérieur (c'est le cas de l'effet Joule). Elle est négative si les porteurs de charge reçoivent de l'énergie (générateur).



10. Régime variable $p = ui$.

b) Puissance instantanée en régime sinusoïdal.

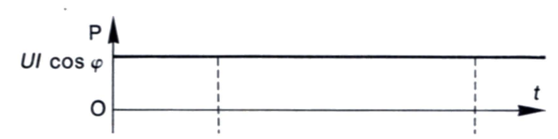
Dans ce cas : $u = U_m \cos \omega t,\ i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$

$$p = U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi),$$

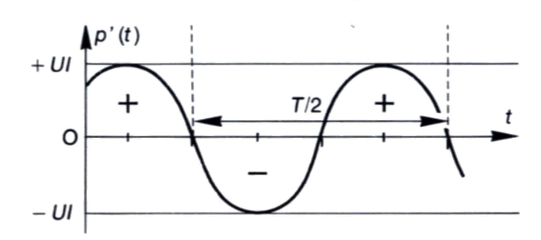
ce qui peut encore s'écrire :

$$p = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)].$$

$$\boxed{p(t) = UI [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]}\ .$$



11a. Pour la construction de la figure 12.



11b. Pour la construction de la figure 12.

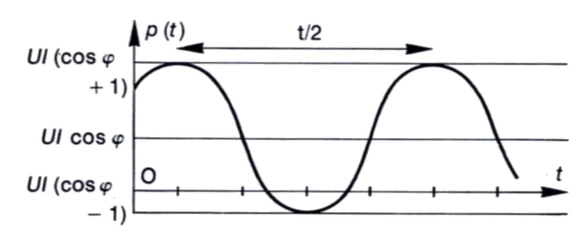
c) Variations au cours du temps.

Posons $P = UI \cos \varphi$, $p'(t) = UI \cos(2\omega t - \varphi)$.

Ces fonctions sont représentées au cours du temps sur les figures 11a et 11b. On en déduit les variations de leur somme $p(t)$ au cours du temps (figure 12). On voit que :

— $p(t)$ est périodique de période $T/2$, moitié de la période T du courant ;

— $p(t)$ « oscille » autour de la valeur $UI \cos \varphi$, entre les valeurs $UI(\cos \varphi + 1)$ et $UI(\cos \varphi - 1)$; (ainsi, il lui arrive d'être négative puisque généralement $\cos \varphi < 1$).



12. Variations de la puissance instantanée au cours du temps. Cette puissance est périodique, sa période est la moitié de celle du courant.

2. Puissance moyenne ; facteur de puissance.

a) Énergie mise en jeu.

• L'énergie mise en jeu entre les dates t et $t + dt$ est $dW = pdt$ (si dt est très court par rapport à $T/2$, p peut alors être considérée comme constante pendant dt).

• Pour calculer l'énergie mise en jeu sur une période $T/2$ de la puissance $p(t)$, faisons la somme des énergies associées à P et $p'(t)$: elles sont représentées par les aires algébriques délimitées entre l'axe des t et chacune des courbes 11a et 11b. On trouve :
$UI \cos \varphi T/2$ pour P et 0 pour $p'(t)$ (surfaces égales alternativement positives et négatives).
Donc $W_0^{T/2} = UI \cos \varphi \, . \, T/2$.

• Pour une durée t multiple entier n de $T/2$ on aura exactement :

$$W = nUI \cos \varphi \, . \, T/2 = UI \cos \varphi \, . \, t \, .$$

• Si la durée t n'est pas exactement un multiple entier de $T/2$ on aura :

$$t = (n + \varepsilon) \, . \, T/2 \quad \text{avec} \quad 0 < \varepsilon < 1$$

Comme ε est généralement négligeable devant n (par exemple pour t de l'ordre de 1 s, n vaut environ 100 avec le courant du secteur), on écrit :
$t \approx n\dfrac{T}{2}$ avec une erreur négligeable,
d'où : $W_0^t \approx nUI \cos \varphi \, . \, T/2 \approx \dfrac{t}{T/2} UI \cos \varphi T/2 = UI \cos \varphi \, . \, t \, .$

$$\boxed{W_0^t = UI \cos \varphi \, . \, t}$$

b) Puissance moyenne.

L'énergie mise en jeu (par la puissance variable) pendant la durée t est la même que si elle était délivrée par une puissance constante

$$\boxed{P = UI \cos \varphi} \, .$$

On l'appelle **puissance moyenne** dans la portion de circuit étudiée. On remarque sur la figure 12 que c'est la valeur moyenne autour de laquelle « oscille » la puissance instantanée. La puissance moyenne s'exprime en **watt** (W).

La puissance délivrée par un courant sinusoïdal de période T est périodique de période $\dfrac{T}{2}$; sa moyenne au cours du temps est la puissance moyenne $P = UI \cos \varphi$. L'énergie délivrée par le courant entre les dates t_1 et t_2 vaut $W = UI \cos \varphi \, . \, (t_2 - t_1)$.

c) Facteur de puissance.

• **Définitions :** la puissance moyenne est égale au produit de trois facteurs :
— U tension efficace aux bornes de la portion de circuit,
— I intensité efficace traversant la portion de circuit,
— cos φ, cosinus de l'angle φ de retard de i sur u instantanées.
— cos φ est appelé **facteur de puissance.**
— UI est la **puissance apparente,** elle s'exprime en volt . ampères (V . A).

• **Valeurs pour quelques dipôles.**
Résistance pure.

$\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, $P = UI$, ou, avec $U = RI$, $\boxed{P = RI^2}$.

La puissance moyenne dans une résistance pure est due à l'effet Joule : il n'intervient aucune autre forme d'énergie.

Condensateur seul. $\varphi = -\pi/2$, $\cos\varphi = 0$, $\boxed{P = 0}$.

Un condensateur ne consomme pas d'énergie : en effet il emmagasine une énergie instantanée $E_E = \frac{1}{2} Cu^2(t)$ qui augmente puis diminue périodiquement entre 0 et $\frac{1}{2} CU_m^2$: l'énergie reçue est ensuite restituée par le condensateur, en moyenne il n'en consomme pas.

Inductance pure. $\varphi = \pi/2$, $\cos\varphi = 0$, $\boxed{P = 0}$.

Ici, l'énergie emmagasinée est $E_B = \frac{1}{2} Li^2(t)$ qui augmente puis diminue périodiquement entre 0 et $\frac{1}{2} LI_m^2$: l'énergie reçue est ensuite restituée.

Circuit *RLC*. $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$, $U = ZI$, $P = UI\cos\varphi = RI^2$, $\boxed{P = RI^2}$.

Toute l'énergie électrique apportée par le courant est transformée par **effet Joule uniquement** (les énergies emmagasinées sont restituées) (voir ci-contre).
Généralisation. Certaines portions de circuit contiennent en plus un moteur. On démontre que la puissance moyenne apportée par le courant est alors égale à la somme de la puissance dissipée en chaleur et de la puissance mécanique du moteur.



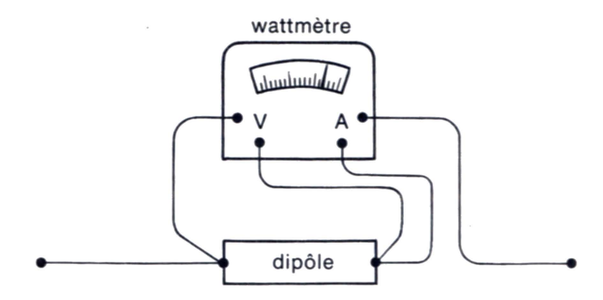
13a. Un wattmètre.

La puissance se mesure avec un wattmètre.

d) Mesure de la puissance moyenne.

• Elle se fait avec un **wattmètre** (photo 13a). C'est un appareil constitué de deux bobines placées l'une dans l'autre : l'une se branche comme un voltmètre, l'autre comme un ampèremètre (figure 13b).

• Par contre un « compteur » enregistre l'énergie consommée (qu'il indique généralement en kilowatt . heure).



13b. Comment brancher un wattmètre. Il indique la puissance P.
Si on ajoute un voltmètre, en dérivation comme la « bobine des volts », et un ampèremètre en série avec la « bobine des ampères », on mesure aussi U, I et donc $\cos \varphi = \frac{P}{UI}$.

3. Applications.

a) Transport de l'énergie électrique.

Soit un circuit dipolaire (D) alimenté sous la tension efficace U : il est le siège d'une puissance P et les **fils d'amenée** du courant sont parcourus par une intensité efficace $I = \frac{P}{U \cos \varphi}$.

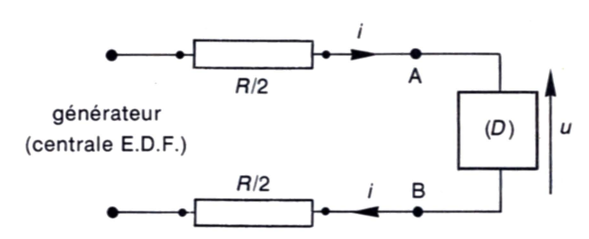
Ces fils ayant une résistance totale R sont le siège d'un dégagement de chaleur auquel correspond une puissance p :

$$p = RI^2 = R \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{(figure 14)} .$$

Cet effet Joule, **nuisible, doit être réduit.**

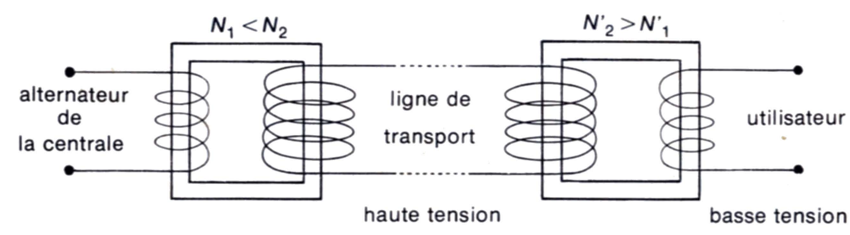
• Au niveau de la distribution on aura intérêt :
— à réduire la résistance R de la ligne ;
— à opérer sous **haute tension.**
Le passage de la basse tension à la haute tension puis inversement se fait grâce à des transformateurs (figure 15).

• Au niveau du consommateur, on l'incitera à augmenter le « $\cos \varphi$ » de son installation.

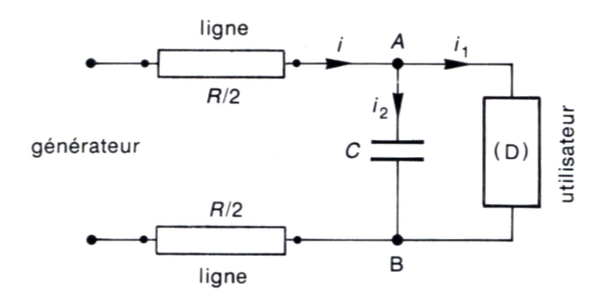


14. Pertes par effet joule dans les fils de jonction entre la centrale et l'utilisateur.

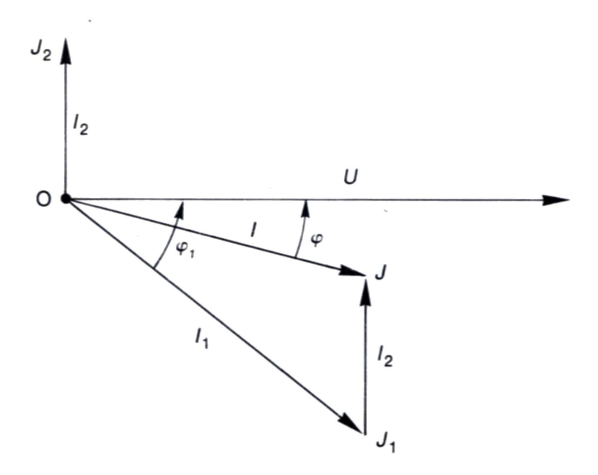
Pour réduire les pertes en ligne, on a intérêt à transporter l'énergie électrique sous haute tension et à rendre aussi voisins de 1 que possible les facteurs de puissance des circuits d'utilisation.



15. Schéma du transport de l'énergie électrique. Un transformateur ne fonctionne qu'en régime variable grâce à des phénomènes d'induction électromagnétique : ce qui justifie l'emploi du courant sinusoïdal.
En jouant sur les nombres N de spires des bobines des transformateurs on peut élever la tension au départ de la centrale et l'abaisser à l'arrivée chez l'utilisateur.



16a. Amélioration du transport de l'énergie électrique. Si l'installation de l'utilisateur est inductive, les pertes en ligne sont réduites en plaçant un condensateur convenable entre les bornes de l'utilisation.



16b. En ajoutant le condensateur, l'intensité en ligne passe de i_1 à i, l'effet Joule diminue et pourtant la puissance consommée entre A et B n'a pas changé.

b) Amélioration du facteur de puissance.

— Pour les lampes à incandescence, $\cos \varphi = 1$.

— Pour les machines-outils, les appareils électroménagers, les installations sont inductives : l'intensité y est en retard sur la tension.

C'est le cas de l'installation de la figure 16a, parcourue par une intensité i_1 en retard de φ_1 sur u. Voyons comment on améliore le transport de l'énergie en branchant un condensateur de capacité C convenable entre les bornes A et B de l'installation : il est parcouru par une intensité i_2 et l'intensité dans la ligne vaut à chaque instant : $i = i_1 + i_2$.

Sur le schéma de Fresnel de la figure 16b :

i_1 est représenté par $\overrightarrow{OJ}_1$, i_2 par $\overrightarrow{OJ}_2$, i par $\overrightarrow{OJ}_1 + \overrightarrow{OJ}_2 = \overrightarrow{OJ}$.

On voit que, sans modifier la puissance dépensée entre A et B (le condensateur n'en consomme pas), on a diminué le courant principal (et augmenté $\cos \varphi$ entre A et B). Pour annuler φ et donc rendre I minimal, on choisira $I_2 = I_1 \, . \sin \varphi_1$, $UC\omega = I_1 \sin \varphi_1$, ce qui donne la valeur de C.

Énergie dissipée dans un circuit « *RLC* ».

La relation instantanée entre la tension aux bornes d'un circuit *RLC* série, l'intensité dans le circuit et la charge du condensateur est (voir page 304) :

$$u = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}.$$

Multiplions ses deux membres par idt : il vient, avec $idt = dq$:

$$uidt = Lidi + Ri^2\,dt + \frac{q}{C}\,dq,$$

$$uidt = d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + d\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) + Ri^2\,dt, \text{ avec}$$

Entre les dates t et $t + dt$:
$uidt$ est l'énergie fournie au circuit ;
$d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$ est la variation de l'énergie E_B emmagasinée dans l'inductance L ;
$d\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)$ est la variation de l'énergie E_E emmagasinée dans le condensateur ;

$Ri^2\,dt$ est l'énergie dissipée par effet Joule.
La relation trouvée traduit donc la **conservation de l'énergie.**
En sommant sur la moitié $T/2$ d'une période T du courant, on obtient, avec la définition de la puissance moyenne P et de l'intensité efficace I :

$$P \,.\, T/2 = (E_B\, T/2 - E_{B_0}) + (E_E\, T/2 - E_{E_0}) + RI^2 \,.\, T/2 \,.$$

Les deux premiers groupes de termes du second membre sont nuls car les fonctions E_B et E_E sont périodiques de période $T/2$ (voir chap. 14 p. 277).
On obtient donc $P = RI^2$ et on vérifie ainsi que dans un circuit RLC il y a effet Joule uniquement.

Une inductance pure ou une capacité ne consomment pas d'énergie. Dans une résistance pure ou un circuit *RLC*, la puissance dépensée, $P = RI^2$, correspond à l'effet Joule.

Énergie dans un circuit « *RLC* » et facteur de qualité.

Soit un circuit RLC série.
— Calculons l'énergie E qui y est emmagasinée à la date t : c'est la somme de l'énergie magnétique E_B et de l'énergie électrique E_E

$E = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_C^2$ (u_C tension aux bornes du condensateur).

Avec $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, on a $u_C = \frac{I_m}{C\omega} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$ d'où

$$E = \frac{1}{2} LI_m^2 \cos^2(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2}\,\frac{C}{C^2\omega^2}\, I_m^2 \sin^2(\omega t - \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} I_m^2 \left[L \cos^2(\omega t - \varphi) + \frac{1}{C\omega^2} \sin^2(\omega t - \varphi)\right]$$: E dépend du temps.

— Calculons l'énergie consommée en une période T : c'est l'énergie W_J dégagée par effet Joule :

$$W_J = RI^2 \,.\, T = \frac{1}{2} RI_m^2 \,.\, \frac{2\pi}{\omega}.$$

— Comparons E et W_J **à la résonance :** on a alors $LC\omega_0^2 = 1$ et

$E = \frac{1}{2}\,\frac{I_m^2}{C\omega_0^2}\,[\cos^2(\omega_0 t - \varphi) + \sin^2(\omega_0 t - \varphi)] = \frac{I_m^2}{2\,C\omega_0^2}$: E ne dépend plus du temps.

Le rapport $\frac{E}{W_J}$ vaut alors :

$$\frac{E}{W_J} = \frac{\omega_0}{2\pi}\;\frac{1}{RC\omega_0^2} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{RC\omega_0} \qquad \boxed{\frac{E}{W_J} = \frac{Q}{2\pi}}\,.$$

— Cette relation nous montre un troisième aspect du facteur de qualité Q (déjà vu à propos de la surtension et de la bande passante du circuit RLC série) : plus Q est grand, plus le circuit à la résonance peut emmagasiner d'énergie en comparaison de l'énergie qu'il consomme.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- L'impédance d'un dipôle est le rapport $Z =$ ______ ; pour un circuit *RLC* série, cette impédance vaut ______ .
- Si l'on applique une tension d'amplitude constante et de pulsation ω variable à un circuit *RLC* série, sa réponse I_m est maximale pour la pulsation $\omega = \omega_0 =$ ______ pour laquelle l'impédance Z vaut ______ : c'est la résonance. Le déphasage tension-courant est alors ______ .
- La puissance moyenne mise en jeu dans un circuit où l'intensité est en retard de φ sur la tension vaut $P =$ ______ ; ______ est appelé facteur de puissance du circuit.
- Un condensateur ou une inductance pure ne ______ d'énergie ; dans une résistance pure ou un circuit *RLC,* la puissance vaut $P =$ ______ , elle correspond à ______ .
- En plus de l'augmentation de la tension de transport, on a intérêt à ______ le facteur de puissance de chaque réseau d'utilisation pour ______ les pertes en lignes.

Petites questions.

1. Pour quelle valeur de la pulsation ω du générateur de tension efficace U, un circuit RLC série entre-t-il en résonance ? Quelle est alors la valeur de l'intensité ?

2. Une lampe marquée 220 V, 150 W a-t-elle une résistance de fonctionnement plus grande ou plus faible qu'une lampe marquée 220 V, 60 W ?

3. Quel est l'avantage du courant sinusoïdal pour le transport de l'énergie électrique à grande distance ?

4. Quelle est la valeur du facteur de puissance d'une résistance pure ?

5. On branche un dipôle sur une tension sinusoïdale : quelle est la puissance consommée dans ce dipôle s'il est constitué par **a)** un condensateur ; **b)** un condensateur en série avec une inductance de résistance négligeable ; **c)** un condensateur en parallèle avec la même inductance ?

Applications immédiates.

6. Les constituants d'un circuit RLC série valent respectivement $R = 200\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 5\ \mu$F. Calculez l'impédance de ce circuit alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence $N = 50$ Hz. Quelle est l'intensité efficace lorsque la tension appliquée a une valeur efficace de 220 V ?

7. Quelle est la pulsation de résonance d'un circuit RLC série dont le condensateur a une capacité de 10 μF et la bobine une inductance de 1 H ?

8. Quelle est la résistance de fonctionnement d'un radiateur marqué 220 V, 1 000 W ?

9. On met en série un condensateur de capacité $C = 5\ \mu$F et une résistance $R = 200\ \Omega$, et on applique à l'ensemble une tension sinusoïdale de valeur efficace 220 V. Calculez l'intensité efficace du courant qui parcourt ce circuit.

10. Calculez la capacité du condensateur qu'il faut mettre en série avec une bobine d'inductance $L = 1$ H et de résistance $R = 100\ \Omega$, pour obtenir la résonance sur le secteur 50 Hz, 220 V efficaces.
Quel est le coefficient de surtension de ce circuit ? Quelle est la tension aux bornes du condensateur ?

Approfondissement.

11. On branche en série une résistance, une inductance et un condensateur : $R = 300\ \Omega$, $L = 2$ H, $C = 10\ \mu$F, et on applique à l'ensemble une tension alternative de 220 V, 50 Hz. Calculez l'intensité efficace du courant obtenu, son déphasage par rapport à la tension, et les tensions efficaces aux bornes de chacun des composants du circuit.

Réponses : $I = 0{,}51$ A, i est en retard de 0,80 rd sur u ; $U_R = 153$ V, $U_C = 162$ V, $U_L = 320$ V.

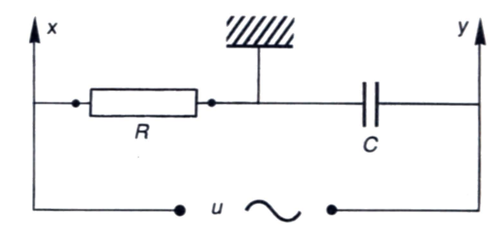
12. On place en série un ampèremètre d'impédance négligeable, une résistance, une bobine de résistance négligeable et un condensateur : $R = 200\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 15\ \mu$F ; l'ensemble est alimenté sous une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz. On ajoute alors un condensateur en parallèle avec le premier. Comment l'intensité varie-t-elle ?

Réponse : elle diminue.

13. Bande passante d'un circuit RLC.
Elle est limitée par deux pulsations ω_1 et ω_2. Recherchez dans le cours la définition de la bande passante et écrivez les inégalités qui définissent ω_1 et ω_2 (en continuant ensuite les calculs vous pourrez trouver la différence $\omega_2 - \omega_1$ déjà donnée dans le cours).

14. Quelle courbe verra-t-on apparaître sur l'écran d'un oscillographe fonctionnant sans balayage, avec le montage ci-dessous dans lequel $R = \dfrac{1}{C\omega}$, et les coefficients d'amplification des canaux X et Y étant égaux ?

Réponse : un cercle.

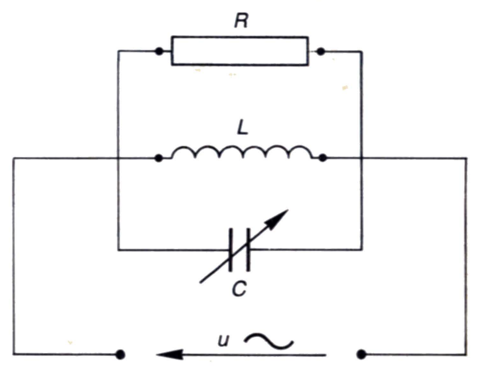


15. Dans le montage ci-dessous alimenté par la tension u alternative, R est une résistance pure, L une inductance pure, et C une capacité variable : $U = 10$ V, $\omega = 2 \cdot 10^4$ rd/s, $R = 1\ 000\ \Omega$, $L = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ H, C a pour valeur initiale $C_0 = 0{,}15\ \mu$F.

a) Calculez dans ces conditions les intensités des courants dérivés ainsi que celle du courant principal.

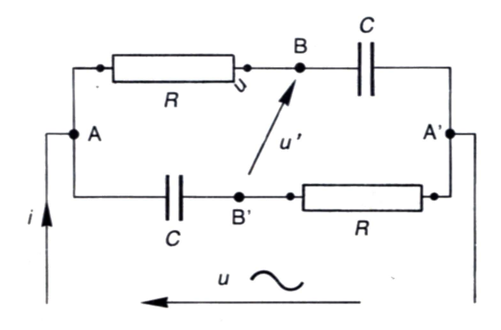
b) On fait varier C progressivement : on constate que l'intensité I passe d'abord par un minimum pour une valeur C_1 de la capacité C, puis I reprend sa valeur initiale pour une valeur C_2 différente de C_0.
Calculez C_1 et C_2.

Réponses : **a)** $I = \sqrt{2} \cdot 10^{-2}$A, i en avance de $\pi/4$ sur u ; **b)** $C_1 = 10^{-7}$ F, $C_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-7}$ F.

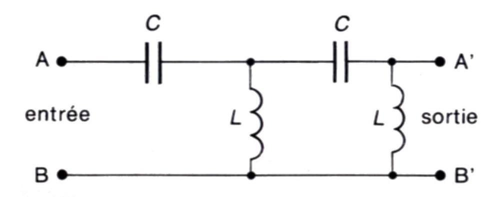


16 Le circuit ci-dessous est alimenté entre A et A′ par une tension sinusoïdale *u*. Il apparaît entre B et B′ une tension sinusoïdale *u′*. Comparez les amplitudes des tensions *u* et *u′*. Calculez leur déphasage. Quelle est l'intensité du courant principal *i* ? Indication : faites la construction de Fresnel des deux branches du circuit, reportez sur cette construction les points A, A′, B, B′ du circuit et analysez le vecteur de Fresnel représentant *u′*.

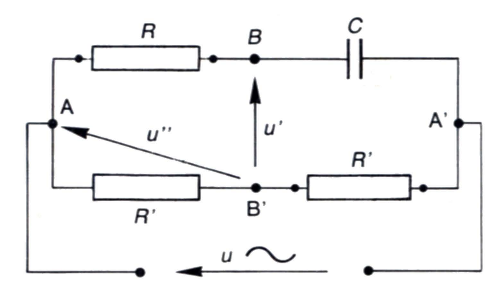
Réponses : $U'_m = U_m$; *u′* est en retard sur *u* de $2\,\alpha$ avec $\operatorname{tg}\alpha = RC\omega$; $I = \dfrac{2\,UC\omega}{\sqrt{R^2\,C^2\,\omega^2 + 1}}$.



17. Montrez qualitativement que le quadripôle ci-dessous transfère mieux les fréquences élevées que les basses fréquences, autrement dit que si la pulsation de la tension sinusoïdale de valeur efficace constante appliquée à l'entrée AA′ augmente, la tension disponible entre les bornes de sortie BB′ augmente aussi.
Trouvez une application de ce dispositif dans le cas où l'entrée est alimentée par un mélange de plusieurs fréquences.
Comment disposeriez-vous les quatre composants du montage pour favoriser au contraire la sortie des basses fréquences ?

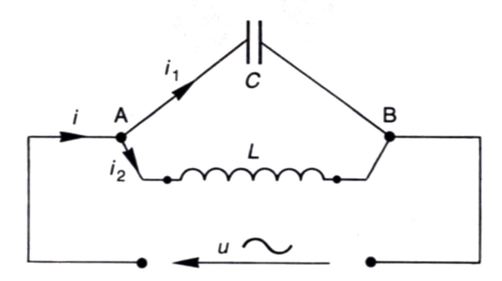


18 Comparez la tension *u′* qui apparaît entre les bornes B et B′ du montage ci-dessous, à la tension *u′* que l'on applique entre les bornes A et A′, et à la tension *u″* que l'on trouve entre les bornes A et B′ : comment sont leurs amplitudes ? Quelle relation doit-il exister entre *R* et *C* pour que *u′* et *u″* soient en quadrature de phase ?



Réponses : $U'_m = U''_m = \dfrac{U_m}{2}$; $RC\omega = 1$.

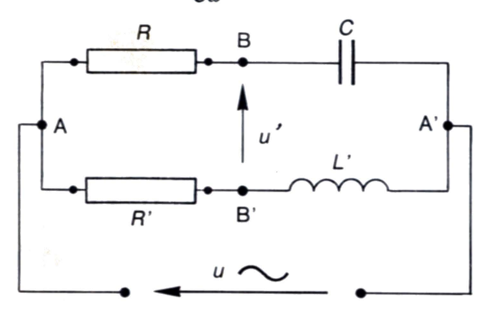
19. Dans le montage ci-dessous, *L* est une inductance de résistance négligeable. On applique à l'ensemble une tension *u* sinusoïdale de valeur efficace *U*.
Exprimez par un diagramme de Fresnel i_1 en fonction de *u*, i_2 en fonction de *u*, puis le courant principal $i = i_1 + i_2$. Calculez son amplitude et son déphasage par rapport à la tension dans les trois cas : ω supérieur, inférieur ou égal à $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; à cause du dernier cas, le montage est appelé **circuit bouchon** : justifiez cette dénomination.



20. Quelle est la puissance *P* consommée dans un circuit *RLC* série, où $R = 10\,\Omega$, $L = 1$ H, $C = 20\,\mu$F, alimenté par une tension sinusoïdale de 220 V efficaces, 50 Hz ?

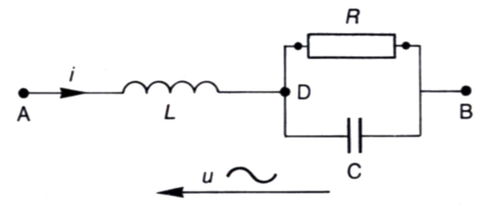
21 Dans le montage ci-dessous, R et R′ sont des résistances non inductives, et L′ est une inductance de résistance négligeable. Entre A et A′ on applique une tension *u* sinusoïdale, il apparaît une tension *u′* entre B et B′. Quelle relation doit-il exister entre les valeurs des composants du circuit pour que *u* et *u′* aient la même amplitude ? Quelle est la condition supplémentaire pour que *u* et *u′* soient en quadrature de phase ?

Réponses : $L' = RR'\,C$, puis, de plus,
$R = \dfrac{1}{C\omega}$ ou $R' = L'\,\omega$.



22 Trouvez la condition pour que dans le circuit ci-dessous l'intensité du courant principal soit en phase avec la tension totale u_{AB}. Indication : utilisez la tension u_{DB} aux bornes de la dérivation comme référence d'amplitude et de phase pour trouver les intensités des courants dérivés, du courant principal, puis la tension totale.

Réponse : $R^2\left(\dfrac{C}{L} - C^2\,\omega^2\right) = 1$.



23. On place en série deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 et l'ensemble est alimenté sous une tension sinusoïdale de valeur efficace *U*.
Calculez les tensions aux bornes de chaque condensateur.

Réponses :

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot U \,;\; U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot U.$$

24. Montrez que si tous les abonnés branchaient en permanence des condensateurs sur leurs prises de courant, cela pourrait créer des difficultés financières à l'E.D.F., sans aucun bénéfice pour personne.

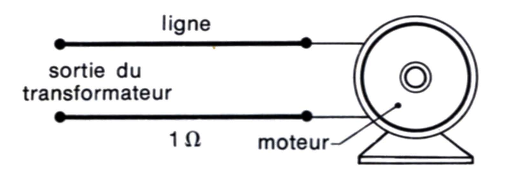
25. Le circuit oscillant d'entrée d'un récepteur radio a une inductance de 20 µH et une résistance de 0,01 Ω ; il est accordé sur la longueur d'onde 250 m : calculez la valeur de sa capacité. Calculez la largeur de sa bande passante exprimée en radian/seconde puis en hertz.
Le signal reçu produit dans ce circuit une f.é.m. de valeur efficace 0,1 microvolt. Calculez l'intensité efficace du courant qui le traverse ainsi que la puissance captée. Que devient cette puissance si, en modifiant le réglage du condensateur, on accorde le circuit sur l'une des limites de la bande passante définie ci-dessus (on supposera qu'il n'y a pas d'autre émetteur dans la zone de fréquence étudiée) ?

26 Un moteur fonctionnant sous 220 V alternatifs a une puissance mécanique de 300 W, un rendement de 0,85, un facteur de puissance de 0,80. Quelle est la puissance électrique consommée par le moteur et l'intensité qui le traverse ?
Entre ses bornes on place un condensateur : quelle valeur doit-on donner à sa capacité *C* pour que le facteur de puissance de l'ensemble moteur-condensateur soit égal à 1 ? On rappelle que dans un moteur la tension est en avance de phase sur l'intensité.

Réponses : 353 W, 2 A, 17,4 µF.

27 Un moteur de puissance 6 kW électriques, de facteur de puissance 0,85, fonctionne sous une tension alternative $U = 220$ V efficaces ; pour cela il est relié à un transformateur par une ligne électrique dont les deux fils ont au total une résistance de 1 Ω. Calculez la tension efficace U_0 à la sortie du transformateur. On rappelle que dans un moteur la tension est en avance de phase sur l'intensité.

Réponse : $U_0 = 247{,}9$ V.



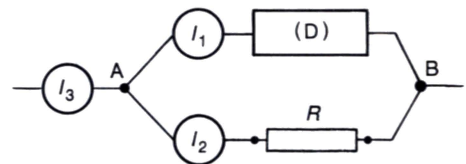
28. Un moteur branché sous 220 V consomme une puissance électrique de 1 100 W ; son facteur de puissance vaut 0,7 et son rendement mécanique 0,9. Calculez l'intensité qui le parcourt et la puissance mécanique qu'il fournit.

29. Le circuit ci-dessous est alimenté sous une tension sinusoïdale de 100 V ; on considère que les ampèremètres ont des impédances négligeables ils indiquent alors $I_1 = 12$ A, $I_2 = 10$ A, $I_3 = 19$ A.

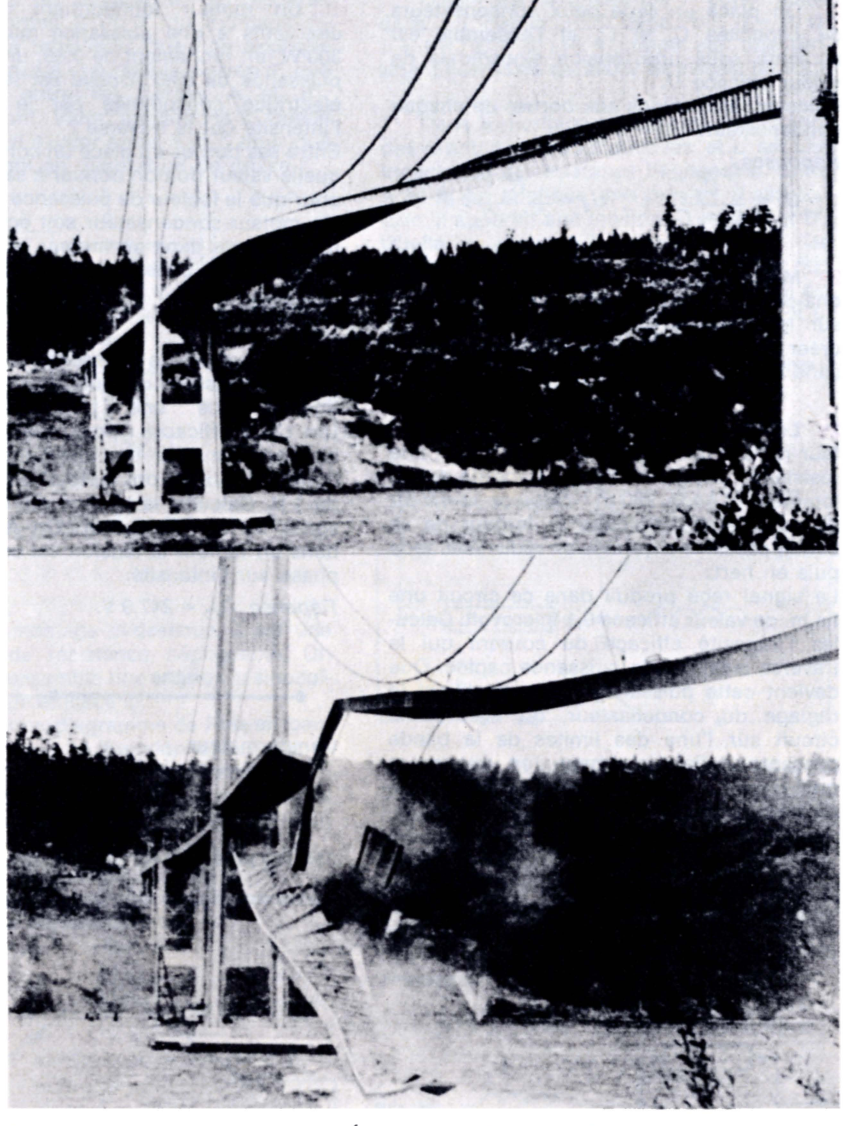
Traduisez par une construction graphique, en utilisant un compas et un rapporteur, la mesure du déphasage entre les courants i_1 et i_2.

Sachant que *R* est une résistance non inductive de 10 Ω, déterminez la puissance consommée dans chaque branche du circuit. Calculez la puissance totale consommée entre A et B et le facteur de puissance de l'ensemble du dipôle AB.

Réponses : 60,8 degrés, $P_1 = 585$ W, $P_2 = 1\,000$ W, $P = 1\,585$ W, $\cos \varphi = 0{,}834$.



17 Oscillateurs mécaniques en régime forcé: résonance.



Destruction du pont de Takoma (État de Washington, U.S.A., Novembre 1940). Le tablier du pont a été mis en vibration par un vent violent ; l'ensemble de la structure, suspendue aux câbles porteurs, est entré en résonance, ce qui a amené la rupture de l'ouvrage d'art.

Nous nous proposons d'étendre l'étude des vibrations forcées du domaine de l'électricité à celui de la mécanique. Cette étude sera purement qualitative car les systèmes mécaniques réels sont généralement plus compliqués que les systèmes électriques qui ont été étudiés en basse fréquence.

1. Quelques exemples de vibrations mécaniques forcées.

a) Quelques observations de vibrations forcées.

Il est facile d'observer des vibrations forcées dans la vie courante, ou avec certains appareils souvent utilisés dans les expériences de cours :

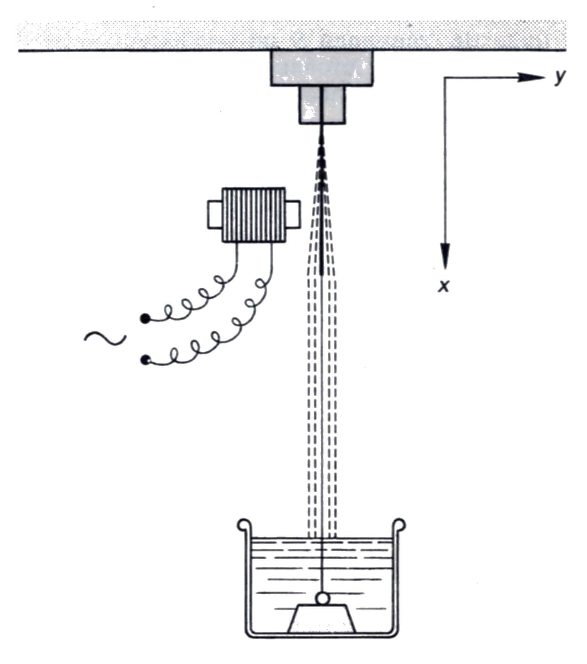
— une lame d'acier serrée dans un étau à une de ses extrémités est mise en vibration grâce à un électro-aimant parcouru par un courant sinusoïdal de fréquence convenable ;

— à son tour la lame met en vibration une corde qui lui a été attachée et dont l'autre extrémité est fixe (figure 1) ;

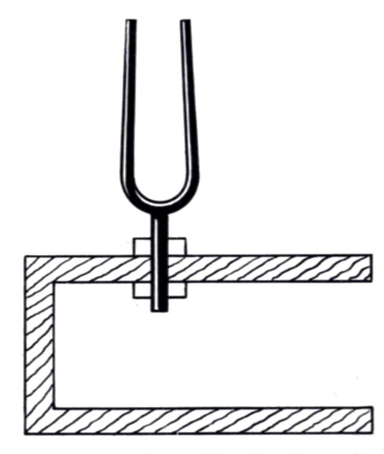
— une corde de cuivre parcourue par un courant sinusoïdal est mise en mouvement sous l'effet d'un aimant grâce à une force de Laplace alternative (voir chapitre 9) ;

— certaines pièces de la carrosserie d'une automobile se mettent à vibrer à des vitesses bien déterminées sous l'effet des vibrations du moteur, ou des vibrations provoquées par de mauvais pavés ;

— si on frappe un diapason, il émet un son, mais celui-ci se renforce si on pose le diapason sur sa caisse (figure 2).



1. Vibrations forcées d'une corde.


2. Diapason sur sa caisse : les vibrations du diapason se communiquent à la caisse et à l'air qui entre en vibrations forcées.

b) Excitateur et oscillateur. Vibrations forcées.

• Comme en électricité, on distingue, dans chacun de ces dispositifs :

— **un excitateur :** l'électro-aimant parcouru par un courant sinusoïdal, l'ensemble aimant-courant responsable de la force de Laplace, le moteur d'automobile, le diapason ;

— **un oscillateur :** la lame vibrante, la corde, les plaques de tôle ou poignées de porte de l'automobile, la caisse du diapason.

Quand on le soumet à des actions périodiques de fréquence *N* un oscillateur entre en vibrations forcées, c'est-à-dire vibre aussi à la fréquence *N*.

• Les vibrations de l'oscillateur sont bien des **vibrations forcées** car elles se font à la fréquence N de l'excitateur.

On peut le vérifier par exemple en stroboscopant la lame de scie : si on change sa longueur, elle vibre avec une amplitude plus ou moins grande, mais toujours à la même fréquence (100 Hz si l'électro-aimant est alimenté par le courant du secteur).

• **Remarque :** les phénomènes se compliquent lorsque l'oscillateur réagit notablement sur l'excitateur. Nous exclurons l'étude de tels cas.

2. Réponse de l'oscillateur. Résonance.

a) Quelle grandeur utiliser pour définir la réponse ?

L'excitateur impose à tous les points de l'oscillateur un mouvement sinusoïdal de fréquence N, de translation par exemple. Choisissons plus particulièrement l'un de ces points (l'extrémité de la lame par exemple) : il vibre avec une amplitude X_m et une vitesse de valeur maximale $V_m = \omega X_m$.

• Généralement c'est **l'amplitude du déplacement** que l'on appelle réponse de l'oscillateur mécanique.
Mais on pourrait aussi bien décrire la réponse par la valeur de la vitesse maximale V_m.

• **Remarque 1 :** en électricité nous avons choisi la deuxième solution en étudiant l'amplitude I_m de i et non pas l'amplitude Q_m de q (voir page 306) :
en effet i est à q ce que v est à x puisque $i = \frac{dq}{dt}$ comme $v = \frac{dx}{dt}$.

• **Remarque 2 :**

Certains oscillateurs ont un comportement assez compliqué car ils sont le siège de **phénomènes de propagation :** c'est le cas de la lame, de la corde vibrante, de la caisse du diapason : nous les reverrons à la fin de ce chapitre puis dans le chapitre 19.

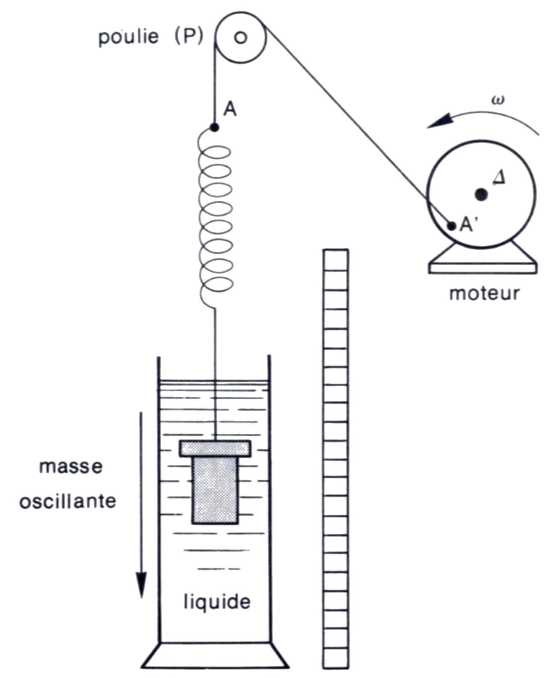
L'étude qui suit utilise des oscillateurs simples comme ceux qui ont été analysés au chapitre 13 : oscillateur linéaire, pendule de torsion.

b) Courbe de réponse. Résonance.

• **Description d'un dispositif expérimental :** un moteur d'axe Δ porte un point d'amarrage A, excentré par rapport à l'axe ; à ce point on attache un fil inextensible qui après passage sur une poulie de renvoi (P), soutient un ressort hélicoïdal auquel est suspendue une masse m constituée d'un cylindre et d'une plaquette plongeant dans le liquide d'une éprouvette cylindrique (figure 3). Le moteur étant arrêté, l'ensemble ressort-masse m-liquide constitue un oscillateur amorti : écartée verticalement de sa position d'équilibre la masse m y revient après quelques oscillations d'amplitude décroissante.

Un jeu de plaquettes de même masse et de sections différentes permet, sans changer la masse oscillante m, de modifier les forces de freinage donc l'amortissement. Le même résultat peut aussi s'obtenir en utilisant des liquides plus ou moins visqueux.

Lorsque le moteur tourne à vitesse angulaire ω constante, l'extrémité A du fil décrit un cercle de rayon a ; si la distance poulie (P)-axe Δ est grande devant le rayon de ce cercle, l'autre extrémité A′ du fil est animée d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude a. Dans ces conditions l'oscillateur étudié ci-dessus est excité avec une pulsation ω.

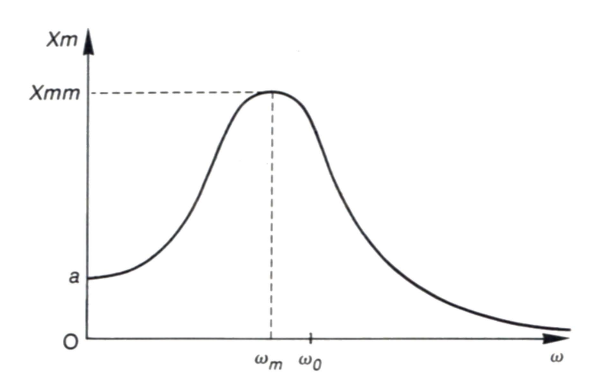


3. Oscillations forcées de translation. La rotation du moteur impose au point A′ un mouvement sinusoïdal de translation de pulsation ω. La masse m prend un mouvement vertical forcé de pulsation ω, d'amplitude a que l'on mesure sur la règle graduée.
En donnant à ω différentes valeurs, on trace la courbe de réponse de l'oscillateur.

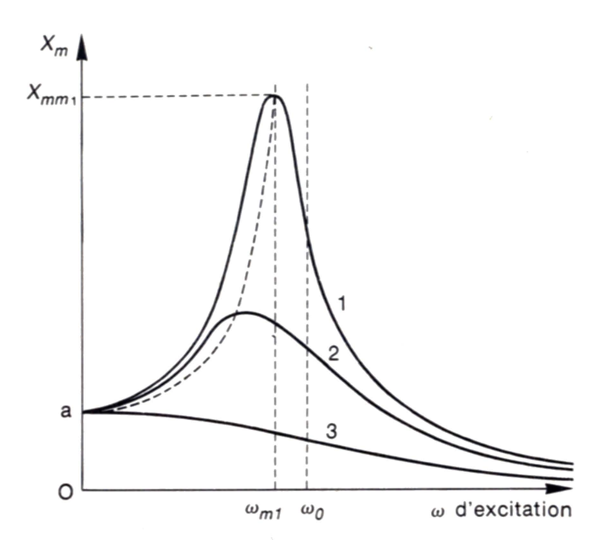
• **Mesures :** ayant fixé l'amortissement par le choix d'une plaquette et d'un liquide, on étudie la **réponse en amplitude** de l'oscillateur : après avoir mis le moteur en mouvement à une vitesse angulaire ω donnée (qui se mesure avec un compte-tours et un chronomètre), on attend que le **régime d'oscillations forcées** de l'oscillateur soit établi, et on mesure l'amplitude X_m de ses oscillations.
On recommence pour différentes valeurs de la vitesse angulaire ω du moteur, c'est-à-dire de la pulsation d'excitation.

• **Courbe de réponse d'un oscillateur peu amorti ; résonance :** la courbe de réponse représente les variations de X_m (en ordonnées), en fonction de ω (en abscisses).
Si l'oscillateur n'est pas trop amorti, cette courbe a l'allure de la figure 4 : on constate que :
— quand ω tend vers zéro, X_m tend vers a ; ceci implique que la longueur du ressort ne varie pas : en effet les sollicitations sont très lentes donc l'accélération de la masse m est négligeable, ainsi que les forces de freinage : nous avons alors à chaque instant des conditions très voisines de l'équilibre statique.

La réponse (amplitude des oscillations) de l'oscillateur dépend de la fréquence d'excitation. Si cette réponse passe par un maximum, il y a alors résonance.



4. Courbe de réponse en amplitude.
Ici l'oscillateur est peu amorti. Son amplitude devient maximale pour une certaine pulsation d'excitation ω_m voisine de la pulsation propre de l'oscillateur : c'est la résonance.



5. Courbes de réponse en amplitude : influence de l'amortissement. Celui-ci augmente de la courbe 1 à la courbe 3. L'acuité de la résonance et la pulsation ω_m de résonance diminuent quand l'amortissement augmente.

— Quand ω tend vers l'infini, X_m tend vers zéro : à cause de son inertie, l'oscillateur « n'a pas le temps » de répondre à des sollicitations qui changent de sens trop rapidement : il ne bouge pas.
— La courbe de réponse présente un maximum X_{mm} pour une certaine valeur ω_m : l'oscillateur est en **résonance.**
Arrêtons alors le moteur, supprimons le liquide et mesurons la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur non amorti.
On constate que :
— la résonance a lieu pour une **pulsation d'excitation voisine de la pulsation propre** de l'oscillateur.

c) Influence de l'amortissement sur la résonance.

En utilisant des plaquettes de sections croissantes (ou des liquides de plus en plus visqueux), on augmente l'amortissement de l'oscillateur. Pour chaque amortissement on peut tracer une courbe de réponse : on obtient un réseau de courbes en les faisant figurer sur un même graphique (figure 5). Sur ce réseau, l'amortissement augmente quand on passe de la courbe 1 à la courbe 2 puis 3.

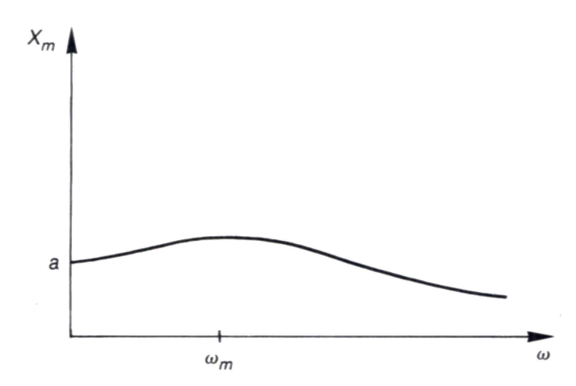
• **Constatations.**
— Toutes les courbes ont même limite a quand ω tend vers zéro (ce résultat a été expliqué plus haut).
— **La résonance est aiguë** (X_{mm}/a grand) quand l'amortissement est faible (courbe 1).
— **La résonance est floue** (X_{mm}/a à peine supérieur à 1) quand l'amortissement est plus grand (courbe 2).
— **Il n'y a pas de résonance** quand l'amortissement est trop fort (courbe 3).
— La pulsation ω_m de résonance est inférieure à la pulsation propre ω_0 mais voisine de ω_0 pour un faible amortissement (courbe 1). Elle diminue quand on augmente l'amortissement : la courbe en pointillé donne la position du sommet (de coordonnées ω_m, X_{mm}) de chaque courbe de réponse.

• **Conséquences.**
— Un oscillateur peu amorti ne répond notablement que pour des pulsations voisines de sa pulsation propre : on le caractérise d'ailleurs par sa **bande passante** $\left(\text{telle que } X_m \geqslant \dfrac{X_{mm}}{\sqrt{2}}\right)$ d'autant plus étroite que la résonance est plus aiguë (une notion analogue a été introduite en électricité au chapitre précédent, (figure 9 page 309).

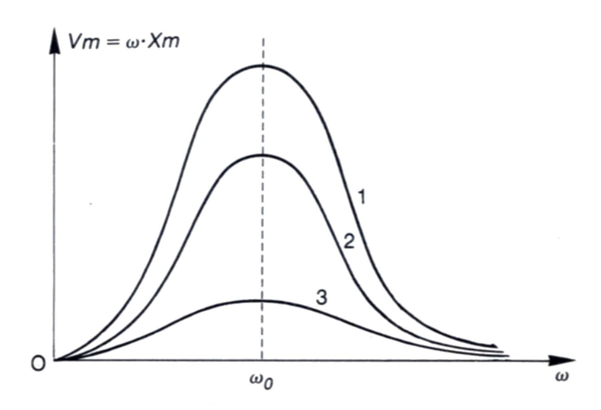
— Un oscillateur convenablement amorti peut avoir une courbe de réponse très plate autour de ω_m (figure 6) : le rapport X_m/a dépend alors très peu de ω au voisinage de ω_m, ce qui veut dire que l'oscillateur ne privilégie pratiquement aucune pulsation. Ce comportement sera systématiquement recherché dans certains cas (voir plus loin le haut-parleur par exemple).

• **Remarque :** on ne peut manquer de faire un rapprochement avec la résonance électrique du circuit *RLC* alimenté par une tension sinusoïdale. Dans les deux cas la résonance est aiguë si l'oscillateur est peu amorti (*R* faible en électricité), et floue dans le cas contraire (figure 25, chapitre 00).
Toutefois en électricité la pulsation ω_m de résonance est égale à la pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ quel que soit l'amortissement ; au contraire elle en dépend en mécanique.
Cette différence n'est pas due à la nature du phénomène. Cette différence provient du fait que la grandeur commode à mesurer est X_m en mécanique, I_m en électricité : ainsi les courbes de réponse sont-elles $X_m = f(\omega)$ en mécanique, $I_m = f(\omega)$ en électricité ; or I_m est l'équivalent électrique de $V_m = \omega \cdot X_m$, valeur maximale de la vitesse (voir remarque page 322). Si on prend la peine, après chaque mesure de X_m, de calculer $\omega \cdot X_m = V_m$, on obtient le réseau de courbes de la figure 7 qui est en tout point comparable aux courbes de réponse en intensité du circuit *RLC*.

La résonance a lieu pour une fréquence d'excitation proche de la fréquence propre de l'oscillateur. Cette résonance est aiguë avec un oscillateur peu amorti, floue dans le cas contraire.



6. Amortissement donnant une courbe de réponse très plate qui ne favorise pratiquement aucune pulsation d'excitation.



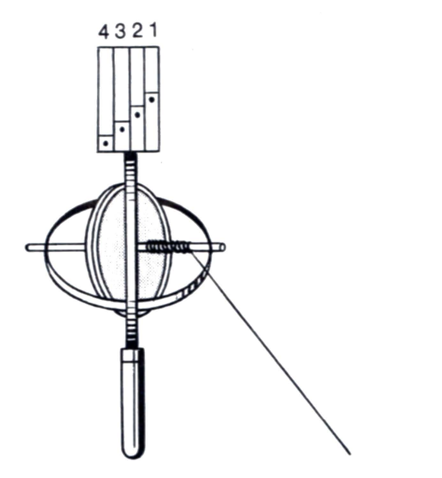
7. Courbes de réponse de vitesse.
Ces courbes correspondent aux trois cas d'amortissement de la figure 5.
Leur équivalent électrique est le réseau de courbes $I_m = f(\omega)$ tracé pour différentes valeurs de *R* lorsque *L* et *C* sont fixés.

3. Applications de la résonance.

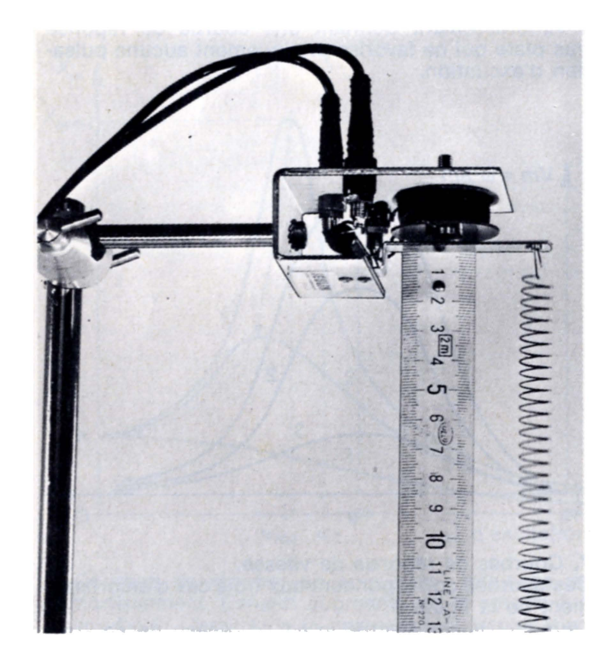
Suivant le phénomène utilisé et le but recherché, on cherche à éviter ou au contraire à provoquer la résonance.
Citons quelques exemples choisis dans les domaines de la mécanique, de l'électricité, de l'électro-acoustique, de l'acoustique.

a) La résonance en mécanique.

• **Expérience du gyroscope mal équilibré :** la figure 8a montre un gyroscope (disque mobile autour d'un axe) légèrement déséquilibré par un petit évidement : ainsi lorsqu'il tourne, il produit des vibrations de même fréquence que celle de sa rotation. Ces vibrations sont communiquées à une série de lames de longueurs différentes.



8a. Le gyroscope est une source de vibrations mécaniques. A mesure qu'il ralentit, les lames entrent en résonance dans l'ordre 1, 2, 3, 4.



8b. Vibreur à lame.

Si on lance le disque à grande vitesse, il ralentit progressivement et on voit les lames entrer successivement en résonance, d'abord la plus courte et pour finir la plus longue : chaque lame possède une fréquence propre de vibration, d'autant plus élevée que la lame est plus courte.

• **Vibreur à lame :** la lame est excitée périodiquement, avec une fréquence $2\,N$, grâce au champ magnétique créé par un courant alternatif de fréquence N passant dans l'électro-aimant (photo 8b) : il faut un réglage très précis de la longueur de la lame (qui conditionne la valeur de sa fréquence propre N_0) si l'on veut obtenir des vibrations de grande amplitude sous l'effet de l'électro-aimant : la résonance est aiguë.

• **Vibrations des pièces d'une voiture :** la source de vibration est le moteur ; en fonction de son régime, telle ou telle pièce peut entrer en résonance. Les pièces desserrées, donc peu amorties, peuvent donner des résonances aiguës. Les revêtements insonorisants ont également un rôle amortisseur.

• **Oscillations d'un navire dans la houle :** un navire a trois mouvements d'oscillation : vertical, de tangage, et de roulis, caractérisés chacun par une période propre. Des mouvements d'oscillations forcées prennent naissance sous l'effet combiné de la houle et du déplacement horizontal du navire. Le constructeur puis le navigateur devront éviter que ces oscillations forcées ne donnent lieu à une résonance qui pourrait se terminer fâcheusement.

• **Oscillations d'un ouvrage d'art :** on connaît plusieurs exemples de destruction de ponts suspendus par suite de résonance mécanique : sous l'effet d'une troupe passant au pas cadencé (Angers, 1850) ; sous l'effet du vent provoquant les oscillations du tablier du pont de Tacoma (État de Washington en novembre 1940).

b) La résonance en électricité.

La résonance d'intensité d'un circuit RLC a été étudiée au chapitre précédent. Citons une application courante.

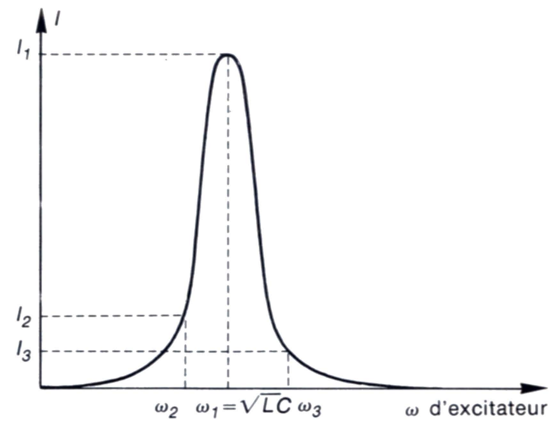
• **Accord d'un récepteur radio sur une station émettrice :** vous avez étudié en classe de Première le principe de la radiodiffusion par modulation d'amplitude : les signaux sonores transformés en signaux

électriques par un micro servent à moduler une onde électromagnétique porteuse. A chaque émetteur a été attribuée une fréquence d'onde porteuse : pour la gamme des ondes moyennes par exemple, les fréquences appartiennent à l'intervalle 500 kHz-1 500 kHz.
Un récepteur reçoit simultanément les ondes électromagnétiques de tous les émetteurs en cours de fonctionnement, c'est-à-dire que, par l'intermédiaire de son antenne, il est mis en vibrations forcées sur toutes les fréquences correspondantes.

Pour n'entendre qu'un seul de ces émetteurs, on utilise une résonance électrique aiguë : le circuit d'entrée du récepteur, excité par l'antenne, est un circuit RLC de bande passante étroite et dont les éléments L et C sont réglables à volonté ; en choisissant un couple de valeurs convenables de L et C tel que par exemple $\sqrt{LC} = \omega_1$, on fait entrer le circuit en résonance sur l'émetteur désiré de pulsation ω_1, cependant que les oscillations forcées provoquées par les autres émetteurs gardent une amplitude négligeable (figure 9).

On sait que le signal porteur ainsi sélectionné doit être ensuite démodulé pour restituer le signal sonore (voir cours de Première).

Un récepteur radio reçoit simultanément les ondes provenant de plusieurs émetteurs ; par un réglage convenable, il n'entre en résonance que sur l'un d'eux, ce qui permet de n'entendre qu'une seule émission.



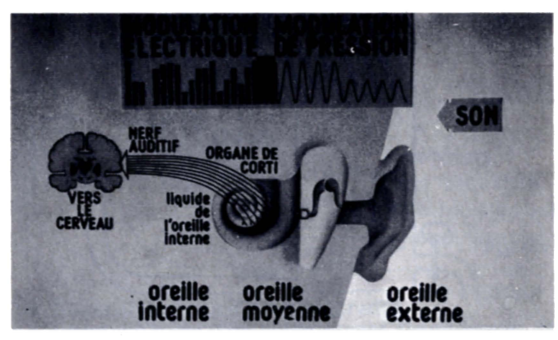
9. Accord d'un récepteur sur un émetteur.
L'antenne reçoit les ondes de 3 émetteurs, de pulsations ω_1, ω_2, ω_3. Supposons que ces 3 ondes aient même amplitude : pour l'accord réalisé ici sur ω_1, les courants induits dans le récepteur sont dans le même rapport que I_1, I_2 et I_3, donc l'émetteur ω_1 est fortement favorisé. En modifiant la capacité C du circuit d'entrée on déplace la courbe de résonance, ce qui permet de favoriser ω_2 par exemple.

c) La résonance en électro-acoustique.

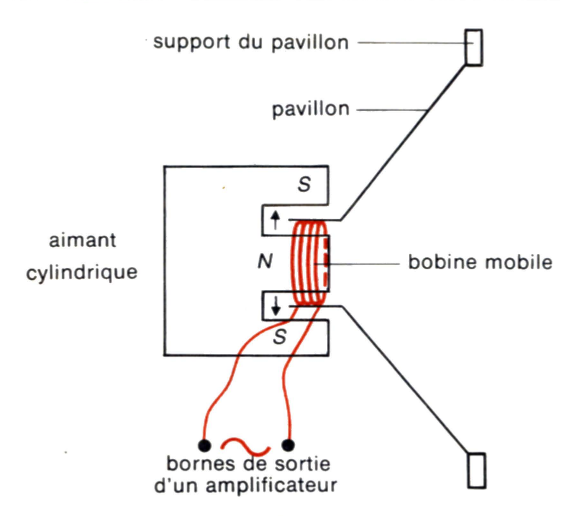
- On classe dans l'électro-acoustique toutes les techniques d'enregistrement et de restitution de sons par la combinaison de moyens électriques et mécaniques ; on y utilise les microphones, les têtes de lecture de disques, de bandes magnétiques, les amplificateurs, les haut-parleurs, et enfin évidemment l'oreille humaine.

- La plupart de ces composants sont des oscillateurs mis en vibrations mécaniques ou électriques forcées. Pour obtenir une restitution convenable des sons, il faudra **éviter l'apparition de résonances** qui favoriseraient plus particulièrement certaines fréquences. Citons quelques exemples.

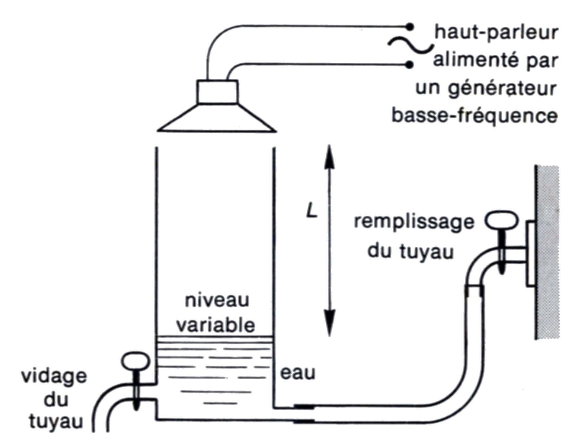
- **Le tympan de l'oreille humaine** est une membrane qui entre en vibration sous l'effet des forces dues à la pression sonore. Cette membrane est très amortie, ce qui évite les résonances. En général l'oreille est sensible aux sons dont les fréquences appartiennent à l'intervalle 20 Hz-15 000 Hz, avec une sensibilité maximale aux environs de 2 000 Hz (figure 10).



10. Coupe longitudinale d'une oreille : le tympan ferme le fond de l'oreille externe et vibre sous l'effet des excitations sonores. Ces vibrations sont transmises aux éléments nerveux de l'oreille interne.



11. Haut-parleur. Une bobine, plongée dans le champ magnétique d'un aimant permanent cylindrique, subit une force et un déplacement parallèles à l'axe du haut-parleur lorsqu'elle est traversée par un courant. Lorsque le courant utilisé est alternatif la bobine et le pavillon qui la soutient vibrent à la fréquence du courant, ce qui produit un son.



12. Résonances de la colonne d'air d'un tuyau. La masse d'air contenue dans le tuyau a plusieurs fréquences de résonance et ces résonances sont aiguës. Les fréquences de résonance dépendent de la longueur du tuyau.

• **Le haut-parleur** dont le principe est décrit figure 11 est un oscillateur mécanique (masse suspendue à un pavillon élastique) caractérisé par une fréquence propre de vibration ; il peut donc entrer en résonance sur une certaine fréquence : on cherche à éviter ce phénomène sur les haut-parleurs de qualité. La caisse (baffle) dans laquelle est enfermé le haut-parleur n'est pas une caisse de résonance : son rôle est, au contraire, d'étouffer les éventuelles résonances du haut-parleur.

• **Le microphone :** il en existe différents types mais tous contiennent une pièce mobile mise en mouvement par les forces de pression sonore. **Le microphone électrodynamique** peut être considéré comme un haut-parleur fonctionnant en sens inverse : le son met en mouvement un pavillon et une bobine qui, en se déplaçant dans un champ magnétique, produit une f.é.m. d'induction.
On comprend donc que des problèmes de résonance puissent intervenir dans le fonctionnement des microphones.

d) La résonance en acoustique.

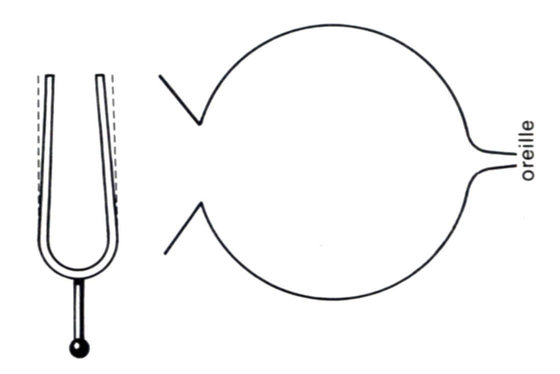
En dehors du haut-parleur déjà étudié, les sources sonores sont essentiellement constituées de cordes vibrantes (violon, guitare...), de tuyaux contenant de l'air (orgue, flûte, trompette...), ou de lames vibrantes (harmonica, accordéon...).
Quelques expériences vont nous montrer que ces systèmes sont des résonateurs ; mais l'étude détaillée des cordes vibrantes et des tuyaux sonores ne sera faite que dans le chapitre 19.

• **Résonances de la colonne d'air d'un tuyau.**
— La figure 12 montre un tuyau que l'on peut remplir plus ou moins d'eau, ce qui délimite une colonne d'air de longueur L variable. Un haut-parleur émet un son de fréquence N qui excite les vibrations de la colonne d'air.
Faisons varier progressivement N, le son perçu est considérablement renforcé pour plusieurs valeurs bien déterminées de N : dans chaque cas il s'agit d'une résonance, cette résonance est aiguë ; de plus le tuyau a plusieurs fréquences de résonance (nous verrons plus tard qu'il possède plusieurs fréquences propres de vibration).
Enfin ces fréquences de résonance dépendent de la longueur L du tuyau, comme on peut le voir en modifiant le niveau de l'eau.

— Rappelons l'expérience du diapason posé sur sa caisse de résonance (figure 2) : la caisse a des dimensions telles que sa masse de gaz entre en résonance lorsqu'elle reçoit les vibrations de son diapason. Mais il n'y a généralement pas résonance si on change de diapason.

— Les résonateurs de Helmholtz (figure 13) sont des cavités sphériques dont la masse d'air entre en résonance sur les vibrations d'un diapason, d'un haut-parleur, de fréquence appropriée ; la fréquence de résonance diminue quand le rayon du résonateur augmente.

Le tympan de l'oreille, le micro et le haut-parleur doivent avoir des courbes de réponse très plates, afin de ne favoriser aucune fréquence sonore.

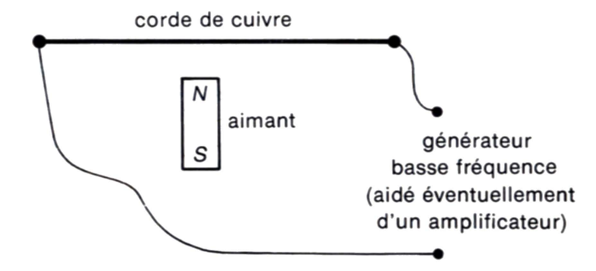


13. Résonateur de Helmholtz.

• **Résonances d'une corde :** la figure 14 montre une corde de cuivre tendue entre deux points, parcourue par un courant sinusoïdal de fréquence N et plongée dans le champ magnétique d'un aimant permanent. On sait qu'elle est alors sollicitée par une force sinusoïdale de fréquence N.
Faisons varier progressivement N : la corde ne se met à vibrer fortement que pour certaines valeurs bien déterminées de N. Dans chaque cas, il s'agit d'une résonance, chaque résonance est aiguë, et il y a plusieurs fréquences de résonance (nous verrons plus tard qu'une corde possède plusieurs fréquences propres de vibration). On peut voir aussi que ces fréquences de résonance dépendent de la longueur et de la tension de la corde.

• **L'oscillateur est un sélecteur de fréquence :** pour vibrer, un tuyau, une corde, ou une lame, doit être excité : on souffle dans la flûte, l'orgue ou l'harmonica, on frotte la corde avec un archet...
On peut alors se demander pourquoi la même excitation appliquée à des tuyaux (des cordes, des lames) de longueurs différentes produit des sons différents ?
En fait l'excitation produit un mélange de vibrations dont les fréquences s'étalent sur une très large gamme : comme chaque tuyau, corde ou lame entre en résonance aiguë sur l'une de ses fréquences propres, il **sélectionne et favorise** celle-ci dans le mélange qui lui est fourni par l'excitateur (comme le poste récepteur sélectionne une fréquence dans le mélange des ondes électromagnétiques qu'il reçoit).
Et ainsi on n'entend que la ou les fréquences propres de l'oscillateur, qui dépend en particulier de sa longueur.

Cette question sera reprise au chapitre 19 pour montrer comment les fréquences propres d'une corde, d'un tuyau, dépendent de la longueur et d'autres facteurs physiques.



14. Résonances d'une corde vibrante.
La corde subit des vibrations forcées de fréquence N, celle du générateur. Elle n'entre en résonance que lorsque N est égale à l'une de ses fréquences propres ; les valeurs de celles-ci dépendent de la tension et de la longueur de la corde.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- Un oscillateur entre en vibrations ________ lorsqu'on lui impose de vibrer avec une fréquence quelconque.
- La réponse d'un oscillateur mécanique se mesure généralement par l' ________ de ses oscillations ; la courbe de réponse en décrit les variations en fonction de la pulsation de ________ .
- La réponse est maximale pour une pulsation d'excitation voisine de la ________ de l' ________ ; l'oscillateur est alors en ________ .
- Un oscillateur peu amorti donne une résonance ________ , elle est au contraire ________ si l'oscillateur est plus amorti. L'amortissement de l'oscillateur a aussi une influence sur la ________ de résonance.
- Dans la construction mécanique ou automobile, et en électro-acoustique, on cherche généralement à ________ les résonances. Dans un récepteur radio, on utilise une résonance ________ pour réaliser ________ sur une station émettrice. La corde vibrante et le tuyau sonore donnent des résonances ________ et sur ________ fréquences.

Petites questions.

1. La résonance d'une lame vibrante est-elle aiguë ou floue ?

2. Comment est la résonance d'un écouteur téléphonique ?

3. Que risque-t-il d'arriver à un oscillateur très peu amorti si on le fait entrer en résonance ?

4. Certaines enceintes acoustiques (haut-parleur dans un baffle) donnent un « effet de tonneau ». De quoi s'agit-il ?

Exercices expérimentaux.

5. Toussez, poussez un cri devant un piano. Que constatez-vous ? Recommencez avec un cri plus aigu ou plus grave.

6. Mettez de l'eau, à différents niveaux, dans une série de verres identiques (et résistants) puis frappez sur chaque verre : vous obtenez des sons plus ou moins aigus ; étudiez l'influence du niveau d'eau sur la hauteur du son. Interprétez. Ajustez les niveaux pour vous fabriquer un instrument de musique puis jouez votre air favori.

7. Entre deux plaquettes de bois, serrez deux lames de scie à métaux identiques ; faites-en vibrer une et retouchez sa longueur libre jusqu'à ce que l'autre lame entre en résonance ; comment est alors la longueur de la lame excitatrice ?
Peut-elle prendre d'autres longueurs donnant la résonance, sans modifier la longueur de la lame résonateur ?

8. Étudiez le fonctionnement d'une boîte à musique et voyez comment la hauteur du son émis par une lamelle dépend de sa longueur.

9. Fixez une plaque de contre-plaqué en porte à faux au bord d'une table ; posez aussi au bord de la table une perceuse électrique possédant un variateur de vitesse, faites la tourner à différents régimes. Mettez en évidence la ou les fréquences de résonance de la plaque de bois. Montrez que sa longueur libre a une influence sur ces fréquences. Mettez aussi un coussin sur la plaque et voyez son effet.

10. Une automobile étant à l'arrêt, son moteur tournant à différents régimes, recherchez les pièces qui entrent en résonance (l'expérience réussit d'autant mieux que la voiture est plus vieille).

11. Une lamelle d'harmonica, de boîte à musique, est un résonateur aigu, alors qu'une membrane d'écouteur téléphonique a une résonance floue : regardez leurs modes de fixation et concluez.

12. Mettez un récepteur radio en marche sur la gamme des ondes moyennes, réalisez l'accord sur un émetteur donné, déterminez les limites de fréquence à partir desquelles l'émetteur devient inaudible. Pouvez-vous avoir ainsi une idée de la largeur de la bande passante de votre récepteur ?
Recommencez sur d'autres gammes de fréquences et comparez.

13. **Tôle ondulée.**
Une piste, horizontale en moyenne, présente des variations périodiques de niveau : des bosses se succèdent à distance régulière égale à l. Une voiture parcourt cette piste à la vitesse V.
Montrez qu'il faudra éviter de faire rouler la voiture au voisinage d'une certaine vitesse V_0 que l'on demande de calculer : on assimilera la voiture à une masse M suspendue sur un ressort de constante de raideur K. Quel est le rôle des amortisseurs de la voiture ?

Approfondissement.

14. Mettez quelques pièces de monnaie dans divers récipients et disposez-les devant un électrophone diffusant une musique assez forte. Peut-être obtiendrez-vous des résonances. Essayez de voir si le support des récipients (tabouret, coussin...) a une influence sur l'acuité de la résonance.

15. **Trépidations d'une roue de voiture.**
Soit une voiture qui roule à la vitesse V sur une route droite et parfaitement horizontale. Supposons qu'une de ses roues soit mal équilibrée parce que son centre d'inertie est hors de son axe de rotation. Cette roue effectue alors des oscillations dans un plan vertical et entre en résonance pour une certaine vitesse de la voiture.
a) Déterminez la fréquence d'excitation de la roue de rayon R pour une vitesse de translation V de la voiture ; quelle est l'action responsable de cette excitation périodique ?
b) Quelle est la masse de l'oscillateur et où sont ses « ressorts » ?
c) Quels sont les systèmes, non solides, qui contribuent à l'amortissement et limitent l'amplitude des oscillations de la roue à la résonance ?

16. **Accord d'un récepteur radio.**
Le circuit d'entrée d'un récepteur radio est constitué d'une bobine d'inductance $L = 200\ \mu H$ et de résistance $0,1\ \Omega$, et d'un condensateur variable par rotation de lames mobiles devant des lames fixes : la rotation est repérée par l'angle θ, la capacité varie proportionnellement à θ et on a $C = 0$ pour $\theta = 0$, $C = 0,15 \cdot 10^{-9}$ F pour $\theta = 180°$.
Le récepteur est accordé sur la longueur d'onde $\lambda_0 = 300$ m. Quelles sont les valeurs de C et θ, soient C_0 et θ_0 ?
Quelle est l'intensité qui parcourt le circuit sachant que l'onde électromagnétique induit une f.é.m. de valeur efficace $0,5\ \mu V$?

Quelle est la puissance consommée dans le circuit ? Quelles valeurs θ_1 ou θ_2 doit-on donner à θ pour que le courant dans le circuit tombe à 1/1 000 de la valeur précédente ?
Sur quelles longueurs d'onde λ_1 ou λ_2 le circuit sera-t-il alors accordé ?

Réponses : $C_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-10}$ F, $\theta_0 = 152°$, $I = 5 \cdot 10^{-6}$ A, $P = 2{,}5 \cdot 10^{-12}$ W,
$C_1 = 1{,}17 \cdot 10^{-10}$ F, $\theta_1 = 140°7$, $\lambda_1 = 288{,}7$ m ou $C_2 = 1{,}37 \cdot 10^{-10}$ F, $\theta_2 = 165°1$, $\lambda_2 = 312{,}7$ m.

17 Résonance d'un oscillateur de translation.

a) Une masse m est suspendue à un ressort de constante de raideur k. Quelle est la période propre des oscillations verticales de ce système s'il n'y a pas de frottement ?

b) La masse m est soumise, de plus, à des frottements proportionnels à la vitesse, de la forme $f = -h\dfrac{dz}{dt}$, z étant l'élongation verticale par rapport à la position d'équilibre. Quelle est l'allure de la courbe des variations de z en fonction du temps, m ayant été écartée verticalement de sa position d'équilibre, puis abandonnée sans vitesse initiale ?

c) La masse m est maintenant soumise à l'action du ressort, aux frottements et à une force verticale sinusoïdale $f = f_0 \cos \omega t$; m prend un régime de vibrations forcées de la forme :

$$z = Z_m \cos(\omega t - \varphi),$$

$$\frac{dz}{dt} = \omega Z_m \cos(\omega t - \varphi + \pi/2).$$

Écrivez l'équation différentielle du mouvement de m. Donnez la construction de Fresnel traduisant cette équation différentielle, puis déduisez-en Z_m et φ.
Qu'observe-t-on si on fait varier ω en gardant f_0 constant : donnez l'allure des courbes de réponse d'amplitude Z_m et de vitesse V_m en fonction de ω.
Pour quelle valeur de ω, V_m est-elle maximale et comment ce maximum varie-t-il avec le coefficient de frottement h ?

Réponses : **a)** $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

b) voir figure 25, chapitre 00 ;

c) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{h\omega}{k - m\omega^2}$,

$$Z_m = \frac{f_0}{\sqrt{h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}},$$

$$V_m = \frac{f_0}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2}}$$

V_m est maximale pour $\omega = \omega_0$, $V_{mm} = \dfrac{f_0}{h}$.

18 Résonance d'un circuit *RLC* série.

Un circuit électrique comprend une bobine d'inductance L et de résistance R montée en série avec un condensateur de capacité $C = 5{,}48$ µF. L'ensemble constitue un dipôle *RLC* série. Un générateur maintient aux bornes du dipôle une différence de potentiel sinusoïdale de valeur efficace $U = 93$ mV et de fréquence N variable.
On mesure l'intensité efficace du courant I dans le circuit pour différentes valeurs de la fréquence N. Les résultats obtenus sont les suivants :

N Hz	160	180	200	205	210	215	220	225	230	240	250	270	300
I mA	1,0	1,8	4,3	6,0	8,1	9,3	7,2	5,7	4,7	3,2	2,4	1,5	1,0

1) Tracez la courbe $I = f(N)$ dans l'intervalle de fréquence compris entre 160 et 300 Hz. On utilisera les échelles suivantes : en ordonnée 1 cm représente 0,5 mA ; en abscisse 1 cm représente 10 Hz. La valeur maximale du courant I_0 est obtenue pour la fréquence $N_0 = 215$ Hz.

2) En utilisant les résultats expérimentaux, calculez R et L.

3) Soient N_1 et N_2 ($N_2 > N_1$) les valeurs de la fréquence pour lesquelles l'intensité efficace du courant est $I_1 = I_2 = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$. On appelle φ_1 l'avance de phase de la tension sur l'intensité lorsque la fréquence est N_1 ; le déphasage est φ_2 lorsque la fréquence est N_2.

a) Calculez φ_1 et φ_2.

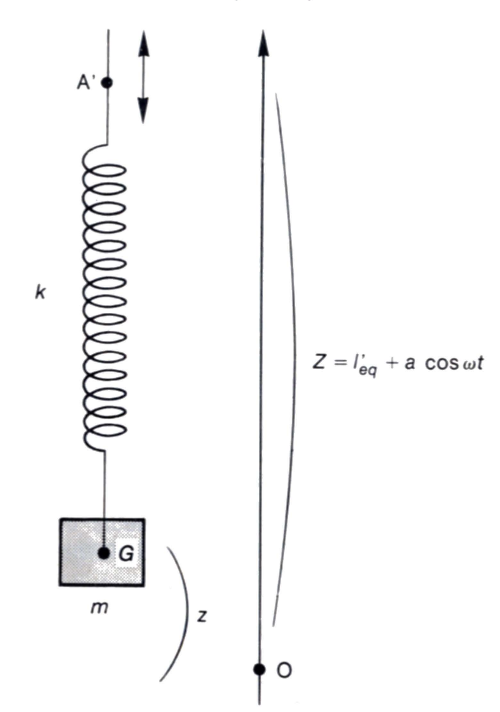
b) En exprimant tg φ, donnez les deux équations du second degré que vérifient N_1 et N_2, résolvez-les et vérifiez vos résultats sur la courbe. (D'après problème de bacc.).

Réponses : $R = 10\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H ; $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{4}$,

$\varphi_2 = +\dfrac{\pi}{4}$; $-L\omega_1^2 - R\omega_1 + \dfrac{1}{C} = 0$ et $L\omega_2^2 - R\omega_2 - \dfrac{1}{C} = 0$.

19 Oscillations forcées de translation.

On étudie le dispositif utilisé dans le cours (figure 3) pour produire les oscillations forcées d'une masse m suspendue à un ressort de constante de raideur k. Appelons longueur l du ressort la distance entre son point d'attache supérieur A' et le centre d'inertie G de la masse m : z repère la position de G et Z



repère sur le même axe la position de A' (figure ci-contre) ; $z = 0$ est la position d'équilibre, correspondant à $Z = l_{éq}$.
En mettant en marche le moteur (figure 3), on donne à A' un mouvement de la forme $Z = l_{éq} + a \cos \omega t$.

a) Exprimez en fonction de Z et z la force exercée par le ressort sur la masse m.

b) Formez l'équation différentielle du mouvement de la masse m, sachant que la force de freinage exercée par le liquide est de la forme $f' = -h \dfrac{dz}{dt}$.

c) La masse m prend un mouvement d'oscillations forcées de la forme $z = Z_m \cos (\omega t - \varphi)$. Déterminez Z_m et φ puis discutez.

Réponses :
a) $f = k(Z - z - l_0)$;
b) $m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = ka \cos \omega t$;
c) par la méthode complexe on trouve $(k - m\omega^2 + jh\omega)\, Z_m \,.\, e^{-j\varphi} = ka$; en posant $ka = f_0$, on retrouve ensuite les résultats de l'exercice 17 ci-dessus.

20 Résonance d'un oscillateur de rotation.
La figure ci-contre décrit un pendule de torsion formé d'une tige horizontale suspendue par son milieu à un fil de torsion de constante de torsion C. La tige a un moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation vertical ; la rotation est repérée par l'angle α compté à partir de la position d'équilibre. La tige porte une palette qui trempe dans un liquide : celui-ci exerce sur le pendule un couple de freinage de moment

$$\mathcal{M}' = -K \frac{d\alpha}{dt}.$$

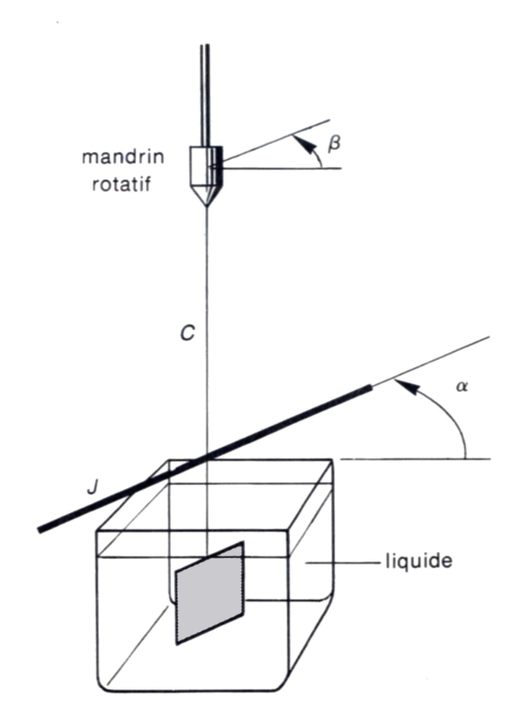
Le mandrin auquel est suspendu le fil de torsion est animé d'un mouvement de rotation sinusoïdal autour de la verticale, de la forme $\beta = a \cos \omega t$.
A l'équilibre, $\alpha = \beta = 0$.

a) Exprimez, en fonction de α et β, l'angle de torsion du fil ; le moment du couple de torsion exercé par le fil sur la tige ; le moment du couple exercé par le mandrin sur le fil.

b) Formez l'équation différentielle du mouvement de la tige.

c) Le pendule prend un mouvement d'oscillations forcées de la forme $\alpha = \alpha_m \cos (\omega t - \varphi)$. Déterminez α_m et φ.

Réponses : $J\ddot{\alpha} + K\dot{\alpha} + C\alpha = Ca \cos \omega t$
$\alpha_m\, e^{-j\varphi}(C - J\omega^2 + jK\omega) = Ca$.



18 Ondes planes progressives sinusoïdales.

1. Quelques rappels sur les ondes progressives.
2. L'onde plane progressive sinusoïdale.
3. Quelques exemples d'ondes progressives.
4. Propagation de l'énergie dans une onde progressive.
5. Interférence de deux ondes progressives sinusoïdales.



Pic du Midi. L'observatoire du Pic du Midi reçoit des informations de l'Univers grâce aux ondes lumineuses. Le relais de télévision visible au premier plan utilise des ondes hertziennes.

En classe de Première, vous avez étudié des ondes progressives dans une corde, à la surface de l'eau...
Dans ce chapitre nous nous proposons de préciser cette étude dans le cas où les vibrations émises par la source sont des fonctions sinusoïdales du temps.

1. Quelques rappels sur les ondes progressives.

On obtient des **ondes progressives** à l'aide de sources émettant des **vibrations périodiques** qui se **propagent librement,** c'est-à-dire sans subir de réflexion.

a) Retards ; célérité.

Considérons deux points M_1 et M_2 quelconques de l'espace, soumis aux vibrations issues d'une source S (figure 1) ; M_2, plus éloigné de la source, vibre en retard par rapport à M_1.
Le retard temporel θ_{21} de M_2 sur M_1 est proportionnel à la distance $M_1 M_2$: les vibrations issues de S se propagent à vitesse constante.

- **La vitesse v de propagation** des vibrations est appelée **célérité.**
- Le retard temporel de M_2 sur M_1 est

$$\boxed{\theta_{21} = \frac{M_1 M_2}{v}}\ .$$

La célérité de la lumière dans le vide est très voisine de 300 000 km . s^{-1} ; celle du son dans l'air à 0°C est très voisine de 340 m . s^{-1}.

b) Milieux à une, deux, ou trois dimensions.

Une corde de faible épaisseur, tendue suivant Ox par exemple, est un milieu de propagation à une dimension. La surface de l'eau est à deux dimensions. L'air, qui peut propager le son ou la lumière, le vide qui peut propager la lumière, sont des milieux à trois dimensions.

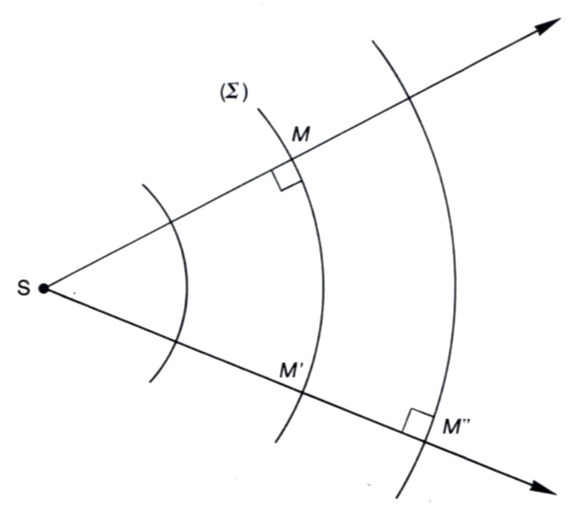
c) Surfaces d'onde ou surfaces équiphases.

- Ce sont les surfaces sur lesquelles les points **vibrent en phase,** c'est-à-dire ont même mouvement à tout instant.

S M$_1$ M$_2$

1. Dans un milieu où la célérité est v, le point M_2 vibre avec un retard temporel $\theta_{2.1} = \frac{M_1 M_2}{v}$ sur le point M_1.

Dans un milieu homogène, une source ponctuelle émet des ondes sphériques. Très loin de la source ces ondes paraissent planes.



2. Ondes sphériques produites par une source ponctuelle S. M et M' sont sur une même surface d'onde (Σ), ils vibrent en phase. En chaque point M la propagation se fait dans la direction perpendiculaire à la surface d'onde (Σ) au point M considéré : ici cette direction est celle qui joint la source S au point M.



3. Les ondes produites par S peuvent être considérées comme pratiquement planes au voisinage du point M situé à grande distance de S.

- Pour une surface d'onde donnée, la **durée de propagation** des vibrations de la source jusqu'à la surface est la même quel que soit le point considéré de la surface.
- Dans un milieu à trois dimensions **homogène,** une source ponctuelle S fournit des surfaces d'onde sphériques centrées sur S (figure 2).
- A la surface de l'eau, les courbes d'onde produites par une source ponctuelle sont des cercles (les rides).
- De plus la direction de propagation est en chaque point perpendiculaire à la surface d'onde Σ en ce point (figure 2).

d) Surface d'onde plane.

Si l'on s'éloigne beaucoup de la source S, les surfaces d'onde paraissent planes en restant au voisinage d'un point M (figure 3).

- A la limite, une source placée à **l'infini** (très grande distance) produit des **ondes planes.**

- **Remarque 1 :** on sait que dans le cas de la lumière, les lentilles servent à **remodeler** les surfaces d'onde : par exemple les ondes sphériques émises par une source ponctuelle S sont transformées en ondes planes par une lentille convergente si S est placée au foyer objet F de la lentille. Le faisceau conique a été transformé en faisceau cylindrique (figure 4).

- **Remarque 2 :** dans une onde sphérique, l'amplitude des vibrations diminue quand on s'éloigne de la source.

Dans une onde plane l'amplitude des vibrations est indépendante de la distance si le milieu de propagation n'est pas absorbant.

e) Expression mathématique de la propagation unidimensionnelle.

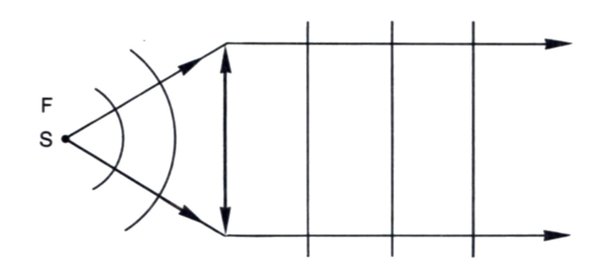
Pour une propagation avec une célérité v, qui a lieu dans la **direction des x,** et vers les **x positifs,** l'état vibratoire s d'un point M(x) **dépend à la fois** du temps et de l'abscisse x de ce point par la **combinaison** de ces deux variables $t - \frac{x}{v}$:

$$\boxed{s = f\left(t - \frac{x}{v}\right)}\ .$$

Cette relation traduit le fait que $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$ ont même mouvement à condition de considérer M_1 à la date t_1, et M_2 à la date t_2 telles que :

$$t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{v}\text{, donc : } t_2 - \frac{x_2}{v} = t_1 - \frac{x_1}{v}\,;$$

$$f\left(t_2 - \frac{x_2}{v}\right) = f\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right)$$



4. La source S étant au foyer objet d'une lentille convergente, celle-ci transforme des ondes lumineuses sphériques en ondes planes.

• **Remarque :** dans le cas d'une corde tendue, c'est le milieu de propagation qui impose une propagation unidimensionnelle.
Par contre, dans le cas d'un milieu à deux ou trois dimensions, on a une propagation unidimensionnelle parce que la source a été placée à l'infini. Dans ce cas on a des plans d'onde, par exemple (Σ_1) et (Σ_2) (figure 5) :

M'_1 et M_1 sont en phase ;

M'_2 et M_2 sont en phase ;

$\theta_{21} = \dfrac{x_2 - x_1}{v}$ est le retard des points de (Σ_2) sur ceux de (Σ_1) ;

$s = f\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$ s'applique à tous les points de l'espace.

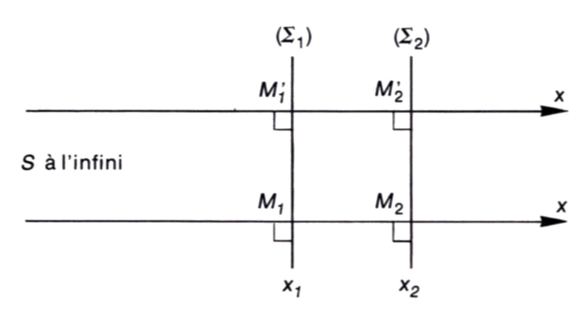
f) Période, fréquence et longueur d'onde.

Soit T la période de la vibration émise par la source, N sa fréquence $\left(N = \dfrac{1}{T}\right)$ (N exprimée en Hz et T en secondes).

• En une période, la vibration se propage d'une **longueur d'onde :**

$$\boxed{\lambda = vT = \frac{v}{N}}\,.$$

• Deux points alignés avec la source et distants de $n\lambda$, ont l'un sur l'autre un retard temporel égal à nT : si n est un **entier,** ces points vibrent **en phase** $[T]$; si n est un **entier plus un demi,** ces points vibrent en **opposition de phase.**



5. Propagation par onde plane : M_1 et M'_1 vibrent en phase ; il en est de même pour M_2 et M'_2.

2. L'onde plane progressive sinusoïdale.

a) Définitions.

Supposons que la **propagation se fasse parallèlement à O*x*,** et dans le sens des ***x* positifs.**
Soit s la grandeur vibratoire : déplacement transversal d'une corde, longitudinal d'un ressort, champ électrique d'une onde électromagnétique, pression acoustique d'une onde sonore (différence entre la pression instantanée et la pression de repos d'un gaz).

• On dit que l'on a une propagation par **onde plane sinusoïdale** si la grandeur vibratoire s est de la forme :

$$\boxed{s = a \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right]} .$$

• a est **l'amplitude** de la vibration (s varie entre $+a$ et $-a$) ;

• ω est la **pulsation** de la vibration ;

• $\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi$ est la **phase instantanée** du mouvement ; elle s'exprime en radian ;
φ est la phase à l'origine (valeur de la phase pour $x = 0$ et $t = 0$) ; un choix convenable de l'origine des x et des t permet d'annuler φ ; la pulsation ω s'exprime en radian par seconde puisque ωt s'exprime en radian.

b) Pulsation, période, fréquence et longueur d'onde.

• **Une fonction sinusoïdale** est une **fonction périodique :** nous savons qu'elle reprend la même valeur chaque fois que la phase augmente de 2π radians ; on peut faire varier la phase par variation du temps et de l'abscisse, simultanément ou séparément.

• **Période temporelle *T* :** fixons x ; la période temporelle T correspond à une augmentation du temps qui fait augmenter la phase de 2π : on doit donc avoir :

$$\omega\left(t + T - \frac{x}{v}\right) + \varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi + 2\,\pi.$$

Après simplification on trouve : $\omega T = 2\,\pi$,

$$\boxed{T = \frac{2\,\pi}{\omega}} \quad \text{ou} \quad \boxed{N = \frac{\omega}{2\,\pi}}.$$

Donc un point donné quelconque effectue des vibrations et se trouve dans le même état vibratoire chaque fois que s'écoule l'intervalle de temps T.

- **Période spatiale ou longueur d'onde λ :** fixons t ; la période spatiale λ correspond à une augmentation de l'abscisse x qui fait diminuer la phase de $2\,\pi$: on doit donc avoir :

$\omega\left(t - \dfrac{x + \lambda}{v}\right) = \omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right) - 2\,\pi$; après simplification on trouve :

$\dfrac{\omega\lambda}{v} = 2\,\pi$, $\boxed{\dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}}$ ou encore : $\lambda = v \,.\, \dfrac{2\,\pi}{\omega} = vT$

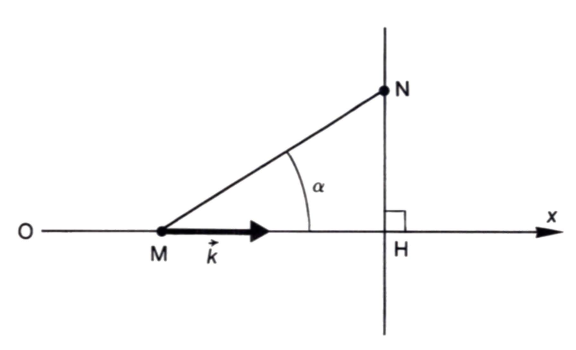
$$\boxed{\lambda = v\,T = \frac{v}{N}}.$$

Deux points vibrent en phase si leur distance, mesurée parallèlement à la direction de propagation, est un nombre entier de longueurs d'onde.

Donc, à un instant donné deux points quelconques ne sont généralement pas dans le même état vibratoire, mais deux points dont les abscisses diffèrent de $n\lambda$ (n entier) ont des phases qui diffèrent de $n2\,\pi$: ils vibrent en phase $[2\,\pi]$.
On retrouve une propriété fondamentale de la longueur d'onde rappelée plus haut.
Les propriétés de la période et de la longueur d'onde seront illustrées par quelques exemples concrets au paragraphe 3.

- **Autres expressions de l'équation de propagation :** avec les relations $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T}$ et $\dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$, l'expression $s = a \sin \omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$ peut aussi s'écrire : $s = a \sin\left(\omega\,t - \dfrac{2\,\pi}{\lambda}x\right)$; $s = a \sin 2\,\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$.

Le vecteur d'onde a, en chaque point, la direction et le sens de la propagation, et a pour norme $k = 2\frac{\pi}{\lambda}$.



6. N et H ont même retard sur M ; ce retard de phase vaut $\Delta\varphi = \vec{k} \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{k} \cdot \overrightarrow{MH}$.

c) Le vecteur d'onde $\vec{k}$.

L'étude d'une onde sinusoïdale fait apparaître l'importance pratique d'un vecteur appelé **vecteur d'onde $\vec{k}$.**

• **Définition et propriétés :** le vecteur d'onde $\vec{k}$ a en chaque point la direction et le sens de la propagation. Son module $k = \|\vec{k}\|$ se calcule à partir de la longueur d'onde par la relation :

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}.$$

En chaque point **le vecteur d'onde est perpendiculaire à la surface d'onde** passant par ce point. Dans le cas de l'optique le rayon lumineux et le vecteur d'onde sont colinéaires en chaque point.

• **Déphasage entre deux points :** étudions le cas d'une propagation par **ondes planes** dans un milieu **homogène** (figure 6) : $\vec{k}$ a même direction, celle de l'axe Ox, et même module, en tout point de l'espace.
Calculons le retard de phase $\Delta\varphi$ de H sur M à la même date t :

on a

$$s_M = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_M\right)$$

$$s_H = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_H\right)$$

$$\Delta\varphi_{\text{de H sur M}} = \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_M\right) - \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} s_H\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_H - x_M)$$

$$\Delta\varphi_{H\,.\,M} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x\,.$$

On peut d'ailleurs trouver ce résultat en remarquant que le retard de phase est proportionnel à la différence d'abscisse et vaut 2π pour une différence d'abscisse égale à λ. Or sur la figure 6, les points N et H appartiennent à la même surface d'onde, leurs vibrations ont la même phase, donc

$$\Delta\varphi_{\text{de N sur M}} = \frac{2\pi}{\lambda}\,\text{MH}$$

$$\Delta\varphi_{\text{de N sur M}} = \|\vec{k}\| \cdot MN \cos\alpha = \vec{k} \cdot \overrightarrow{MN}.$$

Le retard de phase entre deux points quelconques M et N est égal au **produit scalaire** du vecteur $\overrightarrow{MN}$ par le vecteur d'onde $\vec{k}$:

$$\boxed{\Delta\varphi_{\text{retard de N sur M}} = \vec{k} \cdot \overrightarrow{MN}} .$$

Si M et N reçoivent la même onde plane progressive de vecteur d'onde $\vec{k}$, le retard de phase de N sur M vaut $\Delta\varphi = \vec{k} \cdot \overrightarrow{MN}$.

En raison de cette relation, si dans l'onde plane caractérisée par $\vec{k}$ la vibration au point O a pour expression :

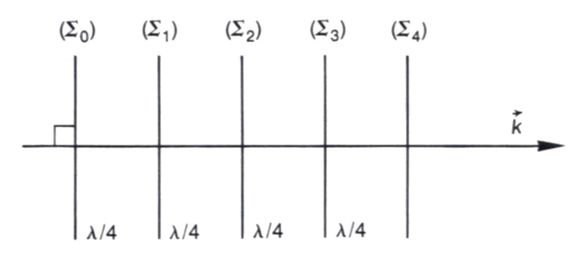
$$s_0 = a \sin \omega t ,$$

la vibration en un point M quelconque a pour expression :

$$\boxed{s = a \sin (\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})} .$$

• **Quelques distances remarquables entre plans d'onde :** rappelons que deux points vibrent en opposition de phase si leur déphasage est égal à π [2π], et en quadrature si leur déphasage est égal à $\pi/2$ [π].

La relation $\Delta\varphi = \vec{k} \cdot \overrightarrow{MN}$ peut être illustrée par la figure 7 sur laquelle sont tracés quelques plans d'onde distants de $\lambda/4$: les points de (Σ_0) sont en opposition de phase avec ceux de (Σ_2), en phase avec ceux de (Σ_4), en quadrature avance sur ceux de (Σ_1), ceux-ci sont en opposition de phase avec ceux de (Σ_3), etc.



7. Les points de (Σ_0) sont en phase avec ceux de (Σ_4); en opposition de phase avec ceux de (Σ_2)...

3. Quelques exemples d'ondes progressives.

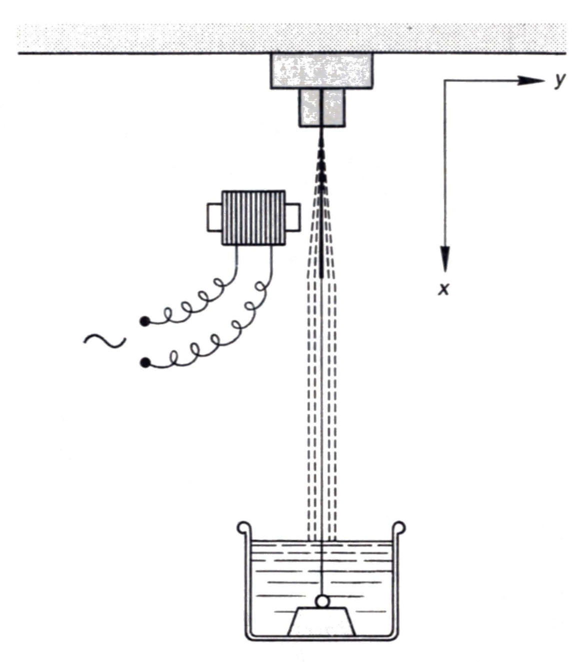
a) Propagation dans une corde.

• **Dispositif expérimental :** un vibreur est animé d'un mouvement sinusoïdal de fréquence N (N = 100 Hz si l'électro-aimant est alimenté par le courant du secteur) ; le vibreur provoque les oscillations latérales d'une corde dont l'extrémité plonge dans un cristallisoir d'eau : ainsi l'onde incidente propagée par la corde est-elle absorbée par l'eau, il n'y a pas d'onde réfléchie (figure 8). On observe par stroboscopie.

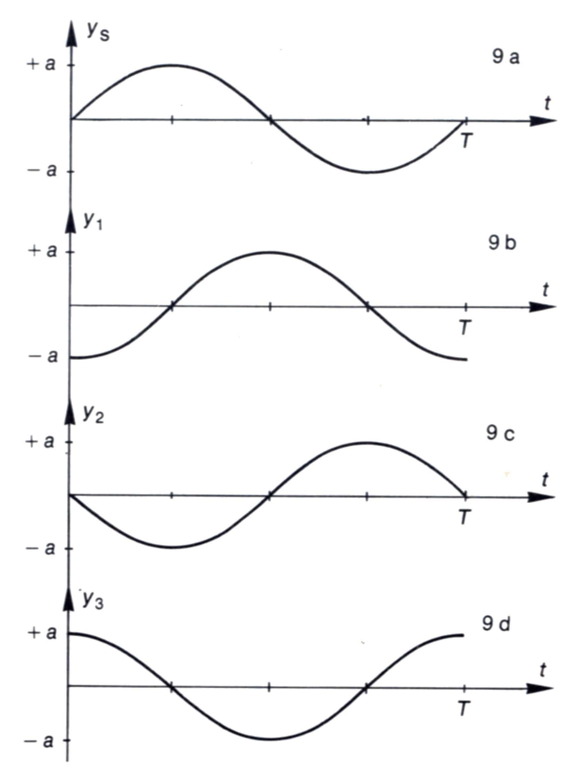
• **Équation de propagation :** la corde au repos est portée par l'axe Ox. A la date t un point M d'abscisse x subit un déplacement transversal

$$y_M = a \sin \left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right]$$

(ici s est le déplacement transversal y).



8. Dispositif permettant l'étude d'une onde progressive dans une corde.



9. Représentation des variations de $y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ en fonction du temps pour a) $x = 0$; b) $x = \lambda/4$; c) $x = \lambda/2$; d) $x = 3\lambda/4$.

Choisissons la date origine pour que le mouvement de la source soit $y_S = a \sin \omega t$; si de plus on choisit l'origine des x en S, on doit avoir $y_S = a \sin [\omega(t - 0) + \varphi]$, d'où $\varphi = 0$ et :

$$\boxed{y_M = a \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)}.$$

On peut aussi, pour établir l'expression de y_M, remarquer que M reproduit le mouvement de S avec un retard temporel $\frac{x}{v}$.

Avec l'expression transformée $y_M = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, on peut former le tableau ci-dessous qui donne les valeurs de y pour différentes valeurs de x et de t.

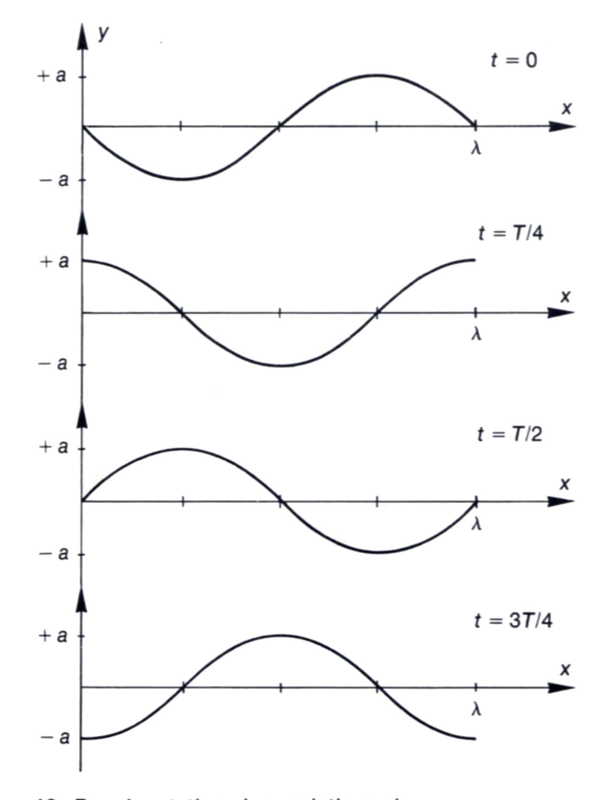
t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x					
0	0	$+a$	0	$-a$	0
$\frac{\lambda}{4}$	$-a$	0	$+a$	0	$-a$
$\frac{\lambda}{2}$	0	$-a$	0	$+a$	0
$\frac{3\lambda}{4}$	$+a$	0	$-a$	0	$+a$
λ	0	$+a$	0	$-a$	0

Quelques valeurs remarquables de $y_M = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$.

• **Étude des vibrations d'un point en fonction du temps :** on peut alors tracer la courbe représentative des vibrations d'un point M au cours du temps (figures 9a, b, c, d). On remarque par exemple que $M_2(x_2 = \lambda/2)$ vibre en opposition de phase avec S, que $M_1(x_1 = \lambda/4)$ et $M_3(x_3 = 3\lambda/4)$ sont en opposition de phase entre eux, que M_1 est en quadrature avance sur M_2...

• **Étude de la vibration y dans l'espace à une date fixée** : traçons la courbe des variations de y en fonction de x à une date fixée (figures 10a, b, c, d).
On remarque que deux points distants de λ vibrent en phase, deux points distants de $\lambda/2$ en opposition de phase ; on voit aussi que l'onde se propage de $\lambda/4$ pendant l'intervalle de temps $T/4$ donc de λ pendant T. Ces deux aspects sont bien conformes aux propriétés de la longueur d'onde.

• **Conclusion : double périodicité :** dans une onde progressive, la **phase de l'onde** dépend **à la fois** de l'espace et du temps ; elle est une fonction périodique du **temps de période T,** elle est une fonction périodique de **l'espace de période λ**.



10. Représentation des variations de $y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ en fonction de x, aux dates $t = 0$, $T/4$, $T/2$, $3\,T/4$. La période spatiale est égale à λ et l'onde progresse de λ au cours d'une période.

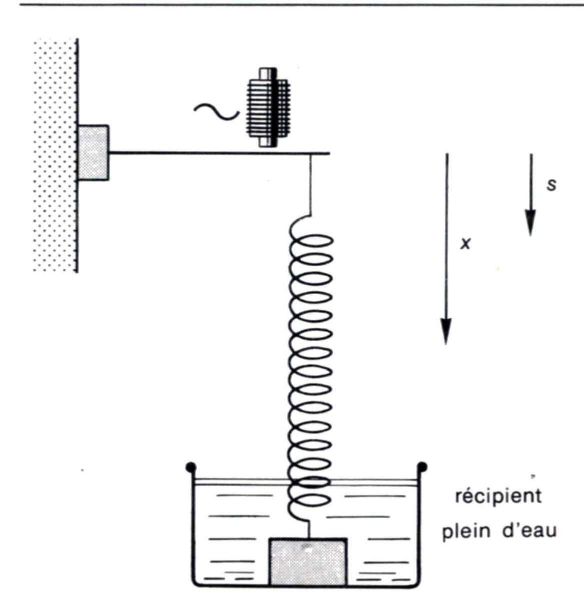
b) Propagation dans un ressort.

• **Dispositif expérimental :** on utilise un vibreur qui provoque une suite de compressions et de dilatations d'un ressort dont l'extrémité trempe dans l'eau d'un cristallisoir, pour éviter la réflexion. On observe par stroboscopie (figure 11 page 344).

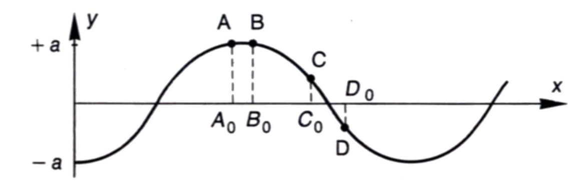
• **Équation de propagation et discussion :** ici s représente le déplacement d'une spire, parallèlement à l'axe Sx du ressort, par rapport à sa position de repos ; s est compté positivement dans le sens des x positifs. En prenant la source comme origine des x, on a $s_M = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, si le mouvement de la source est $s_S = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$; λ n'a évidemment pas la même valeur dans le ressort et dans la corde. Toute la discussion reste valable et les courbes des figures 9 et 10 sont utilisables.

Remarque.

Toutefois, alors que pour la corde les courbes $y = f(x)$ à t fixé pouvaient être considérées comme des photographies de la corde car il s'agissait de vibrations mécaniques transversales, dans le cas du ressort (vibrations longitudinales), les courbes $s = f(x)$ sont seulement un moyen de description de la propagation, complémentaire des tracés $s = f(t)$ à x fixé.



11. Onde progressive dans un ressort hélicoïdal. L'eau (rendue plus ou moins visqueuse avec de la glycérine), dans laquelle plonge l'extrémité fixe du ressort, sert à éviter la réflexion d'une onde vers la source de vibration.



12. Énergies dans une corde parcourue par une onde progressive. *AB* ne possède aucune énergie à la date *t*, alors que *CD* possède l'énergie maximale. A la date $t + T/4$, *AB* aura le maximum d'énergie, *CD* n'en aura plus. A la date $t + T/2$, les positions et vitesses auront les valeurs opposées à celles de la date *t* et ainsi, chaque élément de corde retrouvera l'énergie qu'il avait à la date *t*.

c) Autres exemples.

On peut rappeler les exemples cités en classe de Première :

— les ondes dans une échelle de perroquet,
— les ondes à la surface de l'eau,
— les ondes sonores,
— les ondes électromagnétiques.

4. Propagation de l'énergie dans une onde progressive.

• Au passage d'une onde progressive le milieu de propagation est soumis à des modifications : dans une corde ou un ressort il y a déplacement et déformation ; dans un gaz parcouru par un son il y a déplacement et variations de volume et de pression ; dans un milieu parcouru par une onde électromagnétique il y a variations d'un champ électrique et d'un champ magnétique. Ces modifications du milieu s'accompagnent de phénomènes énergétiques.

• Prenons le cas d'une corde parcourue par une onde progressive. A la date t (figure 12), l'élément de corde AB a une vitesse nulle et possède sa longueur naturelle $A_0 B_0$: il n'a ni énergie cinétique ni énergie potentielle de déformation.
Au contraire l'élément CD a sa vitesse maximale (vers le haut) et sa déformation maximale : il possède le maximum d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.
On démontre que dans le cas de l'onde progressive, les énergies cinétique et potentielle d'un élément quelconque de corde sont égales à chaque instant. L'énergie totale d'un élément de corde varie donc périodiquement entre zéro et un certain maximum, le même pour tous les éléments ; la période de variation est $T/2$: pour s'en convaincre on peut voir que par exemple CD retrouve une énergie maximale à la date $t + T/2$ où il repasse par la position $y = 0$ (figure 12).

• L'énergie est **transmise** de proche en proche dans la corde, elle se propage à partir de la source vers l'autre extrémité de la corde.
Pour toute onde progressive on pourrait donner une description analogue, avec éventuellement des formes d'énergie autres que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

5. Interférence de deux ondes progressives sinusoïdales.

L'interférence de deux ondes cohérentes sinusoïdales a été étudiée en classe de Première : ondes à la surface de l'eau, ondes sonores, hertziennes, lumineuses. Revenons sur cette question et utilisons mieux le fait que les ondes composantes sont sinusoïdales.

a) Rappel : superposition des petites vibrations.

Supposons que le passage d'une onde (1) produise en un point M une vibration caractérisée par le vecteur $\vec{u}_1$: $\vec{u}_1$ est le déplacement transversal d'une corde, longitudinal d'un ressort, le champ électrique d'une onde électromagnétique... De même une onde (2) produit en M une vibration $\vec{u}_2$ de même nature que $\vec{u}_1$.

Si le point M est soumis à la fois à l'onde (1) et à l'onde (2), la vibration $\vec{u}$ en M vaut $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$: cela suppose que l'élasticité du milieu ne soit pas dépassée, donc les mouvements doivent être de faible amplitude.

Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont des vibrations colinéaires sur une direction de vecteur unitaire $\vec{j}$, on a :

$$\vec{u}_1 = s_1 \vec{j}, \quad \vec{u}_2 = s_2 \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{u} = (s_1 + s_2)\vec{j}, \quad s = s_1 + s_2.$$

Cette condition sera réalisée dans les exemples qui suivront.

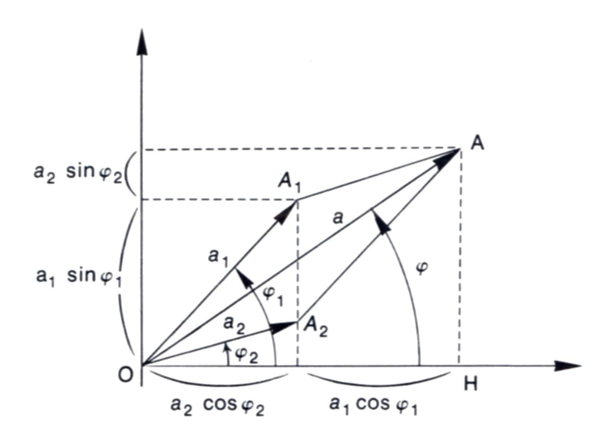
b) Interférence de deux ondes de même fréquence.

Les deux ondes qui interfèrent au point M sont sinusoïdales de la forme :

$$s_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)\,.$$

Nous supposerons d'abord leurs amplitudes constantes (elles ne varient pas avec la position du point M ; ce sont des ondes planes) et différentes : $a_1 \neq a_2$. Comme les ondes sont progressives, φ_1 et φ_2 dépendent de la position du point M par rapport aux sources et le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ en dépend aussi (il est proportionnel à la différence de marche en M) : différents exemples seront étudiés en exercices.



13. Détermination de $s = s_1 + s_2$ lorsque s_1 et s_2 sont des fonctions sinusoïdales de même pulsation ω.

La vibration résultante vaut à chaque instant :

$$s = s_1 + s_2 \,.$$

Comme les deux vibrations qui la composent, la vibration s est sinusoïdale, de même pulsation, de la forme :

$$s = a \cos(\omega t + \varphi) \,.$$

Déterminons a et φ, par la méthode de Fresnel par exemple : aux fonctions s_1 et s_2 on associe les vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$ (figure 13) dont la somme est le vecteur $\overrightarrow{OA}$ associé à la fonction s. Dans le triangle OA_2A on trouve :

$$a^2 = OA^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Dans le triangle OHA on trouve :

$$\text{tg}\, \varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2} \,.$$

Intéressons-nous au carré a^2 de l'amplitude a :

$$a^2 = a_2^2 + a_1^2 + 2\, a_1\, a_2 \cos\Delta\varphi \,.$$

La figure 14 donne ses variations en fonction de $\Delta\varphi$:

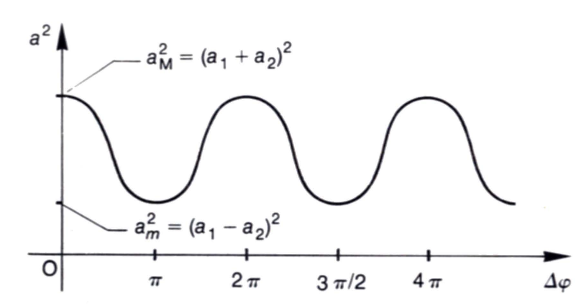
— Pour $\Delta\varphi = 0\ [2\pi]$, les vibrations sont **en phase,** $\cos\Delta\varphi = +1$, a^2 est **maximal,** $a_M = a_1 + a_2$.

— Pour $\Delta\varphi = \pi\ [2\pi]$, les vibrations sont en **opposition de phase,** $\cos\Delta\varphi = -1$, a^2 est **minimal,** $a_m = |a_1 - a_2|$.

— Lorsque $\Delta\varphi$ augmente progressivement de 2π, on passe par exemple d'un maximum au suivant, ou d'un minimum au suivant, d'une frange à la frange voisine homologue (c'est ce qui permet de définir l'interfrange).

— Si $a_1 = a_2$ les maxima correspondent à $a_M^2 = 4\, a_1^2$, soit ($a_M = 2\, a$) et les minima sont nuls : $a_m = 0$.

Nous ne nous étendrons pas plus sur ces questions : vous pouvez revoir votre cours de Première à ce sujet et vous reporter aux exercices qui sont proposés à la fin de ce chapitre.



14. Interférences : variation du carré de l'amplitude de la vibration résultante en fonction du déphasage entre les deux vibrations composantes.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- On appelle ______ la vitesse de propagation des ondes.
- Si deux points M_1 et M_2 sont alignés avec la source de vibrations, le retard temporel de M_2 sur M_1 vaut $\theta_{2.1}$ = ______.
- A la date *t*, une vibration se propageant dans la direction O*x* avec la célérité *v* est de la forme $s = f($______$)$.
- Tous les points d'une même surface d'onde vibrent ______ les uns par rapport aux autres. C'est pourquoi une telle surface est aussi appelée surface ______.
- Les surfaces d'onde données par une source placée à l'infini sont ______.
- Dans une onde plane progressive sinusoïdale de direction O*x*, la vibration au point d'abscisse *x* est, à la date *t*, de la forme $s = a$ ______. En un point donné la phase du mouvement augmente de 2π en une ______ ; à une date donnée elle diminue de 2π si *x* augmente d'une ______.
- Le vecteur d'onde $\vec{k}$ indique la direction de la ______, sa norme vaut k = ______.
- Le déphasage entre deux points quelconques M et N se calcule, dans une onde plane, à l'aide du vecteur $\vec{k}$, par la relation $\Delta\varphi$ = ______. Les points vibrant en phase $[2\pi]$ sont répartis dans une famille de plans parallèles équidistants de ______.

Petites questions.

1. Quels sont les plans équiphases d'une onde plane se propageant suivant Ox ?

2. Donnez l'expression générale d'une onde progressive sinusoïdale de pulsation ω, de célérité v, se propageant suivant l'axe Oz mais dans la direction des z négatifs.

3. Qu'y a-t-il de commun entre le rayon lumineux et le vecteur d'onde lumineux en un point donné de l'espace ?

4. Lorsque la lumière se réfracte de l'air dans le verre, sa célérité diminue brusquement : que se passe-t-il :

a) pour la direction du vecteur d'onde ;

b) pour la norme du vecteur d'onde ?

5. Sous quelles formes peut-on trouver de l'énergie à l'intérieur d'un ressort hélicoïdal où se propage une onde progressive longitudinale ?

Application immédiate.

6. La fréquence de l'onde porteuse émise par un émetteur radio est 164 kHz. Quelle est sa longueur d'onde ?

7. Quelle est la période d'une radiation lumineuse monochromatique de longueur d'onde 0,5 µm ?

8. Une onde progressive sonore de longueur d'onde 0,5 m se propage suivant Ox. Calculez le retard de phase de la vibration en N sur celle en M occupant les positions suivantes dont les coordonnées sont exprimées en mètre :

a) M (0,5 ; 0 ; 0), N (1 ; 0 ; 0).

b) M (0,5 ; 0 ; 0), N (0,75 ; 0 ; 0).

c) M (0,5 ; 0 ; 0), N (0,75 ; 1,58 ; 0).

d) M (0,5 ; 0 ; 0), N (0,625 ; 1,83 ; 2,57).

9. A la surface de l'eau, une source ponctuelle S produit des oscillations verticales d'amplitude 1 mm, de fréquence 50 Hz, se propageant avec la célérité $v = 40$ cm/s.

a) Donnez l'expression en fonction du temps de l'élongation verticale y d'un point M de la surface situé à la distance r de la source S sachant qu'en S la surface de l'eau est à son point le plus haut à la date origine.

b) Calculez cette élongation pour $r = 3{,}4$ cm, $t = 6{,}5 \cdot 10^{-2}$ s.

Réponses : **a)** en orientant y vers le haut et en négligeant la diminution de l'amplitude avec la distance à la source, on a $y = 10^{-3} \cdot \cos(100\,\pi t - 250\,\pi r)$;
b) $y = 10^{-3}$ m.

Approfondissement.

10. Une onde plane se réfracte à travers une surface plane séparant deux milieux où les célérités sont respectivement v_1 et v_2 et soit $\vec{t}$ un vecteur tangent à la surface. Montrez que les lois de la réfraction peuvent se résumer par l'égalité entre produits scalaires $\vec{t} \cdot \vec{k_1} = \vec{t} \cdot \vec{k_2}$ dans laquelle $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$ sont les vecteurs d'onde associés aux ondes incidentes et réfractées respectivement.

11 On étudie l'interférence de deux ondes planes de même longueur d'onde λ ; leurs directions de propagation appartiennent toutes deux au plan xOy et font les angles α et $-\alpha$ avec l'axe Ox. Les vibrations sont en phase en O.

a) Montrez à l'aide d'une figure et sans écrire les équations des ondes, que ces vibrations sont en phase en tout point de l'axe Ox et dans tout le plan xOz.

b) Montrez à l'aide d'une figure que leur déphasage vaut $2\,\pi$ au point $M_1\left(O, \dfrac{\lambda}{2 \sin \alpha}, 0\right)$ et plus généralement dans tout le plan parallèle à xOz et passant par M_1.

c) En déduire la forme et la position des surfaces sur lesquelles la vibration résultante a la plus forte amplitude en valeur absolue.

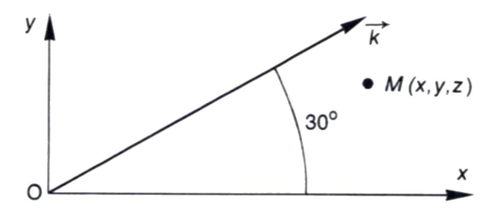
12. Une onde plane sinusoïdale de longueur d'onde λ se propage suivant une direction appartenant au plan xOy et faisant un angle de 30° avec Ox (figure ci-dessous).

a) Déterminez les composantes de son vecteur d'onde $\vec{k}$. Quel est le retard de phase φ d'un point M sur l'origine O quand M a les coordonnées suivantes :

b) $M\left(-\dfrac{\lambda}{2} ; \lambda\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; 0\right)$; **c)** $M\left(\lambda\dfrac{\sqrt{3}}{4} ; \dfrac{\lambda}{4} ; 0\right)$;

d) M (0 ; λ ; 0) ; **e)** M (λ ; λ ; 0).

Réponses : **a)** $\vec{k}\left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{\lambda} ; \dfrac{\pi}{\lambda} ; 0\right)$; **b)** $\varphi = 0$;
c) $\varphi = \pi$; **d)** $\varphi = \pi$; **e)** $\varphi = \pi(\sqrt{3} + 1)$.



13. Deux vibrations $y_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ interfèrent pour donner une vibration :

$$y = y_1 + y_2 = a \cos(\omega t + \varphi).$$

Déterminez a et φ par la méthode des nombres complexes.

Réponse : on trouve $a(\cos\varphi + j \sin\varphi) = a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 + j(a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2)$ d'où on tire a et φ (voir cours page 346).

14. Trouvez, par la méthode de Fresnel, la fonction $y = y_1 + y_2$ avec

$y_1 = 3 \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ et $y_2 = 4 \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Réponse : $y = 5 \cos(\omega t + \varphi)$
$\varphi = -8°, 1 = -0{,}142$ rd.

15. Même question que dans l'exercice précédent, en utilisant la méthode des nombres complexes.

16. Un tuyau d'axe Ox de longueur indéfinie contient de l'air dans lequel le son se propage par ondes planes avec la célérité $v = 340$ m/s. Dans ce tuyau sont placées deux sources sonores : S_1 coïncide avec l'origine O de l'axe, S_2 est sur l'axe Ox à l'abscisse $-0{,}875$ m ; elles émettent en opposition de phase et avec la même amplitude des sons de fréquence 680 Hz qui se propagent dans le sens des x positifs.

a) La vibration émise par S_1 a pour expression $s_1 = a \cos \omega t$ au point O : donnez son expression au point M(x).

b) Donnez l'expression en M(x) de la vibration émise par S_2.

c) Donnez l'expression de la vibration résultante en M ; quelle est la nature de l'onde résultante ?

d) S_1 émet maintenant un son de fréquence $N_2 = 678$ Hz : les vibrations correspondantes ont pour expressions en O $s_1 = a \cos \omega_1 t$, et $s_2 = a \cos \omega_2 t$, respectivement.
$s_1 = a \cos \omega_1 t$, et $s_2 = a \cos \omega_2 t$, respectivement.
Donnez leurs expressions en M(x) puis calculez l'expression de la vibration résultante en M. Que constaterait-on avec un micro placé en M ?

e) A quelle vitesse faudrait-il déplacer ce micro le long du tuyau pour qu'il reste constamment sur un maximum de son ?

Réponses :

a) $\lambda = 0{,}5$ m, $s_1 = a \cos(\omega t - 4\pi x)$;

b) $s_2 = a \cos\left(\omega t - 4\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $s = a\sqrt{2} \cos\left(\omega t - 4\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$,

onde progressive de célérité 340 m/s ;

d) $\lambda_1 = 0{,}5$ m, $k_1 = 4\pi$, $\lambda_2 = 0{,}5 \cdot \frac{680}{678}$ m,

$k_2 = 4\pi \frac{678}{680}$, $s_1 = a \cos(\omega_1 t - k_1 x)$,

$s_2 = a \cos(\omega_2 t - k_2 x)$,

$s = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right)$.

$\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right)$.

En M on entend un son de fréquence $\frac{N_1 + N_2}{2} = 679$ Hz dont l'amplitude varie en valeur absolue entre O et $2a$ avec une fréquence $N' = N_1 - N_2 = 2$ Hz : ce phénomène est appelé **battements.**

e) Le maximum, correspondant à $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x = n\pi$ (n entier), se déplace à la vitesse $v' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\frac{\omega_1}{v} - \frac{\omega_2}{v}} = v$

$v' = v = 340$ m/s.

17 Deux antennes émettent en phase avec la même amplitude et sur la même longueur d'onde λ, des vibrations électromagnétiques se propageant à la vitesse C ; ces antennes sont placées en $A_1\left(+\frac{d}{2}, 0, 0\right)$

et $A_2\left(-\frac{d}{2}, 0, 0\right)$ (figure ci-contre).

Un point P est situé dans le plan xOy, dans une direction telle que $(\widehat{Ox, OP}) = \theta$ et à une distance $OP = r$ très grande devant λ et d : il reçoit donc une onde plane progressive de chaque antenne, et ces ondes sont toutes deux émises par la même direction θ.

a) Sachant que l'onde (1) reçue par P de l'antenne (1) a pour expression

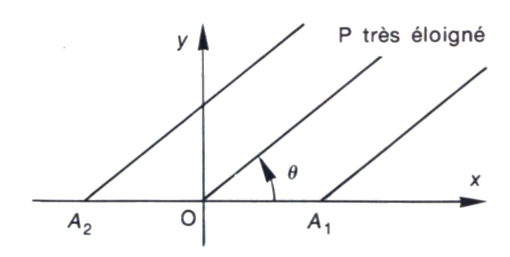
$E_1 = a \cos \omega\left(t - \frac{r}{C} + \frac{d \cos\theta}{2C}\right)$,

donnez l'expression E_2 de l'onde (2) reçue par P de l'antenne (2).

b) En déduire l'expression de l'onde résultante E ; quelle est son amplitude ?

c) On se place dans le cas où $d = \lambda$. Précisez les directions pour lesquelles l'amplitude de l'onde est maximale en valeur absolue et celles pour lesquelles elle est nulle. Vérifiez les résultats sur la figure.

d) On se place maintenant dans le cas où $d = \frac{\lambda}{2}$: mêmes questions.



Réponses :

a) $E_2 = a \cos \omega\left(t - \frac{r}{C} - \frac{d}{2C}\cos\theta\right)$;

b) $E = 2a \cos\left(\frac{\omega d}{2C}\cos\theta\right) . \cos \omega\left(t - \frac{r}{C}\right)$,

$A = 2a \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda} . \cos\theta\right)$;

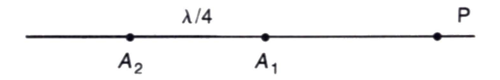
c) $|A| = 2a\,|\cos(\pi \cos\theta)|$, maxi pour $\theta = 0, \pi, \pm\frac{\pi}{2}$, nul pour $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$ $\theta = \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}$;

d) $A = 2a\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right|$,

maxi pour $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, nul pour $\theta = 0$ ou π.

18 Deux antennes (1) et (2) sont placées respectivement en A_1 et A_2 ; elles émettent avec la même amplitude sur la même longueur d'onde λ ; elles sont distantes de $\lambda/4$ et l'antenne (1) est en avance de phase de $\pi/2$ sur l'antenne (2). Un point P de l'espace reçoit une onde résultante qui est à chaque instant la somme des ondes émises par les antennes (1) et (2) (figure ci-dessous).
On s'intéresse aux points de l'axe $A_1 A_2$ extérieurs au segment $A_1 A_2$. Montrez que sur une partie de cet axe l'onde résultante est nulle et que sur l'autre partie elle est maximale.

Réponse : nulle à droite de A_1, maximale à gauche de A_2.



19 Une onde plane (1) de pulsation ω, d'amplitude a se propage dans une direction appartenant au plan xOy et faisant l'angle $+\alpha$ avec Ox. Une onde plane (2) de même pulsation et même amplitude se propage dans la direction symétrique par rapport à Ox c'est-à-dire appartenant à xOy et faisant l'angle $-\alpha$ avec Ox. Au point O ces deux ondes sont en phase.

a) Donnez l'expression s_1 de l'onde (1) en un point $M(x, y, z)$ en fonction de t, x, y, α.

b) Même question pour l'onde (2) : donnez $s_2 = f(t, x, y, \alpha)$.

c) Calculez l'expression de l'onde résultante $s = s_1 + s_2$.

d) Montrez que la valeur absolue de l'amplitude de la vibration s est maximale dans des plans parallèles à xOz dont on donnera l'équidistance.

e) Précisez la direction de propagation de l'onde résultante et calculez sa longueur d'onde.

Réponses :

a) $s_1 = a\cos(\omega t - \vec{k}_1 . \overrightarrow{OM})$, $\vec{k}_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha, 0\right)$,

$$s_1 = a\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\right] ;$$

b) $\vec{k}_2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha, -\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha, 0\right)$,

$$s_2 = a\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha - y\sin\alpha)\right] ;$$

c) $s = 2a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} . y\sin\alpha\right)$.

$$\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\cos\alpha\right) ;$$

d) $|A| = 2a\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}y\sin\alpha\right|$ maximal pour $\frac{2\pi}{\lambda}y\sin\alpha = n\pi$, n entier ; l'équidistance des plans est $\frac{\lambda}{2\sin\alpha}$;

e) Propagation suivant Ox avec une célérité $v' = \frac{v}{\cos\alpha}$.

20 Dans une expérience d'interférences à la surface de l'eau, faite avec une fourche batteur à deux pointes qui équivaut à deux sources en phase S_1 et S_2, on définit la position d'un point M par les distances $S_1M = d_1$ et $S_2M = d_2$. Les ondes liquides produites à la surface ont une célérité v.

a) Les sources émettent avec la même amplitude. Comment évolue l'amplitude de chaque onde quand on s'éloigne de la source correspondante ? Montrez que si l'on suppose les amplitudes des deux ondes sensiblement égales en M, cela revient à faire une hypothèse sur le rapport des distances d_1 et d_2 : laquelle ? Dans la suite nous supposerons que les deux ondes qui interfèrent en M sont d'égale amplitude.

b) Les ondes étant de la forme $y_1 = a\cos\omega t$ au départ de S_1, et $y_2 = a\cos\omega t$ au départ de S_2, donnez leurs expressions en M ; calculez l'expression de l'onde résultante $y = y_1 + y_2$.

c) Donnez l'équation en d_1 et d_2 des franges d'interférences ; quelle est leur forme ?

d) Donnez l'équation en d_1 et d_2 des surfaces équiphases de l'onde résultante ; quelle est leur forme ?

e) Si les ondes qui interfèrent en M ne sont plus d'égale amplitude, l'équation des franges est-elle changée ? Qu'y a-t-il de changé ?

Réponses :

a) L'amplitude diminue quand d augmente (en $\frac{1}{\sqrt{d}}$ s'il n'y a pas d'absorption) ; on suppose $\frac{d_1}{d_2}$ voisin de 1 ;

b) $y_1 = b\cos\omega\left(t - \frac{d_1}{v}\right)$, $y_2 = b\cos\omega\left(t - \frac{d_2}{v}\right)$;

$$y = 2b\cos\omega\left(\frac{d_1 - d_2}{2v}\right) . \cos\omega\left(t - \frac{d_1 + d_2}{2v}\right) ;$$

c) Les franges d'amplitude maximale correspondent à $\cos\omega\left(\frac{d_1 - d_2}{2v}\right) = \pm 1$,

$d_1 - d_2 = n\lambda$, n entier, hyperboles de foyers S_1 et S_2 ;

d) $d_1 + d_2$ = constante, ellipses de foyers S_1 et S_2 ; **e)** Non, mais les minima d'amplitude ne sont plus nuls.

21. La propagation des ondes liquides à la surface de l'eau s'accompagne de **dispersion** c'est-à-dire que : une onde de fréquence N_1 est transmise avec la célérité v, mais une onde de fréquence N_2 est transmise avec une célérité v_2 différente de v_1 (v diminue quand N augmente).

Deux batteurs ponctuels S_1 et S_2 produisent à la surface de l'eau des mouvements sinusoïdaux de fréquence N_1 pour S_1 et N_2 pour S_2 ; S_1 et S_2 sont sur l'axe Ox (figure ci-dessous). Les vibrations produites en O ont respectivement pour expressions :

$y_1 = a\cos\omega_1 t$ et $y_2 = a\cos\omega_2 t$.

On s'intéresse à la propagation vers les x positifs et on néglige la diminution d'amplitude qui accompagne la propagation.

a) Donnez les expressions des vibrations en $M(x)$ à la date t.

b) Que constate-t-on au point M ?

c) A quelle vitesse se déplace le maximum d'amplitude ?

On donne : $N_1 = 60$ Hz,

$v_1 = 36$ cm/s, $N_2 = 59$ Hz, $v_2 = 36{,}5$ cm/s.

Réponses :

a) $y_1 = a\cos(\omega_1 t - k_1 x)$, $k_1 = \frac{\omega_1}{v_1}$;

$y_2 = a\cos(\omega_2 t - k_2 x)$, $k_2 = \frac{\omega_2}{v_2}$.

b) En M

$$y = 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right).$$

$$\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right),$$

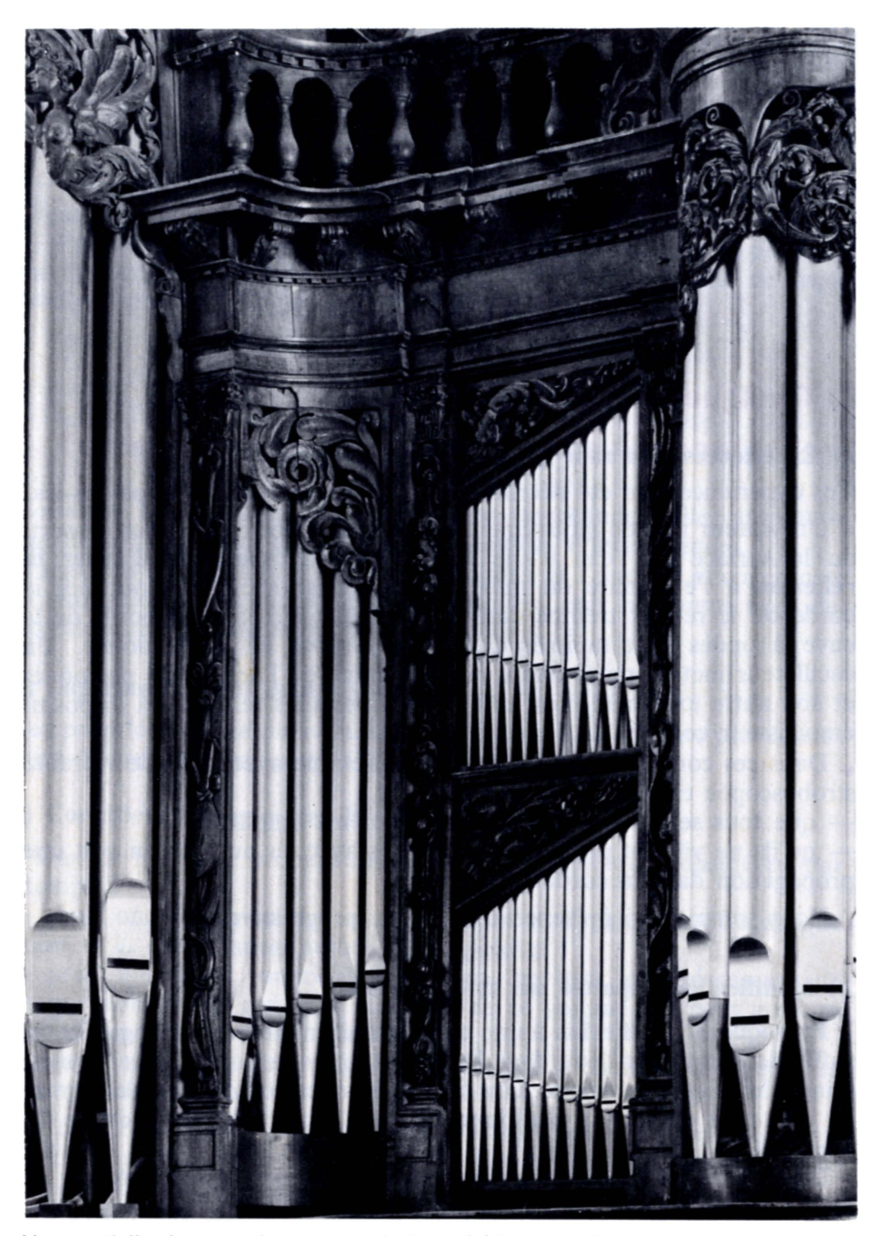
des maxima d'amplitude se succèdent à la fréquence $N_1 - N_2$.

c) Un maximum se déplace à la vitesse

$$v' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{N_1 - N_2}{\frac{N_1}{v_1} - \frac{N_2}{v_2}} = 19{,}9 \text{ cm . s}^{-1}$$

voisine de 36 cm/s : cette différence est causée par la dispersion.

S_1 S_2 O x



Vue partielle des grandes orgues de la cathédrale de Toulouse.

19 Ondes stationnaires.

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier l'interférence de deux ondes se propageant en sens inverses, qui fournit un type nouveau d'onde sinusoïdale : l'onde stationnaire. Puis nous verrons que ces ondes stationnaires ont une grande importance dans de nombreux phénomènes de résonances.

I. Propriétés générales des ondes stationnaires.

1. Quelques expériences.

a) Expériences montrant quelques ondes progressives.

Ces expériences ont été décrites au chapitre précédent. Rappelons-les.

• Un vibreur met en mouvement l'extrémité d'une corde, d'un ressort, ou la surface de l'eau d'une cuve. **Il est indispensable d'éviter la réflexion** à l'extrémité du milieu de propagation ; c'est pourquoi la corde ou le ressort trempe dans un cristallisoir d'eau, les bords de la cuve à ondes sont tapissés d'un tissu disposé en pente douce. Un oscillateur met en mouvement une extrémité de l'échelle de perroquet et son autre extrémité n'est ni libre ni fixe, mais reliée à un dispositif amortisseur convenable.

• Dans ces conditions on observe, par exemple avec la corde vibrante stroboscopée en mouvement ralenti :
— que tous ses points vibrent avec la même amplitude ;
— qu'ils ne vibrent pas en phase les uns avec les autres : on voit une propagation dans la corde.

• Nous sommes en présence d'une **onde progressive.**

b) Modification apportée par une réflexion.

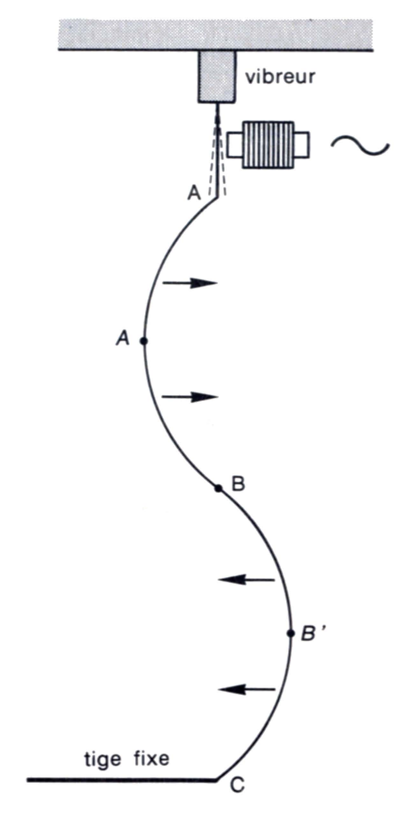
• **Provoquons la réflexion** à une extrémité du milieu de propagation : il suffit de supprimer l'eau dans laquelle trempe la corde ou le ressort, d'introduire une planchette dans la cuve à ondes liquides, de bloquer ou au contraire de laisser parfaitement libre l'extrémité de l'échelle de perroquet.

• De plus, il est généralement nécessaire de **procéder à un réglage** de longueur, de tension, ou de fréquence des vibrations de la source, pour obtenir un phénomène bien visible.

Dans une onde progressive l'amplitude de vibration est la même pour tous les points ; dans une onde stationnaire l'amplitude dépend de la position du point et peut s'annuler en certains points.

• Moyennant quoi nous observons un système vibratoire très différent de l'onde progressive.
Par exemple sur une corde dont une extrémité est fixée, stroboscopée en mouvement ralenti, on peut constater facilement :
— l'existence de **points immobiles** à tout instant,
— l'existence de points vibrant avec **une très grande amplitude** (figure 1) ;
— **l'absence de propagation :** les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase ; mais le déphasage **ne varie pas de façon continue** avec la distance à la source.

• Nous sommes en présence d'une **onde stationnaire.**



1. Onde stationnaire dans une corde (expérience de Melde). L'extrémité C de la corde ayant été fixée et la longueur *AC* convenablement réglée, la corde est le siège d'une onde stationnaire.
A est faiblement mobile, B et C sont immobiles ; tous les points de la portion *AB* vibrent en phase ; il en est de même des points de la portion *BC*, mais ils sont en opposition de phase avec ceux de la portion *AB*.

2. Formation d'une onde stationnaire : interprétation.

Certaines des constatations précédentes (amplitude nulle, amplitude maximale) nous font penser à un **phénomène d'interférences.**
Rappelons quelques points étudiés en classe de Première et concernant la propagation des mouvements vibratoires, leur rencontre avec des obstacles, et les interférences.

a) Superposition des petites vibrations.

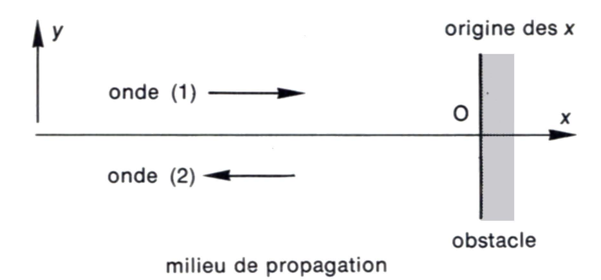
Les propriétés de ce phénomène ont été revues au chapitre précédent : vous pouvez vous reporter à la page 345.

b) Conditions imposées par la réflexion sur un obstacle.

• Dans le milieu de propagation il y a deux grandeurs à considérer, par exemple :
— pour une corde ou un ressort, ce sont le déplacement de chaque point et la déformation autour de ce point ;
— pour une onde sonore dans un gaz, ce sont le déplacement de chaque volume de gaz et la variation de ce volume qui peut aussi se caractériser par la pression acoustique ;
— pour une onde électromagnétique, ce sont le champ électrique et le champ magnétique.

• L'obstacle, suivant sa nature, impose une condition, par exemple :
— à l'extrémité libre d'une corde ou d'un ressort le déplacement est grand et la déformation est nulle ;
— à l'extrémité fixe d'une corde ou d'un ressort, le déplacement est nul, la déformation varie fortement ;

Dans une onde progressive la phase de la vibration varie progressivement avec la position du point ; dans une onde stationnaire le déphasage entre deux points ne peut valoir que 0 ou π.



2. Une onde stationnaire se produit par interférence de deux ondes progressives cohérentes se propageant suivant la même direction Ox mais en sens inverses. De plus ces deux ondes ont la même amplitude.

— à l'extrémité ouverte d'un tuyau sonore, la pression est constante donc la pression acoustique est nulle mais le déplacement des tranches d'air est maximal.

• Quelle que soit la condition imposée par l'obstacle, sa présence provoque une **réflexion** de l'onde fournie par la source.

c) Mouvement résultant en chaque point.

• Grâce à la présence de l'obstacle, on a donc **interférence** entre deux ondes **progressives cohérentes** qui se propagent suivant la même direction, mais en **sens contraires.** Supposons que l'onde (1) (figure 2) qui se dirige vers la droite, et l'onde (2) qui se dirige vers la gauche aient des **amplitudes égales.**

Ce cas est assez bien représenté par une corde d'axe Ox animée de vibrations transversales y : c'est **l'expérience de Melde** qui sera faite au paragraphe 4 de ce chapitre.

• **Remarque importante :** notons bien que dans l'expérience de Melde nous ne commençons à observer la corde qu'assez longtemps après sa mise en vibration. Dans ce cas, l'onde (1) progressant vers la droite **n'est pas** l'onde émise par la source (vibreur) mais la **somme de toutes les ondes allant vers la droite :** il y en a un grand nombre car chaque onde réfléchie sur l'extrémité droite de la corde (point O, $x = 0$ de la figure 2) vient ensuite se **réfléchir sur la source** pour repartir vers la droite, se réfléchir à nouveau... De même l'onde (2) est la somme de toutes les ondes allant vers la gauche.

• Avec un choix convenable de l'origine des temps, l'onde (1) peut prendre pour expression $y_1 = a \sin(\omega t - kx)$; un autre choix, celui que nous retiendrons, donne : $y_1 = a \cos(\omega t - kx)$.

L'onde (2), de même amplitude par hypothèse, est alors de la forme :

$$y_2 = a \cos(\omega t + kx + \alpha) .$$

α dépend de la condition imposée par l'obstacle.
L'onde résultante a pour expression :

$$y = y_1 + y_2 = a[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \alpha)] .$$

• **Ici l'obstacle est fixe,** il impose donc $y = 0 \quad \forall t$ pour $x = 0$, soit :

$$a[\cos \omega t + \cos(\omega t + \alpha)] = 0 \ \forall t .$$

$$\text{D'où} \quad \alpha = \pi \quad \text{et} \quad y_2 = -a \cos(\omega t + kx) .$$

Remarque : pour $x = 0$, on a donc $y_1 = a \cos \omega t$, $y_2 = -a \cos \omega t$: c'est ce que l'on appelle un changement de signe ; nous retrouvons une propriété vue en classe de 1re : la réflexion d'une onde progressive sur un **obstacle fixe** se fait avec **changement de signe du déplacement.** L'onde résultante a donc pour expression, en M(x), à la date t :

$$y = a[\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] .$$

Cette expression peut se transformer par différentes méthodes. La plus simple est ici la méthode trigonométrique. La méthode de Fresnel ou la méthode des nombres complexes sont également utilisables. Les trois méthodes sont exposées ci-dessous.

- **Méthode trigonométrique.**

Puisque $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} . \sin \frac{p+q}{2}$, il vient

$$y = -2a \sin(-kx) \sin \omega t$$

$$\boxed{y = 2a \sin kx . \sin \omega t} .$$

- **Méthode de Fresnel :** aux fonctions $y_1 = a \cos(\omega t - kx)$ et $y_2 = a \cos(\omega t + kx + \pi)$ on associe les vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{OA}_1$ et $\overrightarrow{OA}_2$ (figure 3), dont la somme est le vecteur $\overrightarrow{OA}$ associé à la fonction $y = y_1 + y_2$. Sur la figure, on trouve que

$$OA = 2a \cos\left(\frac{\pi}{2} - kx\right) = 2a \sin kx ,$$

et que la direction de $\overrightarrow{OA}$ est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur la direction ωt. D'où $y = 2a \sin kx \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ ou encore : $y = 2a \sin kx . \sin \omega t$.

- **Méthode des nombres complexes.**

A la fonction $y_1 = a \cos(\omega t - kx)$, on associe la fonction complexe

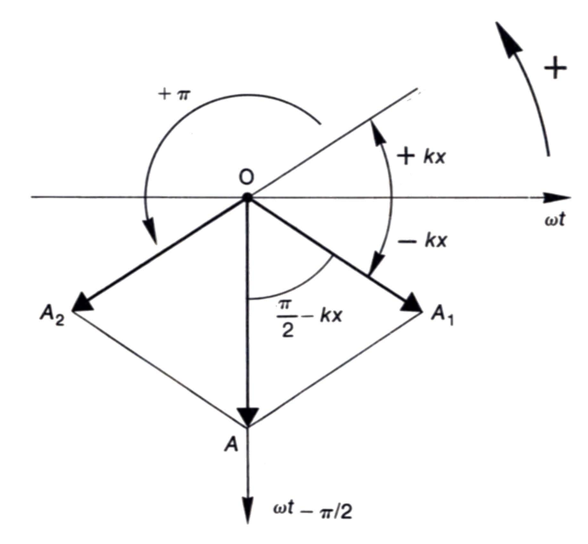
$$\overline{y}_1 = ae^{j(\omega t - kx)} .$$

De même à $y_2 = -a \cos(\omega t + kx)$, on associe

$$\overline{y}_2 = -ae^{j(\omega t + kx)} .$$

D'où $\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 = ae^{j\omega t}[e^{-jkx} - e^{jkx}]$

$$\overline{y} = 2aje^{j\omega t} \sin(-kx) = -2ae^{j(\omega t + \pi/2)} \sin kx .$$



3. Construction de Fresnel.
$y_1 = a \cos(\omega t - kx)$ est associé au vecteur $\overrightarrow{OA}_1$
$y_2 = a \cos(\omega t + kx + \pi)$ est associé au vecteur $\overrightarrow{OA}_2$
$\overrightarrow{OA}$ est associé à la somme $y = y_1 + y_2$; on trouve
$y = 2a \sin kx . \sin \omega t$.

L'interférence de deux ondes progressives de même fréquence, même amplitude, se propageant en sens inverses suivant la même direction, donne une onde stationnaire.

La partie réelle de $\bar{y}$ est $y = -2\,a\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\sin kx$

$$y = 2\,a\sin kx \,.\, \sin\omega t\,.$$

• En résumé, par **interférence de deux ondes progressives de même amplitude** et qui se propagent en **sens inverses** sur la même direction, on obtient une onde que nous allons appeler **onde stationnaire** et dont nous allons étudier la structure.

3. Structure d'une onde stationnaire.

L'onde a pour expression $y = 2\,a\sin kx \,.\, \sin\omega t$, avec $k = \frac{2\,\pi}{\lambda}$.

C'est une onde d'amplitude : $A = 2\,a\sin kx$,
de phase : ωt.

a) L'onde n'est plus progressive.
En effet, d'une part l'amplitude est variable d'un point à l'autre puisqu'elle dépend de x, d'autre part la phase est indépendante de x : il n'y a plus propagation, on n'a plus une fonction $f(\omega t \pm kx)$.
On dit que **l'onde est stationnaire.**

b) Nœuds de déplacement.
Le tableau ci-dessous donne les variations de l'amplitude $A = 2\,a\sin 2\,\pi\frac{x}{\lambda}$, x prenant toutes les valeurs négatives à partir de $x = 0$ (voir figure 2).

x	0	$-\frac{\lambda}{4}$	$-\frac{\lambda}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\lambda$	$-\frac{5\,\lambda}{4}$
$2\,\pi\frac{x}{\lambda}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\,\pi}{2}$	$-2\,\pi$	$-\frac{5\,\pi}{2}$
$A = 2\,a\sin\frac{2\,\pi x}{\lambda}$	0 ↘	$-2\,a$ ↗	0 ↗	$+2\,a$ ↘	0 ↘	$-2\,a$

Ici nous définissons une amplitude A algébrique (habituellement nous utilisons une amplitude arithmétique).
L'élongation y s'obtient en multipliant A par $\sin \omega t$ qui oscille entre -1 et $+1$ avec une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

• **Quel que soit *t*,** tous les points tels que $A = 0$, sont **immobiles :** on les appelle des **nœuds de déplacement.**

Leurs positions sont données par $\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$

$$\boxed{x_N = -n\frac{\lambda}{2}, \quad n \text{ entier}}.$$

• Les nœuds sont équidistants de $\frac{\lambda}{2}$.

• **Remarque :** la solution $x_N = 0$ découle du fait que nous avons imposé à la corde d'être fixe à son extrémité $x = 0$: c'est la condition imposée par l'obstacle.
Avec un milieu de propagation autre que la corde et une condition différente à l'extrémité, la position des nœuds ne serait peut-être plus donnée par la relation ci-dessus, mais ces nœuds resteraient équidistants de $\frac{\lambda}{2}$; à ce propos on peut par exemple expérimenter avec une échelle de perroquet dont l'extrémité est libre ou fixe (voir le § 4).

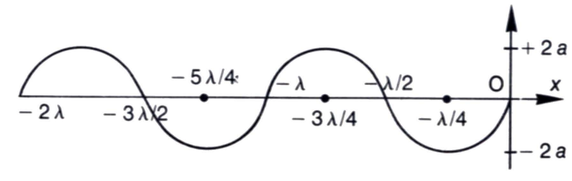
Un nœud est un point de l'espace où l'une des grandeurs caractérisant la vibration demeure constante au cours du temps : position d'un point matériel, pression dans un gaz...

c) Forme instantanée de la corde.

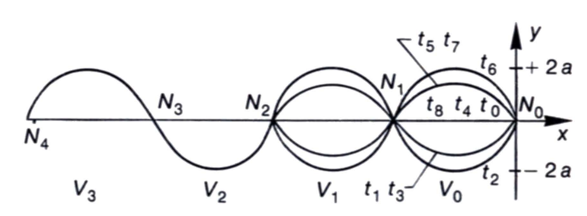
Pour l'obtenir, représentons l'amplitude A en fonction de x (figure 4), puis faisons le produit de $A(x)$ par $\sin \omega t$ dont quelques valeurs successives particulières sont données ci-dessous :

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
t	0	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{3T}{8}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{5T}{8}$	$\frac{3T}{4}$	$\frac{7T}{8}$	T
$\omega t = 2\pi\frac{t}{\lambda}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin \omega t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

On obtient la figure 5 sur laquelle on peut suivre progressivement les déformations de la corde.



4. Amplitude $A = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$ en fonction de x.



5. Formes successives de la corde aux dates t_1, t_2, t_3... On voit l'existence de nœuds et de ventres.

Les nœuds sont équidistants de $\frac{\lambda}{2}$.

Par exemple, les points situés entre les nœuds N_0 et N_1 ont tous une élongation nulle à la date t_0 ; ils se **déplacent ensemble** vers le bas et sont tous au plus bas à la date t_2..., ils passent au plus haut à t_6, et retrouvent à $t_8 = t_0 + T$ leurs positions initiales dans le même sens. Les vitesses sont dirigées vers le bas à t_1 alors qu'elles sont vers le haut à t_3. De même elles sont vers le haut à t_5, vers le bas à t_7.
Enfin les vitesses sont toutes nulles à t_2 et t_6, maximales à t_0, t_4, t_8. On dit que tous les points situés entre N_0 et N_1 **vibrent en phase.**
On peut donner une description analogue des mouvements de la tranche comprise entre N_1 et N_2 ; mais cet ensemble de points vibre en **opposition de phase** par rapport à ceux de la tranche $N_0 N_1$.
Plus généralement les ensembles $N_0 N_1$, $N_2 N_3$... vibrent en phase car l'amplitude $2\,a \sin 2\,\pi \frac{x}{\lambda}$ y est négative, les ensembles $N_1 N_2$, $N_3 N_4$..., vibrent en phase car l'amplitude y est positive.

d) Ventres de déplacement.

La figure 5 montre aussi que **l'amplitude de vibration est maximale** en certains points : on les appelle des **ventres de déplacement.**
Leurs positions sont données par :

$$\left|\sin 2\,\pi \frac{x}{\lambda}\right| = 1\,, \quad x = -\frac{\lambda}{4}, \quad -\frac{3\,\lambda}{4}\ldots$$

$$\boxed{x_1 = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \quad n \text{ entier} \quad .}$$

Les ventres sont équidistants entre eux de $\frac{\lambda}{2}$, et distants de $\frac{\lambda}{4}$ des nœuds qui les encadrent.

Aux ventres, l'amplitude de vibration est maximale ; les ventres sont équidistants entre eux de $\frac{\lambda}{2}$ et ils sont exactement intercalés entre les nœuds.

• **Remarque :** on peut prévoir sans calcul l'équidistance de $\frac{\lambda}{2}$ entre deux nœuds, ou deux ventres, consécutifs. Par exemple, en un nœud N, l'onde (1) allant vers la droite et l'onde (2) allant vers la gauche sont en opposition de phase : elles se détruisent exactement puisque nous les avons supposées d'égales amplitudes.

Déplaçons-nous de $\frac{\lambda}{2}$ vers la droite le long de la corde, nous allongeons le trajet (1) de $\frac{T}{2}$, nous raccourcissons le trajet (2) de $\frac{T}{2}$, les ondes sont à nouveau en opposition de phase en ce point qui est donc le nœud N' voisin de N. On trouverait de même un nœud à $\frac{T}{2}$ à gauche de N, et ainsi de suite.

Aux nœuds les deux ondes progressives qui forment l'onde stationnaire sont en **interférence destructive.** Au contraire aux **ventres** elles sont en **interférence constructive.**

e) Déplacement et déformation.

La figure 6 représente la corde dans ses positions d'élongation nulle et d'élongations maximales.

Considérons la portion AB de corde qui encadre le ventre V_0 : au cours de ses vibrations elle ne change pas de longueur ; elle se déplace beaucoup mais ne se déforme pas.

- **Un ventre de déplacement est un nœud de déformation.**

Considérons au contraire la portion CD qui encadre le nœud N_1 : sa longueur évolue entre $C_0 D_0$ et CD donc varie beaucoup ; cette portion se déforme beaucoup alors qu'elle se déplace très peu (son centre est immobile).

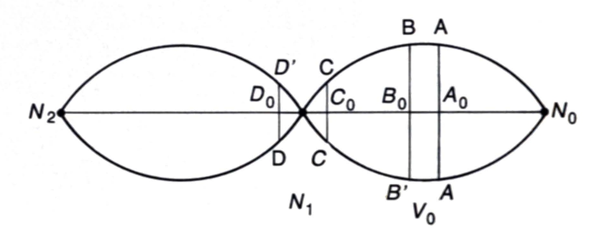
- **Un nœud de déplacement est un ventre de déformation.**

f) Aspect énergétique du phénomène.

Si un élément de corde a de la vitesse, il possède de l'énergie cinétique ; si cet élément est déformé, c'est-à-dire allongé par rapport à sa longueur au repos, il possède de l'énergie potentielle.

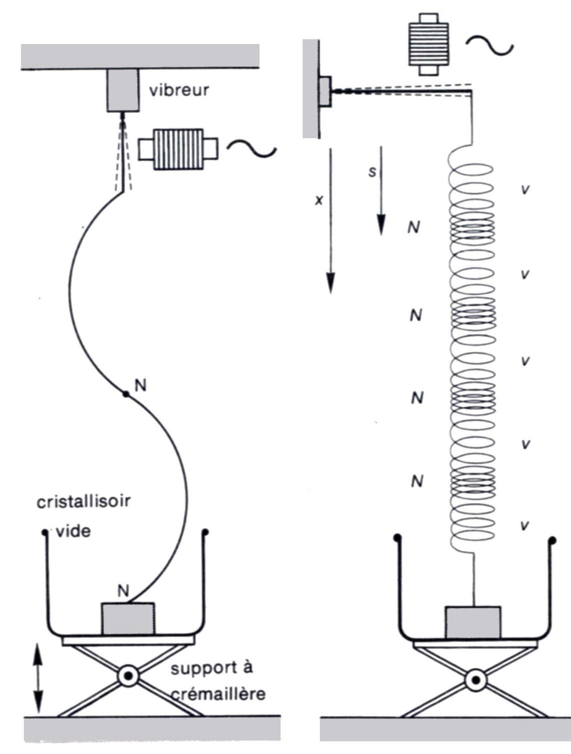
- Suivons l'élément de corde AB (ventre de déplacement) au cours de son mouvement (figure 6). On voit qu'il n'a jamais d'énergie potentielle et que son énergie cinétique, nulle dans les positions AB et $A'\ B'$, est maximale dans la position $A_0\,B_0$ qu'il prend deux fois par période (une fois en montant, une fois en descendant).

- Au contraire pour l'élément CD, l'énergie cinétique est toujours négligeable, mais l'énergie potentielle, qui est nulle dans la position $C_0\,D_0$, devient maximale dans les positions CD et $C'\ D'$, c'est-à-dire deux fois par période.



6. Onde stationnaire dans une corde. Un ventre de déplacement est un nœud de déformation. Un nœud de déplacement est un ventre de déformation.

Dans une onde stationnaire, il n'y a pas propagation de l'énergie : celle-ci est installée dans l'onde.



7. Expérience de Melde. La corde est attachée à une masse posée au fond d'un cristallisoir soutenu par un support à crémaillère : celui-ci permet, par réglage de la longueur et de la tension de la corde, d'obtenir une onde stationnaire avec des ventres de très forte amplitude ; dans ces conditions, l'extrémité de la lame vibrante, la source de vibrations, se trouve près d'un nœud de déplacement. En remplissant d'eau le cristallisoir et sans changer les réglages, on fait apparaître une onde progressive.

8. Onde stationnaire longitudinale dans un ressort.

• En dehors des nœuds et des ventres, un élément de corde possède à la fois de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, qui varient chacune avec une période $\frac{T}{2}$ entre la valeur zéro et un maximum.

• Dans une onde stationnaire on démontre qu'il n'y a pas propagation de l'énergie : celle-ci est **emmagasinée** dans le milieu de propagation, et il y a, au cours du temps, des échanges entre les formes potentielle et cinétique de l'énergie (sauf aux nœuds de déplacement où l'énergie n'est jamais cinétique, et aux ventres de déplacement où elle n'est jamais potentielle).

4. Vérifications expérimentales et autres exemples.

a) Expérience de Melde : ondes stationnaires dans une corde.

• La figure 7 rappelle le dispositif employé.

• **Il faut un réglage soigneux** de la longueur de la corde (réglage sur lequel nous reviendrons dans la deuxième partie de ce chapitre) pour que cette corde prenne l'aspect décrit plus haut.

• Les nœuds et les ventres sont faciles à voir sans stroboscopie.

• La stroboscopie en mouvement ralenti permet de voir facilement que tous les points situés entre deux nœuds consécutifs vibrent en phase, mais que les points situés de part et d'autre d'un nœud vibrent en opposition de phase.

• **Remarque importante :** on constate donc que l'amplitude $2a$ des ventres de déplacement est **très supérieure à celle de la source** (extrémité du vibreur), à tel point que cette source se trouve au voisinage d'un nœud de déplacement : ceci signifie que les ondes (1) et (2), définies au 2) c) et qui interfèrent, ont une amplitude A très supérieure à celle de la source : ce phénomène sera expliqué plus loin (page 363).

• Comparaison avec une onde progressive de même fréquence : si l'extrémité inférieure de la corde est fixée à une masse reposant au fond d'un cristallisoir vide, après avoir observé l'onde stationnaire et mesuré l'équidistance d entre les nœuds, il suffit de remplir d'eau le cristallisoir pour voir apparaître l'onde progressive fournie par le vibreur seul, parce que l'onde réfléchie sur l'obstacle inférieur a disparu (figure 7). On peut alors utilement comparer la longueur d'onde λ de l'onde progressive à l'équidistance d mesurée précédemment.

b) Onde stationnaire dans un ressort hélicoïdal.

La figure 8 montre le dispositif employé. Le vibreur provoque des déformations par dilatation et par compression. Le déplacement longitudinal s d'une spire par rapport à sa position de repos est de la forme :

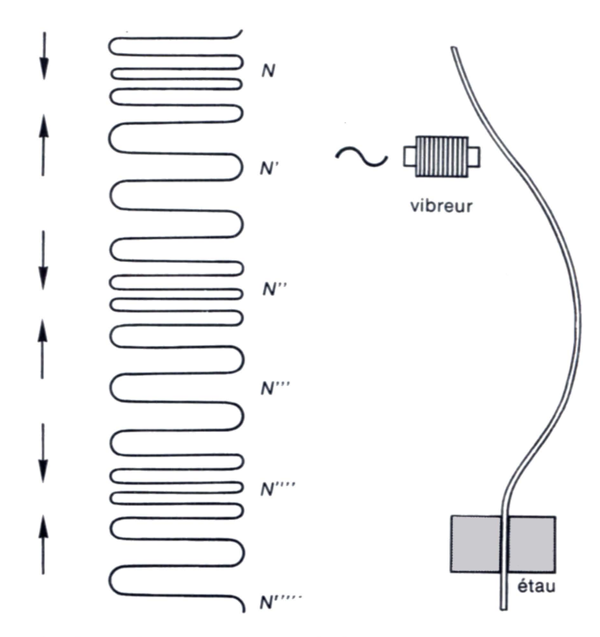
$$s = 2\,a \sin 2\,\pi\,\frac{x}{\lambda} \sin \omega t\ .$$

• Sans stroboscopie on observe la présence de nœuds de déplacement (spires immobiles).

• Par stroboscopie on voit que toutes les spires situées entre deux nœuds consécutifs, par exemple N et N′ (figure 9), se déplacent dans le même sens à une date donnée : elles vibrent en phase ; par contre elles vibrent en opposition de phase avec les spires de la tranche N′ N″.

• Ainsi un nœud de déplacement est un ventre de déformation car les spires qui l'encadrent ont toujours des mouvements de sens opposés. Au contraire un ventre de déplacement est un nœud de déformation car les spires qui l'encadrent se déplacent fortement mais dans le même sens à chaque instant.

• Il est facile en remplissant d'eau le cristallisoir (figure 8) de faire réapparaître une onde progressive longitudinale.



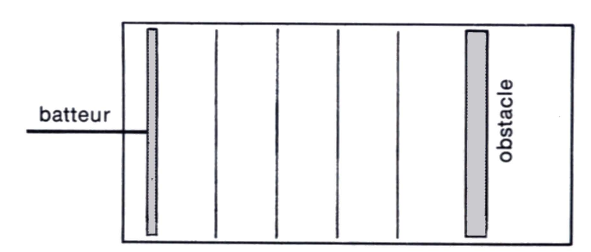
9. Cette figure représente la forme d'une portion du ressort à la date t : les régions entourant N et N'' sont en compression, les régions entourant N' et N''' sont en dilatation. Mais une demi-période plus tard par exemple, N et N'' seront en dilatation, N' et N''' en compression (sin ωt aura pris la valeur opposée à celle qu'il avait à la date t).

10. Onde stationnaire dans une lame de scie. L'extrémité libre de la lame est un ventre de déplacement.

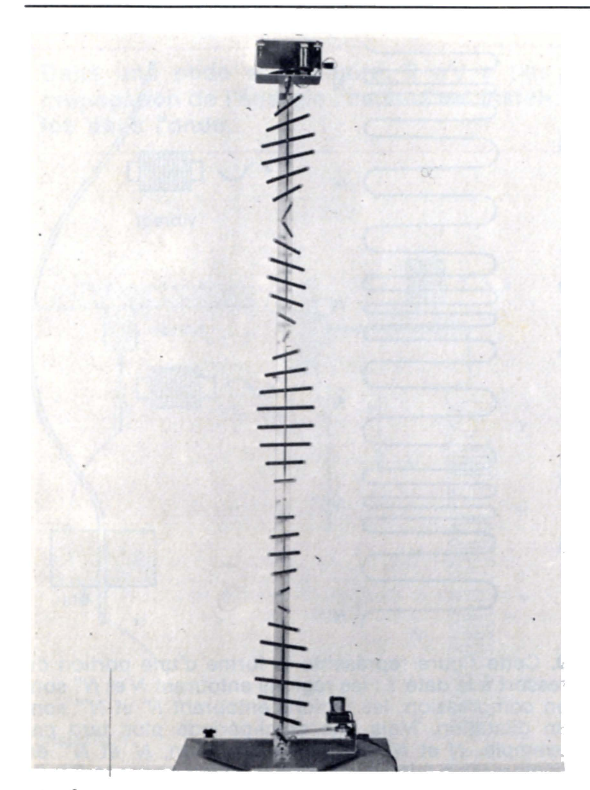
c) Autres exemples.

• **Lame de scie :** une de ses extrémités est fixée dans un étau et on l'excite par un électro-aimant parcouru par un courant alternatif (figure 10). De plus on règle la longueur totale de la lame en modifiant son point de serrage dans l'étau. On voit apparaître une onde stationnaire où l'extrémité dans l'étau est évidemment un nœud de déplacement, mais où **l'extrémité libre est un ventre de déplacement.**

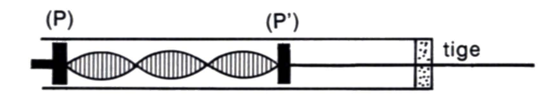
• **Ondes planes à la surface de l'eau :** on choisit un batteur rectiligne pour obtenir des ondes planes. On dispose, parallèlement au batteur, une planchette qui joue le rôle de miroir (figure 11). On observe des ondes stationnaires après un réglage convenable de la distance entre la source et l'obstacle. La stroboscopie permet d'étudier la phase des vibrations entre deux nœuds et de part et d'autre d'un nœud. En enlevant le « miroir », on fait réapparaître l'onde progressive si les bords de la cuve absorbent l'onde incidente.



11. Ondes stationnaires à la surface de l'eau. Le batteur rectiligne est animé d'un mouvement sinusoïdal vertical. En réglant la position de l'obstacle, on fait apparaître une onde stationnaire de forte amplitude.



12. Échelle de perroquet.



13. Tube de Kundt. La tige, frottée suivant son axe, met le piston (P') en vibration longidutinale. On obtient une onde stationnaire de forte amplitude en donnant au piston (P) une position convenable. La poudre disposée dans le tube s'accumule aux nœuds de déplacement de l'air contenu dans le tube.

On ne peut pas obtenir de nœuds mais seulement des minima d'amplitude lorsque les ondes progressives qui interfèrent n'ont pas la même amplitude.

• **Échelle de perroquet :** à l'une des extrémités A de l'échelle, on impose des oscillations de rotation, de fréquence *N*. L'autre extrémité B est parfaitement fixe ou parfaitement libre.
Pour un bon réglage de la fréquence *N*, on voit apparaître une onde stationnaire dans l'échelle : on a un **ventre de rotation** à l'extrémité B, si elle est **libre ;** au contraire on trouve un **nœud de rotation** à cette extrémité, si elle est **fixe.**

• **Onde stationnaire dans un tuyau sonore cylindrique : tube de Kundt.**
La figure 13 montre un tube de verre horizontal, fermé à une extrémité par un piston (P), et dont la colonne d'air peut être mise en vibration par un haut-parleur vibrant à la fréquence *N*, ou par un piston (P') solidaire d'une tige, fixée en son milieu, qui est animée de vibrations longitudinales lorsqu'on la frotte parallèlement à son axe.
Le piston (P), déplaçable, délimite la longueur de la colonne d'air et, par un réglage convenable de la position de cet obstacle, on peut faire apparaître une onde sonore stationnaire ; elle est mise en évidence en plaçant une poudre légère dans le tube.
Celle-ci se répartit de façon périodique le long du tube, avec une équidistance de $\lambda/2$ entre chaque tas.

• **Exemples de propagations non planes :** on peut faire également des expériences avec une source ponctuelle :
— avec un haut-parleur vibrant à une fréquence *N* vers un écran rigide qui renvoie les ondes vers le haut-parleur (figure 14) ;
— avec une antenne émettant des ondes électromagnétiques vers un écran métallique qui renvoie les ondes vers l'antenne (figure 15).
Un détecteur approprié (micro ou antenne suivant le cas), branché sur un oscillographe, permet de montrer que l'espace est sujet à des vibrations (sonores ou électromagnétiques), et que leur amplitude est variable d'un point à l'autre.
Mais les points d'amplitude minimale ne sont pas vraiment des nœuds (ils le sont presque au voisinage du miroir) : en effet, bien que nous fassions interférer deux ondes progressives cohérentes, se propageant suivant la même direction et en sens inverses, leur propagation s'accompagne d'une diminution de l'amplitude, et aux points où les deux ondes progressives sont en opposition de phase, elles ne peuvent pas se détruire complètement car elles n'ont pas même amplitude.
L'onde résultante ainsi obtenue est **intermédiaire** entre une onde progressive et une onde stationnaire.
Une expérience analogue pourrait être faite à la surface de l'eau avec un batteur ponctuel et un réflecteur plan.

II. Ondes stationnaires et résonances

1. Existence de résonances dans les expériences d'ondes stationnaires.

a) Retour sur l'expérience de Melde.

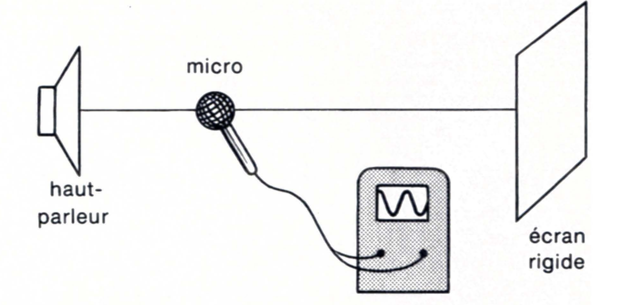
La figure 16 rappelle cette expérience : un vibreur de fréquence N excite des vibrations transversales dans une corde ; la corde passe dans un trou O percé dans un support : en déplaçant celui-ci on règle à volonté la longueur utile $SO = l$ de la corde ; la tension F de la corde est assurée par le poids d'une masse m grâce à une poulie de renvoi. Nous pouvons faire les constatations suivantes :

- Pour obtenir une onde stationnaire de forte amplitude, il est nécessaire de **régler très soigneusement** la longueur de la corde, ou sa tension, ou la fréquence du vibreur (celle-ci peut varier si on emploie un générateur basse fréquence associé à un amplificateur de puissance pour alimenter l'électro-aimant).

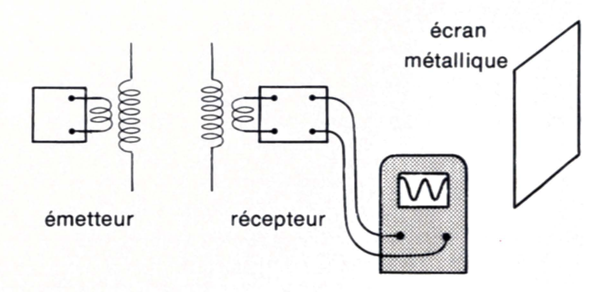
- Quand le réglage optimal est atteint, **l'amplitude aux ventres est très supérieure** au double de l'amplitude de la source ; à tel point que la source se trouve placée très près d'un nœud de déplacement.

- Si le réglage est mauvais, la stroboscopie nous montre que la corde vibre tout de même, et avec la même fréquence que la source : ce sont des vibrations forcées.

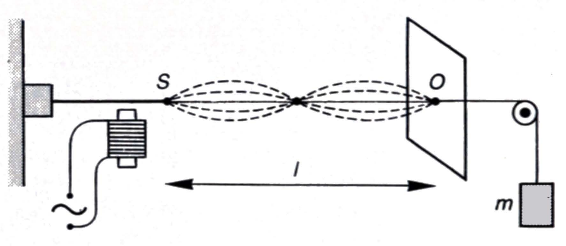
- Enfin, les **réglages sont très critiques** mais il y en a **plusieurs possibles.** Par exemple en imposant la tension F et la fréquence N, on peut faire vibrer fortement la corde en un fuseau pour une longueur l_1, en deux fuseaux pour une longueur $l_2 = 2\,l_1$, en trois fuseaux pour une longueur $l_3 = 3\,l_1$ ... On peut aussi imposer **a priori** F et l et faire varier N : on réussit à faire vibrer la corde en un seul fuseau pour une certaine fréquence N_1, puis en deux fuseaux pour $N_2 = 2\,N_1$, trois fuseaux pour $N_3 = 3\,N_1, \ldots$



14. Ondes sonores pseudo-stationnaires. Le micro détecte l'existence de minima d'amplitude de la pression sonore, mais ces minima ne sont pas nuls.



15. Ondes électromagnétiques pseudo-stationnaires. L'antenne réceptrice détecte l'existence de minima d'amplitude de l'onde électromagnétique, mais ces minima ne sont pas nuls.



16. Expérience de Melde. Pour obtenir une onde stationnaire de forte amplitude, on peut régler la tension de la corde, sa longueur, ou la fréquence de vibration de la source.

b) Généralité du phénomène.

Dans toutes les expériences d'ondes stationnaires décrites précédemment, nous avons constaté la nécessité d'un réglage précis du dispositif pour obtenir de fortes amplitudes :

— dans l'expérience du ressort nous avons modifié simultanément sa tension et sa longueur en déplaçant son extrémité fixe (figure 8) ;

— il a fallu régler la longueur de la lame de scie (figure 10) ;

— dans l'expérience de l'échelle de perroquet il a fallu régler la fréquence de l'excitateur (figure 12) ;

— sur la cuve à eau nous avons dû jouer sur la distance entre le batteur et l'obstacle (figure 11) ;

— dans le tube de Kundt (figure 13) le piston (P) a permis de régler la longueur de la colonne d'air parcourue par le son.

c) Conclusion : résonances.

Nous sommes en présence **d'oscillations forcées,** à la fréquence N de la source, avec **résonance** pour certains réglages.
L'excitateur est la source de vibrations (électro-aimant et lame vibrante, haut-parleur...), **l'oscillateur** est la corde, le ressort, la colonne de gaz..., c'est-à-dire un **milieu de propagation** auquel sont imposées certaines **conditions aux limites.**
L'oscillateur a une ou plusieurs fréquences propres d'oscillation, dont les valeurs dépendent de la célérité v des ondes dans le milieu de propagation et des dimensions de ce milieu.

Par exemple dans une corde $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, où μ est la masse linéique, donc, modifier la tension F revient à changer la célérité.
Lorsque les ondes stationnaires prennent une très grande amplitude, c'est que l'oscillateur entre en **résonance sur la fréquence N qui lui est imposée :** on a alors réalisé l'égalité de la fréquence d'excitation N avec une fréquence propre de l'oscillateur, qu'on peut alors qualifier de **résonateur.**
Il y a évidemment lieu de rapprocher ce phénomène de la résonance électrique d'un circuit RLC, ou de la résonance mécanique de l'oscillateur constitué d'une masse m et d'un ressort. Toutefois il y a une différence importante : les résonateurs que nous allons étudier ici ont **plusieurs fréquences de résonance.**

Lorsqu'un milieu peut propager des ondes (cordes, ressort, échelle de perroquet) et qu'il est de longueur finie, il peut s'y installer une onde stationnaire : celle-ci a une amplitude particulièrement grande si sa fréquence est égale à une des fréquences propres d'oscillation du système : celui-ci entre alors en résonance avec la source de vibration.

2. Interprétation.

a) Longueur d'une corde et amplitude d'une onde stationnaire.

• Une onde stationnaire est toujours de la forme

$$y = A \sin(kx + \alpha) \,.\, \sin(\omega t + \varphi), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda};$$

A est l'amplitude aux ventres ; on peut toujours annuler φ par un choix convenable de l'origine des dates, ce qui donne :

$$y = A \sin(kx + \alpha) \,.\, \sin \omega t \,.$$

Reste à connaître α et A.

• Ce sont les **limites du milieu de propagation** qui vont imposer certaines conditions et par conséquent fixer les valeurs de α et A.

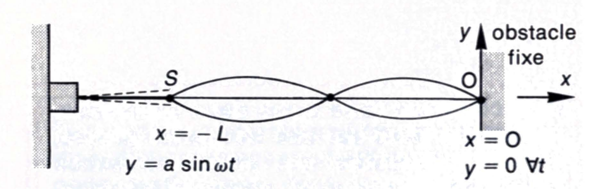
• Prenons l'exemple de la **corde de Melde** (figure 17).
Une extrémité est animée, par la source, du mouvement $y = a \sin \omega t$; l'autre est fixe.
On doit avoir $y = 0$, $\forall t$, pour $x = 0$; d'où $\sin \alpha = 0$: on peut choisir $\alpha = 0$, d'où : $y = A \sin kx \,.\, \sin \omega t$.
On doit avoir de plus $a \sin \omega t = A \sin(-kL) \,.\, \sin \omega t$ d'où :

$$A = \frac{a}{\sin(-kL)} \,.$$

$|A|$ n'est grand que si $\sin(-kL)$ est faible, ce qui implique $-kL \approx n\pi$, n entier.
$|A|$ devient théoriquement infini pour $\sin(-kL) = 0$, $(-kL = n\pi)$.
Ceci ne s'observe jamais : notre théorie est trop simplifiée et ne tient pas compte des dissipations d'énergie lors des réflexions et au cours des propagations.
La condition $-kL = n\pi$ reste néanmoins celle qui rend $|A|$ maximal.
Donc $-\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi$, ou :

$$\boxed{L = k' \frac{\lambda}{2}} \text{, avec } k' \text{ entier.}$$

Cette relation exprime la **condition de résonance.**



17. Onde stationnaire.
La source S et l'obstacle O imposent des conditions aux limites du milieu de propagation.

Il y a déjà un nœud de déplacement à l'extrémité $x = 0$. Si de plus la résonance est réalisée, $\frac{A}{a}$ est très grand et la source S se trouve **pratiquement confondue** avec un nœud : $SO = L$ représente alors la longueur de la corde.

• **Résumé :** pour qu'une corde entre en résonance, il faut que sa **longueur soit un multiple entier de la** demi-longueur d'onde des ondes progressives qui s'y propagent :

$$\boxed{L = k' \frac{\lambda}{2}},$$

ce qui est conforme aux expériences déjà faites, où nous avons vu la corde vibrer en un **nombre entier de fuseaux.**

• **Fréquences propres de résonance :** la célérité dans la corde a une valeur $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ déterminée par la tension F et la masse linéique μ . L est aussi fixée et $N = \frac{v}{\lambda}$.

Les valeurs de N telles que $L = k' \frac{v}{2\,N}$, soit

$$\boxed{N = k' \frac{v}{2\,L}},$$

vérifient la condition de résonance : ce sont les **fréquences propres de la corde ;** il faut exciter la corde à l'une de ces fréquences pour qu'elle vibre avec une grande amplitude.

b) Rôle des réflexions multiples.

• L'onde émise par la source S se réfléchit sur l'obstacle O (figure 17), puis revient vers la source qui se comporte comme un obstacle et la réfléchit à nouveau : elle repart vers O, et ainsi de suite. Donc de la source partent l'onde qu'elle émet et les ondes déjà émises qu'elle réfléchit après un nombre entier d'aller-retour dans la corde : ce qui constitue l'onde progressive allant de S vers O. De même la réflexion en O nous donne une onde progressive allant de O vers S, constituée de toute une série d'ondes progressives allant dans ce sens.

Si la corde est fixée à ses deux extrémités, lorsqu'elle vibre sur une fréquence propre, l'onde stationnaire qui prend naissance dans cette corde a un nœud de déplacement à chaque extrémité : $L = k' \frac{\lambda}{2}$.

• Vérifions alors que la condition $L = k' \frac{\lambda}{2}$ est favorable : pour faire un aller-retour, une onde met le temps $2\,k'\frac{T}{2}$; de plus une réflexion avec changement de signe revient au même qu'un retard de phase de π ou un retard temporel de $T/2$. Si bien que l'aller-retour et les deux réflexions avec changement de signe donnent à l'onde un retard équivalent à $(k' + 1)\,T$.
Chaque onde est donc en phase avec celle qui a fait un aller-retour de moins qu'elle, toutes les ondes allant de S vers O sont donc en phase.
L'onde progressive résultante est alors de grande amplitude ; il en est de même pour l'onde progressive allant de O vers S ; l'interférence de ces deux ondes résultantes donne une onde stationnaire de grande amplitude : c'est la résonance.

c) Généralisation.

Dans le cas d'une corde vibrante la condition de résonance est $L = k'\frac{\lambda}{2}$ car nous avons imposé un nœud de déplacement à chaque extrémité.
Par contre dans l'expérience de la figure 10 faite avec une lame de scie, il y avait un nœud de déplacement à l'extrémité fixe, un ventre de déplacement à l'extrémité libre.
De même dans une échelle de perroquet, l'extrémité reliée à la source est pratiquement un nœud de rotation, et l'autre extrémité peut être libre ou fixe.
En se rappelant qu'une réflexion sur une extrémité libre se fait sans changement de signe du déplacement, on peut reprendre les raisonnements faits en a) et b).
On prévoit par le calcul et l'expérience vérifie que la condition de résonance s'exprime plus généralement par :

$$\boxed{L = K'\frac{\lambda}{4}} \quad \text{avec :}$$

— K' entier pair si les deux extrémités du milieu de propagation sont des nœuds de même nature (déplacement par exemple) ;
— K' entier impair si les deux extrémités du milieu de propagation sont un nœud et un ventre de même nature.

D'une façon générale une fréquence propre d'oscillation correspond à l'existence d'une onde stationnaire dont les positions des nœuds et des ventres sont compatibles avec les conditions imposées au système.



18a. Louis Amstrong (1900-1971) et sa trompette.



18b. Musiciens péruviens. La grosse caisse est excitée par le choc de la batte, le violon par le frottement de l'archet.

3. Applications à l'acoustique.

Nous allons montrer comment les phénomènes de résonance jouent un rôle fondamental dans le fonctionnement des instruments de musique.

a) Classification des instruments de musique.

On peut distinguer trois grandes familles : (photos 18a et 18b).
— les instruments à cordes : violon et ses apparentés : (violoncelle...) piano, clavecin, guitare, harpe...
— les instruments à vent : flûte, clarinette, saxophone, trompette, trombone, orgue...
— les instruments à percussion : cymbales, triangle, tambour et apparentés, maracas...

b) Excitation et résonance.

• Tous ces instruments sont des sources de vibrations sonores plus ou moins graves ou aiguës. Chaque instrument doit être **attaqué ou entretenu** pour fournir un son : par exemple en appuyant sur une touche de piano on déclenche le choc d'un petit marteau sur une corde ; dans le clavecin, la harpe ou la guitare la corde est accrochée ou tirée avant d'être relâchée ; il faut frapper les cimbales, le triangle ou le tambour ; par contre l'archet entretient par frottement les vibrations d'une corde de violon, le souffle de l'exécutant entretient le son émis par une trompette, l'organiste dispose d'une soufflerie pour alimenter chaque tuyau de son instrument à travers une embouchure. Dans chaque cas l'accessoire utilisé est un **excitateur.**

• **Expériences.** Frottons un archet sur le bord d'une table : nous n'en tirons qu'un bruit feutré ou grinçant.
Soufflons dans une embouchure séparée de sa trompette : le bruit émis est peu agréable et mal caractérisé. Une baguette de tambour frappant une table en tire un bruit de choc, sans plus. Au contraire utilisons chaque excitateur avec son instrument, l'ensemble nous fournit une note (ou plusieurs) bien définie, c'est-à-dire un son de fréquence déterminée.

• **Interprétation :** l'instrument de musique réalise une **sélection de fréquence par résonance :** l'excitateur de chaque instrument produit un

bruit c'est-à-dire un mélange de vibrations dont les fréquences s'étalent sur une très large gamme. La corde (le tuyau, le tambour...) est un **résonateur** caractérisé par quelques fréquences propres, et qui entre en résonance sur ces fréquences si elles existent dans l'excitation (tandis que l'amplitude de vibration reste négligeable sur les autres fréquences) : le résonateur rend un son qui lui est propre.

La corde, le tuyau, sélectionnent et renforcent une ou plusieurs de leurs fréquences propres dans l'ensemble des fréquences qui leur est fourni par l'excitateur.

c) Son fondamental et partiel.

Étudions les fréquences propres des cordes vibrantes, et des tuyaux sonores de faible dimension transversale par rapport à leur longueur.

- Pour la corde vibrante de longueur L, on a $L = k' \cdot \frac{\lambda}{2}$ à la résonance puisque la corde est fixée à ses deux extrémités.

- Pour le tuyau sonore, les conditions qui suivent et les relations qui en découlent sont **approchées :**

— le tuyau peut avoir une **embouchure de flûte** (figure 19a), il y a alors un nœud de pression près de l'embouchure ;

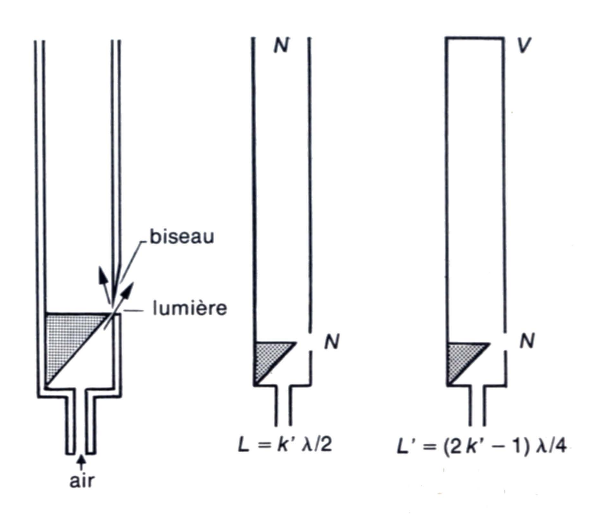
— le tuyau peut avoir une **embouchure à anche** (figures 20a et b), il y a alors un ventre de pression (car il y a un nœud de déplacement) près de l'embouchure ;

— de plus si le tuyau est ouvert à l'autre extrémité, on y trouve un nœud de pression ; si cette extrémité est fermée on y trouve un nœud de déplacement. La distance L entre l'embouchure et l'autre extrémité du tuyau peut donc être, suivant le cas, un multiple de $\frac{\lambda}{2}$ $\left(L = k' \frac{\lambda}{2}\right)$ ou un multiple impair de $\frac{\lambda}{4}$ $\left(L = (2k' - 1)\frac{\lambda}{4}\right)$ (figures 19 et 20).

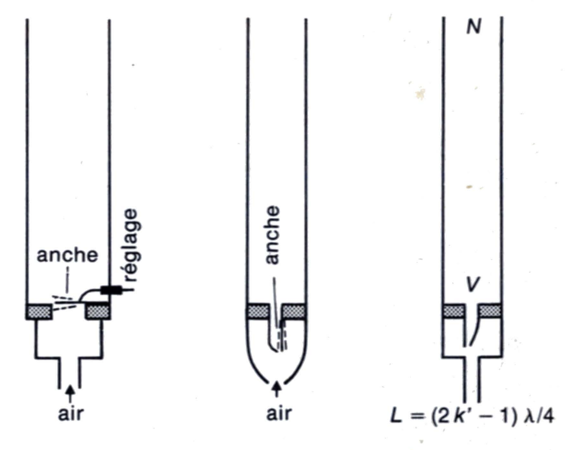
- La célérité étant v $\left(v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\right.$ pour une corde ; $v \propto \sqrt{T}$ pour le son dans l'air, avec $v_0 \approx 331 \text{ ms}^{-1}$ à 273 K), on peut écrire, compte tenu de la relation : $\lambda = \frac{v}{N}$:

$$N = k' \frac{v}{2L} \quad \text{si} \quad L = k' \frac{\lambda}{2}$$

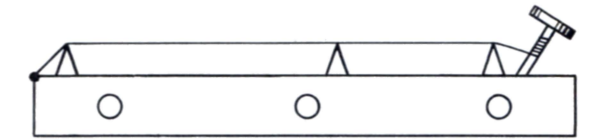
$$N = (2k' - 1)\frac{v}{4L} \quad \text{si} \quad L = (2k' - 1)\frac{\lambda}{4}.$$



19a). Embouchure de flûte. **b)** Tuyau ouvert. **c)** Tuyau fermé.



20a) b). Embouchures à anche. **c)** Tuyau à anche : il est nécessairement ouvert.



21. La fréquence N_1 du son fondamental rendu par une corde augmente avec sa tension, que l'on règle à l'aide d'une clé ; la tension étant fixée, on augmente encore N_1 en diminuant la longueur de la corde.

D'où le tableau des fréquences propres pour quelques valeurs de k' :

	$k' = 1$	$k' = 2$	$k' = 3$
$L = k' \frac{\lambda}{2}$ $N = k' \frac{v}{2L}$	$\frac{\lambda}{2}$ $N_1 = \frac{v}{2L}$	$\frac{2\lambda}{2}$ $N_2 = 2N_1$	$\frac{3\lambda}{2}$ $N_3 = 3N_1$
$L = (2k' - 1)\frac{\lambda}{4}$ $N = (2k' - 1)\frac{v}{4L}$	$\frac{\lambda}{4}$ $N_1 = \frac{v}{4L}$	$\frac{3\lambda}{4}$ $N_3 = 3N_1$	$\frac{5\lambda}{4}$ $N_5 = 5N_1$

La fréquence propre la **plus basse N_1** correspond à l'émission du **son le plus grave : le son fondamental.** Les autres fréquences sont des multiples entiers de N_1 : on les appelle les **harmoniques :** ils correspondent à l'émission des **sons partiels.**
Certaines catégories de résonateurs peuvent émettre les partiels de rang pair ou impair : exemple, la corde.
D'autres, au contraire, ne peuvent émettre que les partiels de rang impair : exemple le tuyau à embouchure de flûte fermé. Nous verrons plus bas que les **sons partiels** peuvent être émis en **même temps que le son fondamental.**



22. Narcisso Yépes, guitariste espagnol.

d) Changement de son fondamental. Expériences.

• Pour une corde vibrante $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ et $N_1 = \frac{v}{2L}$; donc pour changer le son fondamental on peut :

— choisir une corde plus ou moins grosse : un violon en comporte quatre ;

— régler sa tension F : N_1 augmente avec F (voir figure 21). La photo 22 montre les clés permettant d'accorder une guitare.

— modifier la longueur L de la corde : N_1 augmente quand L diminue (voir figure 21). C'est ce que font le violoniste ou le guitariste avec leurs doigts (photo 22).

• Pour un tuyau sonore, $N_1 = \frac{v}{2L}$ ou $\frac{v}{4L}$, et v dépend de la température de l'air.

— Dans un orgue il y a un tuyau pour chaque note ; il en est de même dans une flûte de Pan (photo 23).

— Avec un trombone à coulisse on fait varier la longueur L de façon continue.

— Dans une flûte, une clarinette..., le débouchage d'un trou impose un nœud de pression à l'endroit correspondant.

• **Expériences.**

— En comparant deux tuyaux de même type on constate que c'est le plus court qui rend le son le plus aigu (la plus grande fréquence).

— La figure 24 montre la mise en résonance d'un tuyau, de longueur variable, excité par un haut-parleur.



23. Flûte de Pan, musicien africain (Zimbabwe).

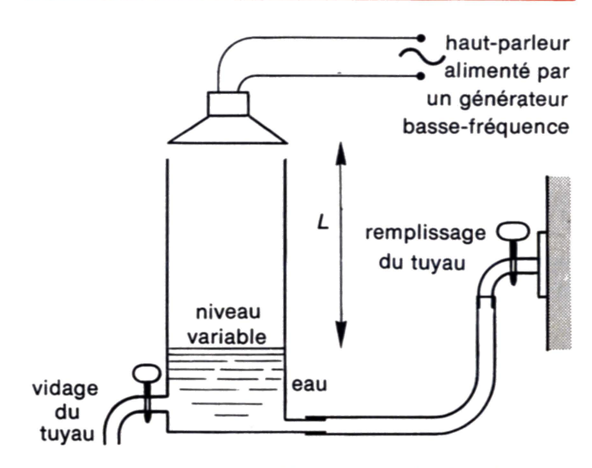
La fréquence du son fondamental émis par une corde dépend de sa masse linéique, de sa tension et de sa longueur.

e) Timbre d'un instrument.

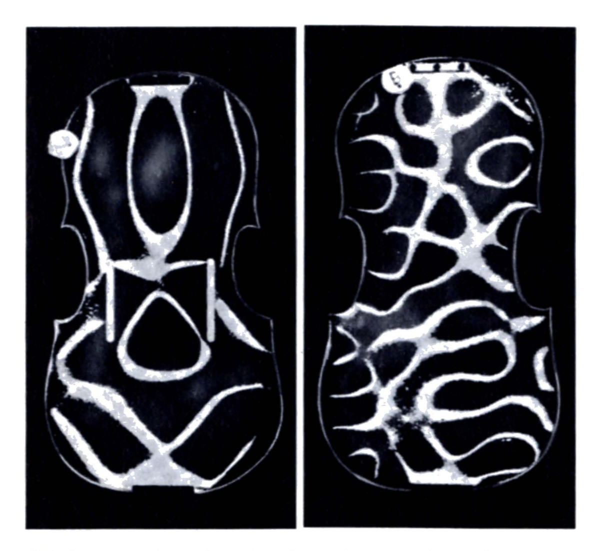
• **Expériences :** faisons fonctionner un tuyau sonore devant un micro branché sur un oscilloscope (et supposons que le micro n'introduise aucune distorsion).
La courbe obtenue est **périodique mais n'est pas sinusoïdale :** on démontre qu'elle résulte de la superposition de vibrations sinusoïdales de fréquence N_1 et de certains de ses multiples entiers.
Ce qui prouve que le tuyau **émet simultanément** le son fondamental et certains partiels.
Utilisons ensuite une corde vibrante : on peut, à l'oreille, ou à l'aide de l'oscilloscope, la régler de façon qu'elle émette le même son fondamental que le tuyau. Mais les enregistrements obtenus sont nettement différents bien qu'ils soient périodiques de même fréquence N_1. D'ailleurs l'oreille distingue parfaitement le son du tuyau de celui de la corde.

• **Timbre :** on dit que les deux instruments n'ont pas le même timbre : ils ont même son fondamental mais diffèrent par la **distribution des sons partiels :** par exemple le tableau de la page 000 nous a montré que certains tuyaux ne peuvent pas émettre les partiels de rang pair alors que c'est possible pour une corde vibrante.

• Le mode d'attaque peut favoriser ou gêner la présence de certains sons partiels, tels que nous les avons définis.



24. Le son de fréquence *N* émis par le haut-parleur est renforcé à la résonance, qui s'obtient pour une certaine longueur *L* de tuyau (mesurée entre la surface de l'eau et l'extrémité ouverte). Si l'on augmente *N*, la résonance a lieu pour une valeur plus faible de *L*.



25. Les modes de vibration d'une caisse de violon pour différentes fréquences. Du sable placé sur la caisse s'accumule sur les régions dont l'amplitude de vibration est nulle (lignes nodales) ; leur forme change avec la fréquence d'excitation.

Par exemple si avec un archet on attaque une corde près d'une extrémité, on favorisera le son fondamental (vibration en un seul fuseau avec ventre de déplacement au milieu de la corde).
En revanche si l'attaque se fait au milieu de la corde un nœud apparaîtra à cet endroit, ce qui favorisera la vibration en deux fuseaux donc l'harmonique 2 (voir tableau p. 370).
On peut se rendre compte de ce phénomène par examen stroboscopique de la corde et par étude de la courbe de vibration sur l'oscillographe.
Un choix judicieux du point d'attaque de la corde de violon, de piano, etc... permet, inversement, d'éliminer certains harmoniques désagréables à entendre, tels que :

$$N_7 = 7\ N_1,\ N_9 = 9\ N_1.$$

• La caisse de l'instrument à corde (violon...) est une caisse de résonance : sa présence renforce le son émis par la corde ; toutefois cette résonance est floue puisque les vibrations de la caisse renforcent toutes les notes émises par toutes les cordes (photos 25).

• Tous ces phénomènes, très importants pour la musicalité, sont connus depuis des siècles par les facteurs d'instruments de musique.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- Lorsque deux ondes progressives de même amplitude et de même ________ se propagent suivant la même ________ mais en sens ________ , leur superposition produit une onde ________ .
- Dans une onde stationnaire l'amplitude ________ d'un point à l'autre, elle s'annule en certains points appelés ________ de déplacement, elle est maximale aux ________ de déplacement. De plus, la phase de l'onde stationnaire est ________ entre deux nœuds consécutifs, alors que dans une onde ________ la phase varie linéairement avec la distance.

Les nœuds sont tous équidistants de ________, il en est de même des ventres et ceux-ci se trouvent placés à ________ des nœuds qui les encadrent.

- Un des moyens d'obtenir une onde stationnaire est de faire réfléchir une onde progressive sur un obstacle parfait : par exemple l'extrémité fixe d'une corde est pour le déplacement, un ________ d'onde stationnaire, c'est un ________ si l'extrémité est libre.
- Pour la catégorie des oscillateurs où se produit une propagation (corde, ressort hélicoïdal, tuyau sonore...), la mise en vibration forcée donne lieu à une résonance lorsqu'une ________ de forte amplitude s'établit le long de l'oscillateur : par exemple pour une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités, les résonances ont lieu pour $L =$ ________ , avec des fréquences de résonance $N =$ ________ .
- On utilise ce phénomène de résonance dans les instruments de musique à vent et à corde : la hauteur du son fondamental rendu par un tuyau sonore dépend de sa ________ ; pour une corde vibrante on peut influer sur la ________ ou sur la ________ pour faire varier la hauteur du son : plus la corde est courte, plus le son est ________.

Petites questions.

1. L'amplitude d'une onde stationnaire dépend de l'abscisse x : l'origine étant prise sur un nœud d'amplitude, et les nœuds étant équidistants de l, précisez la fonction de x qui régit les variations de l'amplitude.

2. Si on fait interférer deux ondes progressives de même fréquence se propageant en sens inverses, on obtient une onde stationnaire, si les ondes progressives satisfont à une condition supplémentaire qui entraîne l'existence de nœuds, c'est-à-dire de points d'amplitude nulle pour l'onde résultante : quelle est cette condition ?

3. Une onde stationnaire se produit dans une corde dont les deux extrémités sont fixes et qui vibre en deux fuseaux : dessinez cette corde à différentes dates pour bien montrer ses formes successives. Recommencez avec la même corde quand elle transmet une onde progressive : dessinez-la sur au moins une longueur d'onde.

4. Une corde de longueur L est fixée à ses deux extrémités : donnez les fréquences des ondes stationnaires qui peuvent s'y établir, connaissant la célérité v des ondes progressives que cette corde peut transmettre.

5. Même question que dans l'exercice ci-dessus dans le cas d'une corde dont une extrémité est fixe et l'autre libre (corde suspendue à une lame vibrante). De plus, dessinez les formes successives de la corde au cours du temps lorsqu'elle vibre sur la fréquence la plus basse possible.

6. Dans une corde, la célérité d'une onde progressive augmente avec la tension de la corde : montrez que lorsqu'on accorde un instrument de musique il faut augmenter cette tension pour faire rendre à la corde un son plus aigu.

Applications immédiates.

7. La célérité des ondes progressives dans une corde est $v = 10$ m/s. Cette corde est animée d'un mouvement sinusoïdal transversal de fréquence 2 Hz à l'une de ses extrémités A ; son autre extrémité B est fixe. En négligeant la réflexion sur l'extrémité mobile, déterminez les positions des nœuds de déplacement.

Réponse : $BN = n \cdot 2{,}5$ m, n entier.

8. Comparez les longueurs de deux tuyaux d'orgue du même jeu (même type de tuyau) qui donnent respectivement le la_3 (fréquence 440 Hz) et le do_3 (fréquence 262 Hz).

9. Dans l'expérience de Melde, la corde, de longueur 90 cm, vibre en trois fuseaux.

a) Comparez les mouvements des points A et A′ situés chacun à 15 cm des extrémités fixes de la corde.

b) Comparez le mouvement de A avec celui du milieu O de la corde.

Réponses : **a)** en phase ; **b)** en opposition de phase.

10. Une corde de longueur 1 m entre ses deux extrémités fixes, vibre en un seul fuseau, à la fréquence 100 Hz, pour un certain réglage de sa tension F.

a) Calculez dans ces conditions la célérité v des ondes dans la corde.

b) Sachant que cette célérité est proportionnelle à $\sqrt{F}$, que se produira-t-il si on quadruple la tension de la corde ?

Réponses : **a)** $v = 200$ m/s ; **b)** la fréquence propre de vibration sera doublée.

11. Quelle est la célérité v des ondes longitudinales dans un ressort hélicoïdal dont une extrémité est excitée par un vibreur de fréquence 100 Hz, dont l'autre extrémité est fixe et qui est le siège d'une onde stationnaire dont les nœuds de déplacement sont équidistants de 4 cm.

Réponse : $v = 8$ m/s.

Exercices expérimentaux.

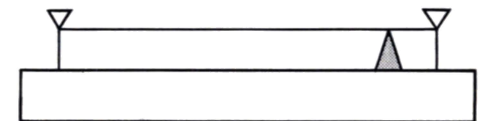
12. Une corde est suspendue à un portique. Secouez l'extrémité inférieure de la corde d'un mouvement périodique et trouvez un rythme tel qu'il s'établisse une onde stationnaire dans la corde. Comptez le nombre de fuseaux et mesurez la période des oscillations (comptez la durée d'au moins 10 périodes). Ensuite bornez-vous à envoyer un signal bref dans la corde et mesurez le temps nécessaire pour que ce signal fasse l'aller et retour. Comparez avec vos mesures précédentes et concluez.

13. Fabriquez-vous une « flûte indienne » avec des tubes de différentes longueurs fermés à une extrémité, ouverts à l'autre extrémité devant laquelle il faut souffler. L'exercice précédent vous donne les valeurs numériques nécessaires à la construction.

14. Si vous en avez la possibilité, ouvrez l'arrière d'un piano, vous y découvrirez différentes familles de cordes, de différentes longueurs. En les faisant jouer, essayez de retrouver l'influence, sur la hauteur du son, de certains facteurs signalés dans le cours.

15. Procurez-vous un instrument de musique à corde : guitare, violon..., et observez-le soigneusement : grosseur des cordes les unes par rapport aux autres, dispositifs de réglage des tensions (essayez de modifier celles-ci), modification des longueurs utiles. En somme, apprenez à en jouer si vous ne savez déjà.

16. Sur une forte planche, plantez deux gros clous à environ 1 m de distance et tendez dessus un fil de fer fin. Recommencez sur la même planche un autre montage identique au premier.



a) Faites vibrer l'une des cordes, observez l'onde stationnaire installée dans la corde.

b) Fabriquez des supports triangulaires permettant de délimiter des longueurs données de corde (figure ci-contre).
Accordez les deux cordes, pour qu'elles rendent le même son, en jouant sur leurs longueurs libres et éventuellement sur leurs tensions. Notez leurs longueurs.
Puis modifiez celles-ci de façon que les cordes soient à nouveau accordées. Quelle loi dégagez-vous ?

c) Conservez les réglages d'une des cordes qui vous servira d'étalon de fréquence : nous dirons arbitrairement qu'elle donne la note do. Accordez l'autre corde et notez la longueur correspondante, soit l_0.
En déplaçant ensuite le support mobile, « montez la gamme » et mesurez à chaque note la longueur correspondante. Dressez le tableau des valeurs $\frac{l_0}{l}$.
Vous devez approximativement trouver :

note	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
$\frac{l_0}{l}$	1	1,12	1,29	1,33	1,5	1,68	1,88	2

d) Que représentent, pour les notes jouées successivement, les rapports ainsi obtenus ?

17. Remplissez lentement une bouteille d'eau : le bruit du filet d'eau tombant dans la bouteille est de plus en plus aigu.
Pourquoi ?

Approfondissement.

18. On fait interférer deux ondes progressives de même longueur d'onde ; celle qui se dirige vers les x positifs a pour amplitude a, celle qui se dirige vers les x négatifs a pour amplitude $2a$. Quelle est l'amplitude de l'onde résultante aux endroits où elle est maximale, et aux endroits où elle est minimale ? Quelle est la distance de deux maxima ?

19. Dans l'expérience de Melde (figure 16) la corde est excitée transversalement à la fréquence 100 Hz et elle vibre en un seul fuseau lorsque sa longueur est 1 mètre et sa tension $F = 50$ N.

a) Calculez la masse linéique μ de la corde : on rappelle que la célérité v des ondes dans une corde est donnée par la relation $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

b) Sans changer la tension de la corde, quelles longueurs peut-on lui donner pour entrer en résonance (voyez sur la figure 16 comment le montage permet de modifier la longueur sans modifier la tension) ?

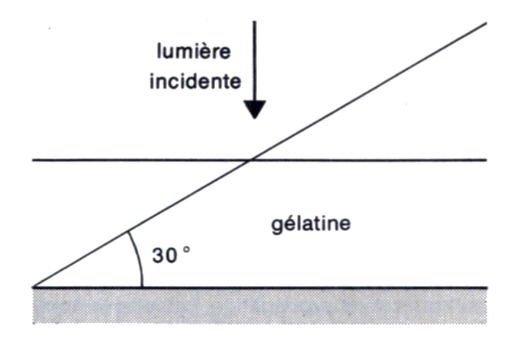
c) La corde ayant 1 m de longueur, pour quelles valeurs de la tension entre-t-elle en résonance : précisez l'aspect de la corde pour chacune de ces valeurs de F.

Réponses : **a)** $v = 200\ \text{m.s}^{-1}$, $\mu = 1{,}25$ g/m ;
b) $L = n$ mètres, n entier ; **c)** $\lambda = -\frac{2\ \text{m}}{n}$, n entier, d'où $F = \frac{50}{n^2}$ newtons, n est le nombre de fuseaux formés par la corde.

20. Une corde vibre en un seul fuseau entre ses deux extrémités fixes, distantes de 1 m ; le milieu M de la corde vibre avec une amplitude de 3 mm. Quelle est l'amplitude a de vibration d'un point N situé à 25 cm de l'une des extrémités de la corde ?

Réponse : $a = 3.10^{-3}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}12$ mm.

21. Un miroir métallique plan a été recouvert d'une lame de gélatine contenant des sels d'argent sensibles à la lumière. Une onde lumineuse plane monochromatique est envoyée sur ce miroir perpendiculairement à sa surface. Après développement, on réalise une coupe en biais de la gélatine suivant un plan faisant un angle de 30° avec la surface du miroir (figure ci-contre).
L'observation microscopique montre l'existence de stries noires équidistantes de 0,48 µm dans la gélatine.



a) Interprétez ce phénomène.

b) Déterminez la fréquence N de la radiation monochromatique et sa longueur d'onde dans le vide sachant que dans la gélatine la célérité de la lumière est $v = 2{,}4 \,.\, 10^8$ m/s.

Réponses : **a)** Onde stationnaire lumineuse ; dans la gélatine :
$\frac{\lambda'}{2} = \sin 30° \,.\, 0{,}48\ \mu\text{m} = 0{,}24\ \mu\text{m}$
d'où $N = 5 \,.\, 10^{14}$ Hz, et $\lambda = 0{,}6\ \mu$m dans le vide.

22. Supposons que la température d'une salle de concert augmente progressivement. Comment évoluent les hauteurs (fréquences) des sons émis par un orgue au cours du concert (la célérité du son augmente avec la température de l'air) ?
Si cet orgue est accompagné par des instruments à cordes, que devront faire les instrumentistes à corde, après la fin de l'entracte ?

23. Dans un tuyau sonore à embouchure de flûte ouvert, il y a un nœud de pression à chaque extrémité du tuyau.
L'air du tuyau vibre en émettant le son fondamental : montrez que celui-ci ne change pas de fréquence si on ferme le tuyau par une cloison rigide placée au milieu de sa longueur.

24 Deux sources S_1 et S_2 distantes de 10 cm émettent l'une vers l'autre, à la surface de l'eau, des ondes progressives décrites, à la date *t*, en leurs points d'émission respectifs par $y_1 = 2 \cdot 10^{-3} \cos 100\,\pi t$, $y_2 = -2 \cdot 10^{-3} \cos 100\,\pi t$, mesurées verticalement en mètre. La célérité des ondes est $v = 30$ cm/s.

a) Que pouvez-vous dire de l'état vibratoire du point situé au milieu de $S_1 S_2$?

b) En négligeant la diminution d'amplitude au cours de la propagation, calculez le nombre de nœuds et de ventres entre S_1 et S_2.

c) Quel changement apporte en réalité le fait qu'une onde progressive circulaire diminue d'amplitude à mesure que l'on s'éloigne de sa source ?

Réponses : **a)** immobile à tout instant ; **b)** $\lambda = 0{,}6$ cm, 33 nœuds, 34 ventres ; **c)** les minima d'amplitude ne sont plus des nœuds, car loin du centre une des ondes progressives a une amplitude plus forte que l'autre.

25. Un contrebassiste veut accorder son instrument : une corde, de longueur 80 cm, doit émettre le la_2 (fréquence 220 Hz). La masse linéique de la corde est de 5 g/m.

a) Quelle tension *F* doit-il lui donner ?

b) Pour jouer le si_2 (250 Hz) à quelle distance du point fixe haut de la corde doit-il poser son doigt sachant qu'en appuyant sur la corde il augmente sa tension de 5 % ? On rappelle que la célérité *v* dans une corde se calcule par la relation $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$.

Réponses : **a)** 620 N ; **b)** 7,9 cm.

26. Le larynx joue un rôle de résonateur analogue à celui d'un tuyau sonore, dans lequel l'excitation sonore est produite par les cordes vocales. Pourquoi les hommes possédant une volumineuse « pomme d'Adam » (cartilage qui limite le larynx), ont-ils généralement une voix grave ?

27. Dans l'expérience décrite figure 24, page 371, le haut-parleur émet un son de fréquence 400 Hz, et la célérité du son dans le tuyau vaut 340 m/s. Pour quelles longueurs, mesurées entre le niveau du liquide et le haut du tuyau, la colonne gazeuse entrera-t-elle en résonance ? On admettra que, pour l'onde stationnaire qui s'établit dans le tuyau, la surface de l'eau est un ventre de pression, et qu'il y a un nœud de pression à 1 cm au-dessus de l'extrémité supérieure du tuyau.

Réponse : $L_{cm} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) 42{,}5 - 1$, *n* nul ou entier positif.

28. Calculez la longueur d'un tuyau d'orgue à embouchure de flûte (un nœud de pression à chaque extrémité du tuyau) dont le son fondamental est le la_{-1} (28 Hz) dans l'air à 15 °C où la célérité du son vaut 340 m/s.

Réponse : 6,07 m.

29. Lorsqu'on frotte la tige d'un tube de Kundt (figure 13 page 362) on produit dans ce tube une onde stationnaire de déplacement longitudinal avec un nœud au milieu de la tige (point de fixation) et les ventres les plus proches à chaque extrémité de la tige. Dans le tube, la célérité du son est 330 m/s et on observe la formation de tas de poudre équidistants de 7,30 cm.

a) En déduire la célérité *v* des ondes longitudinales dans la tige sachant que sa longueur totale est 1 m.

b) Calculez la nouvelle équidistance des tas de poudre si on utilise une tige de 90 cm constituée du même métal.

Réponses : **a)** $v = 4\,520\ \text{m.s}^{-1}$; **b)** 6,57 cm.

30. Une onde plane progressive d'amplitude *a*, de pulsation ω, de célérité *v* se propage dans la direction de l'axe O*x* dans le sens des *x* positifs.

a) Écrivez son expression $s_1(t, x)$ sachant qu'au point O elle a pour expression $s_1 = a \cos \omega t$.

b) Elle se réfléchit sans changement de signe et sans diminution d'amplitude sur le plan *yOz* : donnez l'expression de l'onde réfléchie $s_2(t, x)$.

c) Donnez l'expression de l'onde résultante $s = s_1 + s_2$. Montrez que c'est une onde stationnaire, étudiez les positions des nœuds et des ventres.

Réponses : **a)** $s_1 = a \cos(\omega t - kx)$; **b)** $s_2 = a \cos(\omega t + kx)$; **c)** $s = 2\,a \cos kx \cdot \cos \omega t$, ventres à $n\dfrac{\lambda}{2}$ de l'obstacle, *n* entier, nœuds à $\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2}$ de l'obstacle.

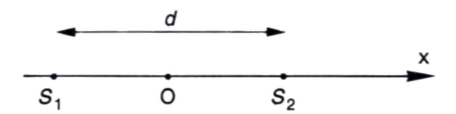
31 Deux sources S_1 et S_2 distantes de *d* (figure ci-dessous) émettent des vibrations qui en leur point d'émission ont respectivement pour expression $s_1 = a \cos \omega t$, $s_2 = a \cos(\omega t - \varphi)$ (φ compris entre O et $2\,\pi$). Ces vibrations se propagent l'une vers l'autre avec la célérité *v*.

a) Donnez les expressions de ces ondes progressives au point M (*x*), l'origine des abscisses étant le milieu O de $S_1 S_2$.

b) Donnez l'expression de l'onde stationnaire qui en résulte entre S_1 et S_2.

c) A quelle condition O est-il un nœud de vibration, un ventre de vibration ?

d) Donnez en fonction de φ et de λ, les abscisses des ventres les plus voisins de O.



e) Donnez de même les abscisses des nœuds.

f) Quelle est la nature de l'onde résultante à l'extérieur du segment $S_1 S_2$ où les ondes progressives émises par S_1 et S_2 se propagent dans le même sens ?

Réponses :

a) $s_1 = a \cos\left[\omega t - k\left(x + \frac{d}{2}\right)\right]$,

$s_2 = a \cos\left[\omega t + k\left(x - \frac{d}{2}\right) - \varphi\right]$;

b) $s = 2\,a \cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right).\cos\left(\omega t - k\frac{d}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$;

c) O est nœud si $\varphi = \pi$, ventre si $\varphi = 0$ ou $2\,\pi$;

d) ventres : $kx - \frac{\varphi}{2} = n\pi$, n entier, d'où

$x = \frac{\varphi\,\lambda}{4\,\pi}$ et $x = \frac{\varphi\,\lambda}{4\,\pi} - \frac{\lambda}{2}$;

e) nœuds : $x = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{\varphi}{2\,\pi}\right)\frac{\lambda}{2}$;

f) progressive, par exemple à droite de S_2 :

$s = a\left[\cos\left(\omega t - k\left(x + \frac{d}{2}\right)\right] + \right.$

$\left. + \cos\left[\omega t - k\left(x - \frac{d}{2}\right) - \varphi\right]\right]$

$s = 2\,a \cos\left(k \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\varphi}{2}\right).\cos\left(\omega t - kx - \frac{\varphi}{2}\right)$

ce qui lui donne la même longueur d'onde que les ondes progressives composantes.

32 Une onde progressive d'amplitude $2\,a$, de pulsation ω, se propage parallèlement à Ox dans le sens positif avec une célérité v. Au point O (x = O), elle rencontre un obstacle sur lequel elle se réfléchit sans changement de signe et avec un coefficient de réflexion $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que son amplitude devient a après réflexion.

a) Donnez l'expression de l'onde incidente s_1 à la date t au point M (x), sachant qu'en O $s_1 = 2\,a \cos \omega t$.

b) Donnez de même l'expression s_2 de l'onde réfléchie.

c) Calculez l'expression de l'onde résultante $s = s_1 + s_2$. Montrez que ce n'est ni une onde stationnaire, ni une onde progressive.

d) Déterminez les positions des points d'amplitude maximale et minimale.

Réponses : **a)** $s_1 = 2\,a \cos(\omega t - kx)$;
b) $s_2 = a \cos(\omega t + kx)$;
c) $s = 3\,a \cos kx \,.\cos \omega t + a \sin kx \,.\sin \omega t$

$s = a\sqrt{9\cos^2 kx + \sin^2 kx}\,.\cos(\omega t - \alpha)$

avec α tel que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \operatorname{tg} kx$. La phase $\omega t - \alpha(x)$ dépend de x : l'onde n'est pas stationnaire ; mais cette phase ne dépend pas linéairement de x, l'onde n'est pas progressive et d'ailleurs son amplitude dépend de x mais sans jamais s'annuler ;

d) Maxima pour $\cos kx = \pm 1$, $x = n\frac{\lambda}{2}$, $A_M = 3\,a$; minima pour $\sin kx = \pm 1$, $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$, $A_m = a$.

33. En plongée profonde, les plongeurs respirent un mélange d'oxygène et d'hélium dans lequel la célérité du son est plus élevée que dans l'air. La conversation étant possible dans la plongée profonde en caisson, on constate alors que les voix sont beaucoup plus aiguës qu'à l'air libre. Expliquez, après avoir réfléchi à l'exercice précédent.

34. On admettra que pour les gaz parfaits de même atomicité la célérité du son est proportionnelle à $\sqrt{\frac{T}{M}}$, T température absolue, M masse molaire du gaz.
Un tuyau d'orgue est d'abord alimenté en air à 15 °C (masse molaire M = 29 g) et il rend un son de fréquence 440 Hz. On remplace progressivement l'air par de l'oxygène pur à 15 °C (masse molaire M' = 32 g, même atomicité que l'azote).

a) Que peut-on constater ?

b) Quelle est la fréquence N' du son émis par le tuyau lorsque tout l'air en a été chassé par de l'oxygène pur ?

c) A quelle température faudrait-il alors porter le tuyau pour qu'il émette à nouveau un son de 440 Hz ?

Réponses : pour tout tuyau de longueur donnée, $\frac{v}{N}$ = constante, d'où **a)** la fréquence diminue progressivement avec l'arrivée de l'oxygène ;

b) $N' = 440\sqrt{\frac{29}{32}} = 419$ Hz ; **c)** $t' = 44{,}8$ °C.

20 Particules de haute énergie.

I. Insuffisances de la mécanique newtonienne.

1. Rappels.
2. Confrontations des prévisions newtoniennes aux réalités expérimentales.
3. Propriétés remarquables de la célérité de la lumière.

II. Les grandeurs relativistes pour une particule.

1. Quantité de mouvement relativiste.
2. Energies relativistes.
3. Autres relations utiles, déduites des précédentes.
4. Unités pratiques.

III. Applications

1. Comment savoir si une particule est relativiste ?
2. Accélérateurs de particules.
3. Quantité de mouvement d'une particule évoluant dans un champ magnétique.
4. Détecteurs.



Vue aérienne des installations du Centre Européen de Recherches Nucléaires (C.E.R.N.). A gauche, le lac Léman. Au fond, la chaîne du Mont-Blanc. En surimpression, les cercles indiquent par taille croissante : le synchrotron à protons, les anneaux d'intersection et le supersynchrotron de 2,2 km de diamètre.

Les particules chargées, soumises à des tensions élevées ou accélérées par des processus divers dans l'Univers, atteignent des vitesses proches de celle de la lumière.
Dans ces conditions, les lois de la ***mécanique newtonienne*** *ne rendent plus compte des faits expérimentaux ; elles doivent être corrigées conformément aux idées proposées par Einstein dans la* ***théorie de la Relativité.***

I. Insuffisances de la mécanique newtonienne.

1. Rappels.

Les lois de la mécanique newtonienne ont été établies à partir de nombreuses observations d'interactions entre systèmes macroscopiques (c'est-à-dire de dimensions suffisantes pour être directement accessibles à nos sens). Rappelons-les brièvement.

a) Lois d'interaction.

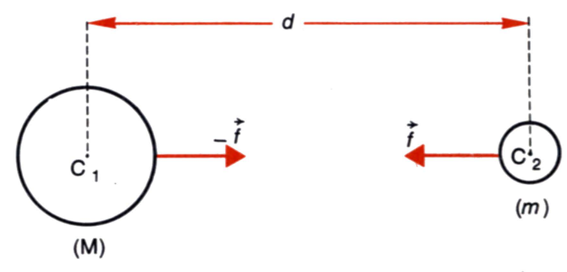
• **Loi de Newton.** Deux objets matériels, de masses M et m, dont les centres d'inertie sont distants de d, sont en interaction attractive (figure 1). La valeur commune aux deux forces d'interaction est :

$$f = G\,\frac{M \,.\, m}{d^2},$$

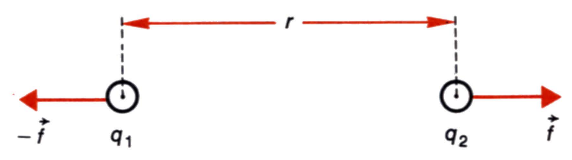
où $G \approx 6{,}672 \,.\, 10^{-11}$ unité SI (vérifiez que cette unité est aussi le $\mathrm{N\,.\,m^2/kg^2}$). La constante G est appelée « Constante universelle de gravitation » (chapitre 5, page 69).

• **Loi de Coulomb.** Deux objets « ponctuels » électrisés, porteurs des charges q_1 et q_2, distants de r, sont en interaction répulsive lorsque les charges ont même signe, attractive dans le cas contraire (figures 2). La valeur commune aux deux forces d'interaction est :

$$f = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\;\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$



1. Loi de Newton. La valeur commune aux deux forces d'interaction attractive est $f = G\frac{M\,.\,m}{d^2}$.



a) Les deux charges sont toutes deux positives, ou toutes deux négatives.



b) Charges de signes contraires.
2. Interactions entre particules chargées.

Un système est isolé lorsqu'il n'est pas en interaction avec le milieu extérieur.

où $\frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0} \approx 9\,.\,10^9$ unité SI (vérifiez que cette unité est aussi le N . m^2/C^2). $\frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}$ est la « constante des interactions électriques » (chapitre 5, page 70).

• **Loi de Lorentz.** Une particule de charge q, de vecteur vitesse $\vec{v}$, évoluant dans des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$, subit une force de vecteur associé :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

b) Lois de conservation.

Les lois de conservation sont étonnantes de simplicité : certaines grandeurs physiques, dites **conservatives,** ne sont pas modifiées lors des **interactions quelconques** entre diverses parties d'un **système isolé.**
Pour un système isolé, il y a, en mécanique newtonienne :
— conservation du vecteur quantité de mouvement ;
— conservation de l'énergie ;
— conservation de la charge électrique ;
— conservation de la masse.

2. Confrontations des prévisions newtoniennes aux réalités expérimentales.

• Les lois de la **mécanique newtonienne** permettent de prévoir l'évolution d'un système macroscopique lorsque les conditions initiales (positions et vitesses) et les forces agissantes sont connues. Vous pouvez par exemple prédire la trajectoire d'un projectile si vous savez comment il va être lancé : de même, les astronomes calculent **avec une grande précision** les positions futures des planètes, les dates des éclipses à venir, etc... Du point de vue macroscopique, les succès de la mécanique de Newton sont indéniables.

• Cependant, les exemples qui suivent vont vous montrer que, pour des particules très rapides, les lois newtoniennes ne rendent pas compte des résultats expérimentaux. Ultérieurement (chapitre 25), nous verrons aussi que cette mécanique n'est pas bien adaptée à la description des systèmes comportant des particules astreintes à occuper des volumes de très petites dimensions.

a) Action d'un champ électrique uniforme sur des particules chargées.

Application des lois newtoniennes. Des électrons, émis pratiquement sans vitesse initiale par un filament chaud (F), acquièrent de l'énergie cinétique lorsqu'ils subissent l'action d'un champ électrique uniforme $\vec{E}$ (figure 3). Ce champ peut être créé par un condensateur plan dont les armatures, distantes de d, sont soumises à une tension électrique U.

Lorsque les électrons, partis du repos, arrivent avec la vitesse $\vec{v}$ au niveau de la plaque positive :

— leur énergie cinétique a augmenté de

$$\Delta E_c = E_{c(\text{finale})} - E_{c(\text{initiale})} = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

— leur énergie potentielle d'origine électrique (qui vaut $(-e) \,.\, V$ en un point du champ où le potentiel est V) a diminué de

$$E_{p(\text{initiale})} - E_{p(\text{finale})} = -eV_A - (-e)\,V_B = e(V_B - V_A) = eU\,.$$

La conservation de l'énergie se traduit donc par

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{2\,\frac{e}{m}\,U}\,.$$

Le calcul précédent est évidemment applicable à des particules de charge et de masse quelconques.

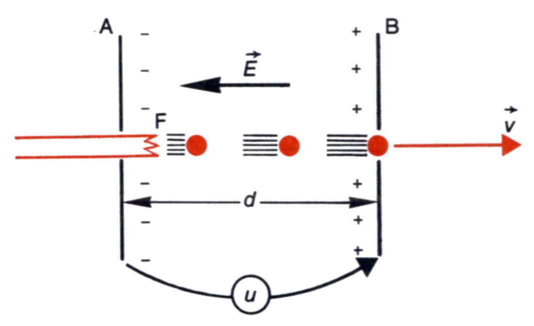
• **Applications numériques.** Pour un **électron,** de charge $e \approx 1{,}6 \,.\, 10^{-19}$ C (en valeur absolue) et de masse $m \approx 9{,}1 \,.\, 10^{-31}$ kg, on obtient

$$v = \sqrt{2 \,.\, \frac{1{,}6 \,.\, 10^{-19}}{9{,}1 \,.\, 10^{-31}}\,U} \approx 5{,}93 \,.\, 10^5\sqrt{U} \approx 6 \,.\, 10^5\sqrt{U}\,.$$

Une faible tension accélératrice, par exemple $U = 100$ V, lui fait acquérir une vitesse considérable : près de 6 000 km/s !

Il est d'usage de comparer les vitesses élevées à la célérité c des ondes électromagnétiques dans le vide en formant le rapport $\frac{v}{c}$.

$$\text{Ici,} \quad \frac{v}{c} \approx \frac{6 \,.\, 10^5\sqrt{U}}{3 \,.\, 10^8} \approx 2 \,.\, 10^{-3}\sqrt{U}\,.$$



3. Production et accélération d'électrons dans un champ électrique $\vec{E}$ uniforme $\left(E = \frac{U}{d},\right.$ avec $\left.V_B - V_A = U\right)$.

Electron :

charge $-e \approx -1{,}6 \,.\, 10^{-19}$ **C**

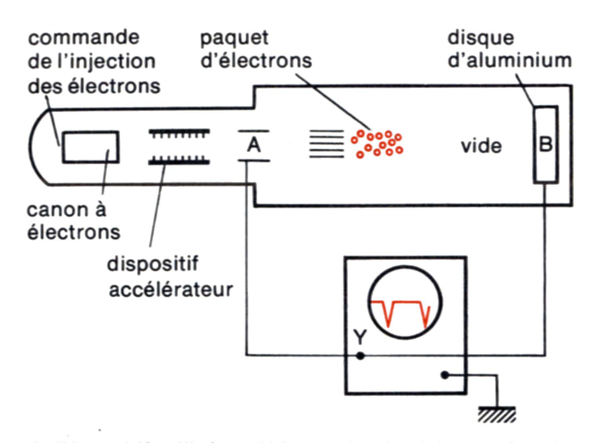
masse $m_e \approx 9{,}1 \,.\, 10^{-31}$ **kg.**

Proton :

charge $+e \approx 1{,}6 \,.\, 10^{-19}$ **C**

masse $m_e \approx 9{,}1 \,.\, 10^{-31}$ **kg.**

Célérité de la lumière dans le vide : $c \approx 3 \,.\, 10^8$ **m/s.**



4. Dispositif utilisé en 1964 par le physicien américain William Bertozzi pour mesurer le « temps de vol » des électrons entre A et B. Le canon à électrons émet 120 paquets d'électrons par seconde. La distance AB vaut 8,4 m. La vitesse de balayage de l'oscillographe est de l'ordre de 10^6 m/s. Les deux conducteurs AY et BY doivent être identiques et de même longueur ; pourquoi ?

Pour un **proton,** 1 836 fois plus massif que l'électron, on trouve :

$$v \approx 1{,}38 \, . \, 10^4 \sqrt{U} \quad \text{et} \quad \frac{v}{c} \approx 4{,}6 \, . \, 10^{-5} \sqrt{U}.$$

Par exemple, $\frac{v}{c} \approx 4{,}6 \, . \, 10^{-3}$ pour des protons accélérés sous une tension $U = 10$ kV.

• **Confrontation à l'expérience.**

Dispositif. La figure 4 donne le principe d'un dispositif qui permet de mesurer l'intervalle de temps mis par des électrons pour parcourir dans le vide une assez longue distance AB, de l'ordre de la dizaine de mètres. Un canon à électrons, commandé par une photoélectrode éclairée par intermittence, émet les particules par paquets. Chaque « bouffée » d'électrons est ensuite accélérée, puis traverse une électrode annulaire (A) qui en capte un petit nombre. (A) est reliée à l'entrée Y d'un oscillographe, sur lequel on observe un premier pic traduisant le passage en (A) du paquet. Les électrons achèvent leur course en étant absorbés par un disque d'aluminium (B), relié à la même entrée Y de l'oscillographe ; d'où un second pic sur l'écran, pour leur arrivée.
La vitesse de balayage étant connue, on déduit le « temps de vol » des électrons en mesurant sur l'oscillographe la distance entre les deux pics. S'ils sont, par exemple, distants de 3 cm pour une vitesse de balayage de 10^6 m/s, c'est qu'il a fallu $\Delta t = 3 \, . \, 10^{-2} \times 10^{-6} = 3 \, . \, 10^{-8}$ s pour que les électrons passent de A en B. Leur vitesse vaut alors

$$\frac{AB}{\Delta t} = \frac{8{,}4}{3 \, . \, 10^{-8}} = 2{,}8 \, . \, 10^8 \text{ m/s} \approx 0{,}93 \, c.$$

L'un des intérêts du dispositif précédent est que l'on dispose d'appareils permettant d'atteindre des tensions accélératrices considérables, de l'ordre de plusieurs millions de volts.

Résultats. Pour des tensions accélératrices assez faibles, inférieures à 1 000 V par exemple, l'accord entre les valeurs de la vitesse calculée par $v = \sqrt{2 \frac{e}{m} U}$ et la vitesse mesurée est excellent.

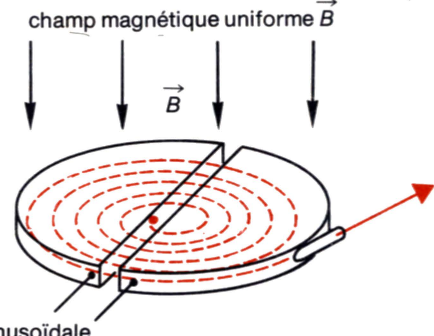
On constate alors que la vitesse calculée par la relation newtonienne s'écarte de plus en plus, par excès, de la valeur mesurée. Le tableau suivant précise cette comparaison :

Tension accélératrice U (volt)	100	1 000	10^4	10^5	$2{,}5 \cdot 10^5$	10^6	10^7
$\frac{v}{c} \approx 2 \cdot 10^{-3}\sqrt{U}$ (calculé)	0,02	0,06	0,20	0,63	1,0	2,0	6,3
$\frac{v}{c}$ (réel)	0,02	0,06	0,2	0,55	0,74	0,94	0,99

• **Conclusion.** Le tableau précédent met en évidence deux résultats importants :

— **Pour des tensions accélératrices assez faibles, la mécanique newtonienne rend bien compte des phénomènes observés.**
— **La vitesse mesurée des électrons reste inférieure à la célérité de la lumière, même lorsque les électrons sont accélérés sous très haute tension.**

Ce dernier résultat expérimental, en contradiction avec les prévisions newtoniennes, est général. Il est confirmé par des considérations théoriques et nous l'admettrons : ***c* constitue une limite supérieure à la vitesse des corps matériels.**



5. Le cyclotron est un accélérateur cyclique de particules chargées. Une source d'ions centrale S est placée entre deux cavités plates hémicylindriques à l'intérieur desquelles règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme. Après chaque demi-tour, les ions subissent entre les deux cavités une accélération sous l'influence d'une tension sinusoïdale dont la pulsation est égale à la vitesse angulaire des ions. Les demi-cercles successifs ont un rayon croissant, mais chacun d'eux est décrit à la même vitesse angulaire.

b) Action d'un champ magnétique uniforme sur des particules chargées.

• **Rappels.** Dans un champ magnétique $\vec{B}$, une particule de masse m, de charge q et de vitesse $\vec{v}$, est soumise à la force magnétique $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Cette force, orthogonale à chaque instant au déplacement, ne modifie pas l'énergie cinétique de la particule. Lorsque le vecteur vitesse $\vec{v}$ est constamment orthogonal au champ $\vec{B}$, le mouvement est **circulaire uniforme,** de vitesse angulaire $\vec{\omega} = -\dfrac{q}{m}\vec{B}$ (chapitre 8, page 139).

Ces propriétés sont mises à profit dans la réalisation des **cyclotrons** (figure 5).

• **Applications numériques.** La charge massique des **électrons** vaut

$$\frac{q}{m} \approx \frac{1{,}602 \, . \, 10^{-19}}{9{,}110 \, . \, 10^{-31}} \approx 1{,}76 \, . \, 10^{11} \text{ C/kg}$$

celle des **protons,** environ 1 836 fois moindre, est 9,58 . 10^{15} C/kg.

La relation $\omega = \frac{v}{R} = \frac{q}{m} B$

permet d'exprimer la vitesse v d'une particule en mouvement circulaire (rayon R) dans un champ magnétique de valeur B :

$$v = \frac{q}{m} RB.$$

Pour certains appareils, les « synchrocyclotrons » chez lesquels on impose à la fois le champ magnétique et le rayon de la trajectoire, on voit immédiatement que cette dernière relation ne peut convenir pour des particules rapides puisqu'elle n'impose aucune limite à la vitesse v. Un choix convenable du champ magnétique (on ne dépasse guère quelques teslas) et du rayon R pourrait conduire à des vitesses supérieures à c, ce qui serait en contradiction avec la conclusion précédente (page 383).

Le tableau suivant permet de comparer, pour diverses valeurs du champ magnétique, les vitesses calculées par $v = \frac{q}{m} RB$ à celles qui sont obtenues en réalité pour des électrons en mouvement circulaire uniforme de rayon R = 1 m.

$B_{(T)}$	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	$1{,}7 \, . \, 10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	1
$\frac{v}{c}$ (calculé)	$5{,}9 \, . \, 10^{-3}$	$5{,}9 \, . \, 10^{-2}$	0,59	1	5,9	59	590
$\frac{v}{c}$ (réel)	$5{,}9 \, . \, 10^{-3}$	$5{,}9 \, . \, 10^{-2}$	0,51	0,71	0,98	0,99	≈ 1

Les écarts deviennent sensibles à partir de $B = 10^{-3}$ T.

c) Chocs élastiques de particules.

On dit que deux particules subissent un choc **élastique** lorsqu'elles ne changent pas de nature et se retrouvent dans le même état après la collision : les vecteurs vitesses des particules sont modifiés lors de la collision.

• **Prévisions newtoniennes.**
Bornons-nous à envisager le cas où une particule vient en choquer une autre, identique, immobile (figure 6).
— **La conservation de l'énergie** ne fait intervenir que l'énergie cinétique de translation des particules (en effet, une particule supposée ponctuelle ne possède pas d'énergie cinétique de rotation sur elle-même). On écrit donc :

$$\frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{1}{2} m V_1'^2 + \frac{1}{2} m V_2'^2$$

soit :

$$V_1^2 = V_1'^2 + V_2'^2 . \qquad (1).$$

— **La conservation de la quantité de mouvement donne :**

$$m\vec{V}_1 = m\vec{V}_1' + m\vec{V}_2', \quad \text{d'où} \quad \vec{V}_1 = \vec{V}_1' + \vec{V}_2' . \qquad (2)$$

Par élévation au carré de la relation (2), il vient :

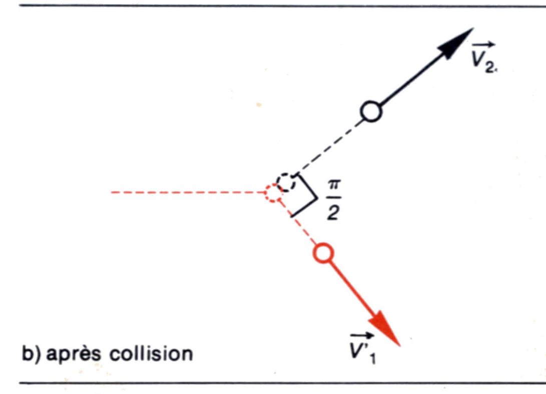
$$V_1^2 = V_1'^2 + V_2'^2 + 2\,\vec{V}_1' . \vec{V}_2'$$

d'où, par comparaison à (1) : $\vec{V}_1' . \vec{V}_2' = 0$. Le produit scalaire étant nul, les deux vecteurs vitesses après choc sont en général **orthogonaux.** (On peut avoir aussi $\vec{V}_1' = \vec{0}$ dans le cas du choc de plein fouet, ou $\vec{V}_2' = \vec{0}$ ... si le projectile rate la cible.)

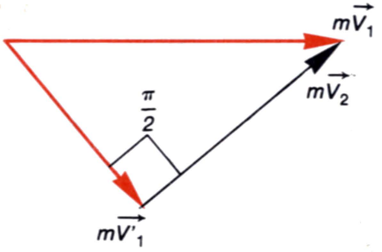
• **Confrontation à l'expérience.** Si l'on envoie des **particules chargées** dans un liquide prêt à entrer en ébullition, le passage des corpuscules provoque l'apparition de fines bulles de vapeur dont la succession matérialise, pendant un bref instant avant l'ébullition, le trajet des particules. Une photographie au flash, prise au bon moment, permet de visualiser la trajectoire. Cette propriété est utilisée dans les **chambres à bulles.** Dans le chapitre suivant, nous apprendrons à déterminer les vitesses des particules à partir de tels clichés.



a) avant collision

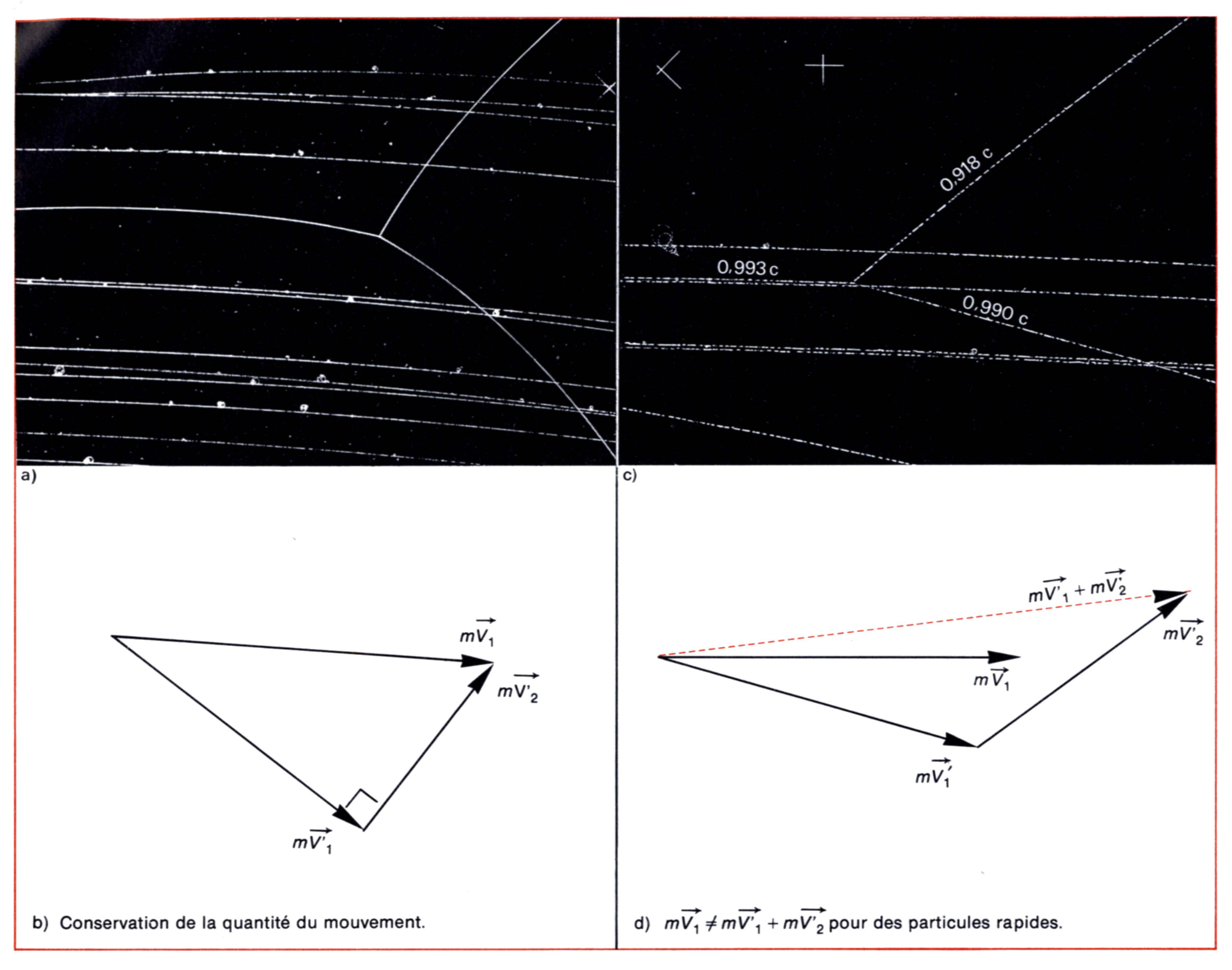


b) après collision



c) conservation de la quantité de mouvement.
$m\vec{V}_1 = m\vec{V}_1' + m\vec{V}_2'$

6. Choc d'une particule sur une autre de même masse, immobile.



7. Photographie de collisions élastiques proton-proton prises dans des chambres à bulles. Les trajectoires sont incurvées par des champs magnétiques.
a) Protons lents ; c) Protons très rapides ; b) et d) Constructions.

Les figures 7a et 7c (page 386) sont des photographies de collisions proton-proton prises dans des chambres à bulles. Dans le premier cas, le proton incident est relativement lent et l'écart angulaire entre les trajectoires après le choc est droit, conformément aux prévisions newtoniennes. La figure 7b indique une construction montrant la **conservation de la quantité de mouvement.**
En revanche, dans le cas de la figure 7c, les particules sont très rapides : les valeurs des vitesses sont indiquées en fonction de c sur le cliché. Les prévisions newtoniennes sont infirmées car l'écart angulaire des trajectoires après le choc est visiblement aigu. De plus, la construction 7d montre qu'il n'y a plus égalité entre $m\overrightarrow{V_1}$ et $m\overrightarrow{V_1'} + m\overrightarrow{V_2'}$.

• **Conclusion.** Les lois de la Mécanique Newtonienne ne rendent plus compte des faits expérimentaux pour des particules se déplaçant à grande vitesse. Par « grande vitesse », il faut entendre vitesse proche de la célérité de la lumière, dont nous allons maintenant étudier quelques propriétés.

3. Propriétés remarquables de la célérité de la lumière.

a) *c*, vitesse limite.

• Nous avons déjà indiqué (page 383) qu'**aucun objet matériel ne peut atteindre** (ni, a fortiori, dépasser) **une vitesse égale à *c*.** Cela est assez étonnant car, a priori, rien n'empêche de penser que l'on puisse aller de plus en plus vite. Ce résultat expérimental a été prévu théoriquement par Einstein en 1905.

• Un autre aspect de la célérité de la lumière envisagée comme vitesse limite est le suivant : on considère actuellement que la célérité c constitue la **vitesse maximale à laquelle une information peut être propagée.** Les communications intercontinentales ou spatiales se font le plus souvent par la voie des **ondes électromagnétiques.** Lancée le 3 mars 1972, et s'éloignant de nous en passant au voisinage de différentes planètes, la sonde américaine Pionner 10 a croisé l'orbite d'Uranus le 11 juillet 1979 ; elle se dirige vers Pluton, dont elle frôlera l'orbite en 1987. Si elle continue alors à émettre des informations codées à l'intention de la Terre, celles-ci ne seront captées qu'environ 6 heures après leur émission.

Aucun corps matériel ne peut atteindre une vitesse égale à *c*.

b) La célérité de la lumière ne dépend pas de la vitesse de sa source.

• Lorsque vous voulez marquer un but au hand-ball, vous avez intérêt à courir pour ajouter votre vitesse à celle que vous communiquez au ballon.
Curieusement, il n'en va pas de même pour la lumière : une source lumineuse n'ajoute pas sa vitesse à la célérité de la lumière qu'elle émet.

• Ce résultat contredit les prévisions de la cinématique newtonienne. Les physiciens ont élaboré un grand nombre d'expériences très précises dans le but de déceler l'influence de la vitesse de la source lumineuse sur la célérité de la lumière. Toutes les expériences ont montré que cette vitesse n'avait aucune influence.
Vous devez donc admettre ce résultat comme un **fait expérimental : la célérité de la lumière ne dépend pas de la vitesse de la source qui l'émet.**

• Le physicien anglais James Clark Maxwell a montré que **la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide ne dépend pas de leur fréquence.**
On exprime ce résultat en disant que le vide est un **milieu non dispersif** pour les ondes électromagnétiques.
En revanche, la célérité de la lumière dans les milieux transparents dépend de la fréquence des ondes ; les plus rapides précèdent les plus lentes : il y a dispersion. La vitesse v de propagation dans les milieux matériels est toujours inférieure à c : on écrit $v = \frac{c}{n}$, où n est l'**indice de réfraction,** qui dépend de la fréquence.

• **Remarque.** Les physiciens disposent tout de même d'un moyen pour savoir si une source lumineuse, par exemple une étoile, est en mouvement ou non. Les atomes excités de l'étoile émettent des radiations qui donnent, par dispersion, des spectres lumineux caractéristiques des atomes émetteurs (revoir le cours de Première). On constate que les raies des spectres sont décalées vers le rouge (c'est-à-dire vers les basses fréquences), ce qu'on interprète par un mouvement d'éloignement des étoiles. Ce phénomène est analogue à celui que l'on observe lorsqu'un véhicule nous croise, puis s'éloigne de nous : il se produit une baisse de fréquence des sons qu'il émet. Cette baisse de fréquence est sensible à notre oreille : le son devient plus grave.
Les variations apparentes de fréquence, dues aux mouvements des sources, constituent **l'effet Doppler.**
Ainsi, le mouvement d'une source affecte la fréquence des radiations, mais pas leur célérité.



James-Clark Maxwell (1831-1879), précurseur de la Relativité

c) Invariance de *c*.

Imaginez que vous soyez dans un véhicule très rapide et que vous allumiez les phares ; un objet lointain sera illuminé au bout d'une fraction de seconde (d'une très petite fraction !).
Vos phares constituent **une source lumineuse immobile par rapport à vous :** une mesure vous montrerait que la lumière émise s'éloigne de vous avec la célérité c. Des observateurs, immobiles par rapport à votre véhicule, mesurant avec une grande précision la célérité de la lumière émise par les phares en mouvement, trouveraient la **même** valeur que vous : c, puisque celle-ci ne dépend pas de la vitesse de la source.
En d'autres termes, des observateurs en mouvement les uns par rapport aux autres **obtiennent la même valeur** pour la célérité c, lorsqu'ils la mesurent dans les référentiels auxquels ils sont respectivement liés.

La célérité de la lumière est une grandeur invariante vis-à-vis d'un changement de repère.

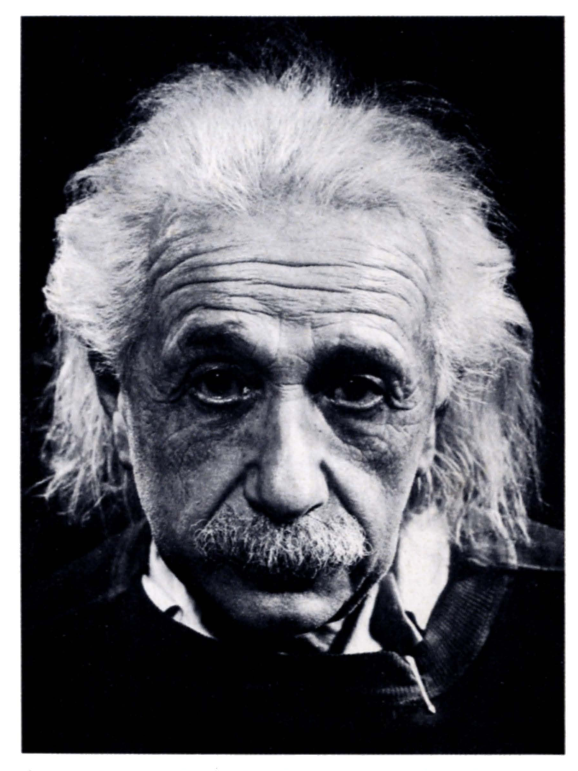
- Ce résultat peut passer pour paradoxal. C'est en réfléchissant à ses implications, et en se demandant si les lois physiques sont **relatives** aux mouvements des observateurs, qu'Albert Einstein (photo ci-contre) a élaboré sa théorie de la **Relativité :** lorsqu'on limite les changements de référentiels à ceux qui sont liés à des observateurs galiléens, la théorie prend le nom de **Relativité Restreinte.** Si vous réfléchissez à la façon dont on mesure les vitesses, vous comprendrez peut être que cette théorie amène à reconsidérer nos concepts d'**espace** et de **temps.**

- Les grandeurs physiques qui, comme c, ont même valeur pour des observateurs en mouvement les uns par rapport aux autres, sont qualifiées d'**invariantes vis-à-vis du changement de référentiel** qui fait passer d'un observateur à l'autre, mobile par rapport au premier.
c n'est pas le seul invariant ; par exemple, la **masse** ou la **charge électrique** sont aussi des invariants. Il en existe d'autres...

Remarque. Les longueurs et les intervalles de temps ne sont pas des invariants.

d) *c*, constante universelle.

Nous n'avons aucun moyen de modifier la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Mesurée n'importe où, dans n'importe quelle direction et par n'importe qui, cette célérité a toujours la même valeur. On dit qu'il s'agit d'une **constante universelle.** Les constantes G (gravitation) et ε_0 (interactions électriques) sont aussi des constantes universelles.



Albert Einstein (1879-1955), fondateur de la Relativité.

II. Les grandeurs relativistes pour une particule.

Dans tout ce qui suit, nous ne traiterons que de particules élémentaires considérées comme des « points matériels ». Conformément à l'usage, nous appellerons désormais **particules relativistes** celles dont la vitesse v est une fraction notable de la célérité c des ondes électromagnétiques. Cette fraction est habituellement désignée par la lettre grecque β (« bêta ») : $\boxed{\beta = \frac{v}{c}}$.

Une particule est considérée comme relativiste lorsque « son β » dépasse une valeur de l'ordre de 0,1 ce qui correspond à des vitesses supérieures à environ 30 000 km/s !

Guidés par des considérations théoriques, avec le souci de continuer à disposer de **lois de conservation,** les physiciens ont été amenés à modifier les définitions de certains concepts, comme ceux de quantité de mouvement ou d'énergie. Voici les résultats auxquels ils ont abouti.

1. Quantité de mouvement relativiste.

• Le **vecteur quantité de mouvement** $\vec{p}$ d'une particule de masse m et de vecteur vitesse $\vec{v}$ est **défini** par la relation :

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}.$$

Il a même direction et sens que le vecteur vitesse.

• Par rapport à l'expression $\vec{p} = m\vec{v}$ de la mécanique newtonienne, il s'introduit un terme correctif désigné traditionnellement par la lettre grecque γ (« gamma ») :

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}.$$

$c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.

γ est **toujours supérieur ou égal à 1,** mais ne diffère pas notablement de l'unité tant que $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$ est négligeable vis-à-vis de 1 (tableau n° 8). Par exemple, pour $\beta = 0{,}01$ ($v \simeq 3\,000$ km/s), $\gamma \simeq 1{,}000\,05 \simeq 1$. Aux faibles vitesses ($\beta \simeq 0{,}1$), la relation $\vec{p} = m\vec{v}$ est donc applicable avec une excellente approximation.

• Enfin, γ n'est réel que si v est inférieur à c. Il devient infiniment grand lorsque v tend vers c. Cela traduit bien l'impossibilité pour les corps matériels d'atteindre une vitesse égale à c.

β	γ
0,050	1,001
0,100	1,005
0,200	1,02
0,300	1,05
0,400	1,09
0,500	1,15
0,600	1,25
0,700	1,40
0,800	1,67
0,900	2,29
0,990	7,09
0,999	22,4
1	∞

8. Tableau indiquant les valeurs approchées de $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ pour diverses valeurs de β. γ ne commence à différer notablement de 1 que lorsque β est supérieur à 0,1.

2. Énergies relativistes.

a) Énergie totale.

Une particule de masse m et de vitesse v possède une énergie totale **définie** par :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{ou} \quad E = \gamma\, mc^2$$

Remarquons que l'énergie d'une particule de masse m non nulle deviendrait infinie si sa vitesse pouvait atteindre la valeur c !

b) Énergie au repos E_0.

• L'expression précédente montre qu'**un corpuscule immobile possède encore de l'énergie,** considérée comme de l'**énergie interne.** Pour $v = 0$, il vient : $E_0 = mc^2$

Puisque la célérité c est une constante universelle, cette relation établit **une équivalence entre la masse d'un objet et son énergie au repos E_0,** encore appelée pour cette raison « énergie de masse ».

• D'après cette expression, un kilogramme de matière au repos renferme une énergie considérable ($mc^2 = 1 \times (3\,.\,10^8)^2 = 9\,.\,10^{16}$ J) qui suffirait à assurer les besoins énergétiques totaux de la France pendant une dizaine de jours. Mais on ne dispose pas encore de moyens rentables pour transformer intégralement la matière en énergie.

c) Énergie cinétique.

• **Définition.** L'énergie d'une particule immobile est $E_0 = mc^2$. Quand elle est mise en mouvement, elle acquiert de l'énergie cinétique E_c qui s'ajoute à la précédente pour donner l'énergie totale $E = E_0 + E_c$. Cette relation fait comprendre le qualificatif de « totale » donné à l'énergie E. Ainsi, l'énergie cinétique apparaît comme l'excès de l'énergie totale d'une particule sur son énergie au repos :

$$\boxed{E_c = E - E_0}$$

L'expression de l'énergie cinétique d'une particule est donc :

$$E_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = (\gamma - 1)\, mc^2 .$$

• **Cas des faibles vitesses.**

Lorsque $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$ est très inférieur à 1, $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ est voisin de $1 + \frac{\beta^2}{2}$, d'où : $E_c \approx mc^2\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) - mc^2 = mc^2\,\frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{2}mv^2$.

Lorsque ε est nettement inférieur à 1, on a, pour tout n : $(1 + \varepsilon)^n \quad 1 + n\varepsilon$.

On retrouve, avec satisfaction, l'expression de l'énergie cinétique en mécanique newtonienne.

• **Remarques.**

— Les formules :

$$\vec{p} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{et } E_c = E - E_0 = (\gamma - 1)\, mc^2$$

qui redonnent les relations classiques dans l'approximation des vitesses faibles, sont donc **plus générales** que les formules newtoniennes.

— Pour des vitesses faibles, l'énergie totale d'une particule s'écrit :

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 .$$

Cette énergie totale ne s'identifie pas à ce que nous avions appelé « l'énergie mécanique totale », qui faisait intervenir l'énergie potentielle E_p

$$E = E_c + E_p$$

3. Autres relations utiles, déduites des précédentes.

• Dans $\vec{p} = \dfrac{m \quad \vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, l'énergie n'intervient pas explicitement.

Dans $E = \dfrac{m \quad c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, la quantité de mouvement ne figure pas.

• En formant le rapport des deux expressions précédentes, on obtient $\dfrac{\vec{p}}{E} = \dfrac{\vec{v}}{c^2}$, que l'on écrit aussi :

$$\boxed{\vec{p}c = \frac{\vec{v}}{c} E}$$

, où la masse n'apparaît pas.

• Enfin, une relation indépendante de la vitesse s'obtient en remplaçant par exemple $\dfrac{v}{c}$ par $\dfrac{pc}{E}$ dans l'expression de définition de l'énergie totale :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{pc}{E}\right)^2}}$$

$$\text{d'où : } E^2 \left(1 - \left(\frac{pc}{E}\right)^2\right) = m^2 c^4 .$$

L'énergie totale d'une particule relativiste s'exprime donc par la relation :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 .$$

ou

$$\boxed{E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} .$$

Formulaire relativiste

$\beta = \dfrac{v}{c} \qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

$E = \gamma m c^2 \qquad E_c = E - E_0$

$\vec{p}c = \dfrac{\vec{v}}{c} E$

$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$

4. Unités pratiques.

• La relation $E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$ montre que les grandeurs ***E, pc* et *mc*² sont toutes trois homogènes à des énergies.** Elles peuvent être exprimées en joule, mais la masse des particules envisagées (électrons, protons, neutrons, hélions...) est toujours faible, et l'utilisation du joule comme unité conduit à des nombres très petits.
Par exemple, l'énergie au repos de l'électron vaut

$$E_0 = m_e c^2 \approx 9{,}1 \,.\, 10^{-31} \times (3 \,.\, 10^8)^2 \approx 8{,}2 \,.\, 10^{-14}\ \text{J}.$$

Exprimée en **électron volt,** l'énergie précédente est :

$$E_0 = \frac{8{,}2 \,.\, 10^{-14}}{1{,}6 \,.\, 10^{-19}} \approx 510\,000\ \text{eV} \approx 0{,}5\ \text{MeV (mega électron volt).}$$

• Sensiblement 2 000 fois plus massifs que l'électron, **le proton et le neutron possèdent une énergie au repos de l'ordre de 1 000 MeV (1 GeV).** Plus précisément : 938,3 MeV (proton) et 939,6 MeV (neutron).

• L'utilisation de l'électron volt comme unité d'énergie présente un autre intérêt. La relation $E_c = qU$, établie plus haut pour des particules lentes (page 381), s'applique aux corpuscules relativistes (mais l'énergie cinétique ne s'exprime plus par $\frac{1}{2}mv^2$). Ainsi **l'énergie cinétique** acquise par une particule élémentaire de charge ($\mp e$) **s'exprime en eV par le même nombre que la tension accélératrice évaluée en volt.**
Par exemple, un proton ou un électron initialement immobiles acquièrent une énergie cinétique de 10 keV ; ils sont accélérés sous 10 kV.

• Les valeurs indiquées plus haut pour les énergies au repos montrent qu'il est commode d'utiliser le **MeV (ou le GeV) comme unité pratique d'énergie** pour les particules relativistes.
Lorsque pc est exprimé en MeV, on dit aussi, par un léger abus de langage, que **la quantité de mouvement p s'exprime en MeV/c.** Il est rigoureusement identique de parler d'un proton de quantité de mouvement $p = 2\,000$ MeV/c (ou 2 GeV/c) ou d'un proton dont le produit pc associé à la quantité de mouvement est de 2 000 MeV. De même, les expressions « l'énergie au repos d'un proton vaut 938,3 MeV », et « la masse d'un proton vaut 938,3 MeV/c^2 » ont la même signification.
Pratiquement, dans les exercices, il est préférable de traduire immédiatement des données telles que $M_n = 939{,}3$ MeV/c^2 et $p = 3$ GeV/c, par $M_n c^2 = 939{,}6$ MeV ou $pc = 3$ GeV.

1 eV ≈ 1,6 . 10⁻¹⁹ J

1 MeV = 10^6 eV
1 GeV = 10^9 eV

Ordres de grandeurs des énergies au repos :
— Électrons : 0,5 MeV
— Protons et neutrons : 1 000 MeV.

III. Applications

1. Comment savoir si une particule est relativiste ?

a) A partir de la vitesse.

Nous avons donné plus haut des éléments de réponse à cette question : une particule est relativiste dès que le rapport $\frac{v}{c}$ dépasse environ 0,1.

En fait tout dépend de l'approximation à laquelle on désire travailler : le facteur correctif $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ne peut être assimilé à 1 que si l'on s'estime en droit de négliger β^2 vis-à-vis de l'unité.

Lorsque β est petit sans être tout à fait négligeable, on peut écrire : $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\beta^2}{2}$.

b) A partir de l'énergie.

• Pratiquement, pour savoir si une particule d'énergie au repos E_0, dont on connaît la quantité de mouvement ou l'énergie totale E, est relativiste ou non, il est souvent **inutile de calculer sa vitesse.**

En effet, la particule n'est pas relativiste si $\gamma \simeq 1$, c'est-à-dire si son énergie totale est très voisine de son énergie au repos ($E = \gamma mc^2 = \gamma E_0$). Par exemple un proton ($E_0 = 938{,}3$ MeV) dont l'énergie totale est 940 MeV, n'est pas relativiste.

• Cette condition peut se traduire autrement si l'on connaît la quantité de mouvement d'une particule d'énergie au repos E_0.

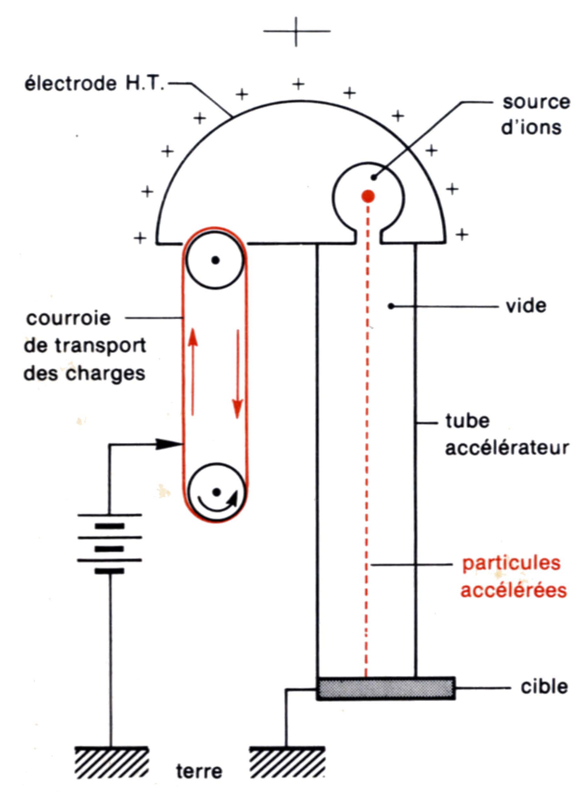
En effet, d'après la relation $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, ou $E^2 = p^2c^2 + E_0^2$, on voit que l'énergie totale E est voisine de l'énergie au repos E_0 lorsque pc est faible devant E_0. Ainsi un proton ($E_0 = 938{,}3$ MeV) dont la quantité de mouvement $\vec{p}$ est telle que le produit $pc = 50$ MeV, n'est pas relativiste.

En résumé, pour savoir si une particule est relativiste ou non, il suffit de comparer son énergie totale, ou son énergie cinétique, ou le produit *pc*, à son énergie au repos E_0. La particule n'est pas relativiste lorsque :

— son énergie totale est pratiquement égale à son énergie au repos ;

— son énergie cinétique est très faible devant son énergie au repos ;

— le produit *pc* est faible devant son énergie au repos.



8. Accélérateur électrostatique du type Van de Graaf. Une courroie isolante, entraînée par un moteur, transporte des charges vers une électrode qui les accumule et se trouve ainsi portée à une haute tension (H.T.) par rapport au sol.

c) **Cas particuliers.**

• **Le cas des électrons,** dont la masse est petite ($E_0 \approx 0,5$ MeV) est intéressant à envisager. On peut les considérer comme relativistes dès que leur énergie cinétique dépasse, en gros, le centième de leur énergie au repos : $E_c > \frac{0,5}{100} = 5 \cdot 10^{-3}$ MeV = 5 keV. Il suffit pour cela d'une tension accélératrice de 5 000 volts, ce qui est aisément réalisable : **des électrons sont facilement rendus relativistes.**
Lorsque l'énergie au repos d'une particule devient négligeable vis-à-vis de son énergie totale, ou de son énergie cinétique, ou de l'énergie pc associée à sa quantité de mouvement, les formules relativistes montrent que $E \approx E_c \approx pc$. La vitesse $v = \frac{pc^2}{E}$ est alors voisine de c. Une telle particule est dite « **ultra-relativiste** ».

C'est par exemple le cas pour un électron ($E_0 \approx 0,5$ MeV) dont l'énergie totale est de l'ordre de 10^3 ou 10^4 MeV. Si on lui communique une plus grande énergie, sa vitesse ne varie pratiquement plus. Il est donc beaucoup plus significatif de s'intéresser à la quantité de mouvement ou à l'énergie d'une particule plutôt qu'à sa vitesse.

2. Accélérateurs de particules.

a) **Accélérateurs linéaires.**

• **Le principe des accélérateurs électrostatiques** de Van de Graaf est donné à la figure 8. Les plus gros de ces appareils communiquent à des électrons, des protons ou des ions une énergie cinétique atteignant 14 MeV. La tension accélératrice est limitée par les risques d'étincelles entre l'appareil et le sol.

• D'autres types d'accélérateurs linéaires fournissent des particules beaucoup plus énergétiques. Par exemple, celui de Stanford (USA) donne des électrons de 40 GeV ; il a plus de 3 km de longueur !

b) **Accélérateurs circulaires.**

• **Le principe du cyclotron** a été indiqué à la figure 5 (page 383). Les particules, non relativistes, y tournent à vitesse angulaire constante sur des demi-cercles de rayons de plus en plus grands.

• Envisageons une particule qui, continuant à recevoir des impulsions entre les cavités, serait devenue ultra-relativiste. Son énergie et sa quantité de mouvement augmentant, elle décrit une trajectoire dont le

rayon est de plus en plus grand (voir la relation $p = qBR$, page suivante). Sa vitesse, voisine de c, n'augmenterait pratiquement plus et sa vitesse angulaire $\omega \approx \frac{c}{R}$ diminuerait. Elle arriverait donc de plus en plus en retard entre les cavités, où elle finirait par rencontrer un champ électrique retardateur et non plus accélérateur.

L'effet précédent est déjà sensible pour des particules simplement relativistes, qui « décrochent » du cycle d'accélération dès qu'elles prennent trop de retard. Pour maintenir **synchrones** le passage des particules entre les cavités et l'effet accélérateur, il faut progressivement réduire la fréquence de la tension alternative appliquée. Les appareils qui fonctionnent selon ce principe sont appelés **synchrocyclotrons.**

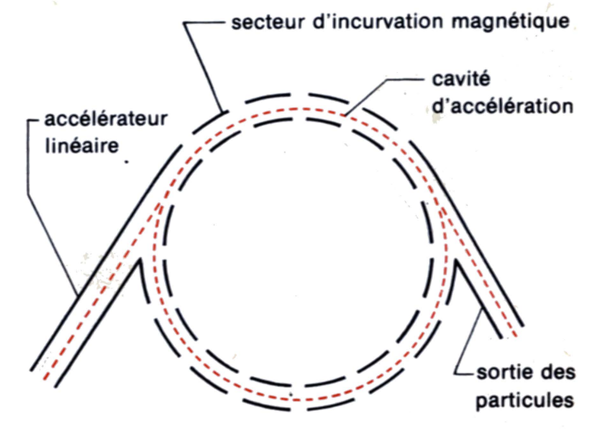
• **Les synchrotrons** sont une autre catégorie, plus récente, d'accélérateurs circulaires. Les particules y reçoivent une succession d'impulsions en passant à travers des cavités ménagées entre des secteurs d'incurvations magnétique (figure 9). Au fur et à mesure qu'elles deviennent plus énergétiques, le champ magnétique de guidage est augmenté pour les maintenir sur un **cercle de rayon constant.**

Le Centre Européen de Recherches Nucléaires (C.E.R.N.) a mis en service à Genève, en 1977, un synchrotron de 1,1 km de rayon. Il communique à des protons une énergie cinétique de 400 GeV. La valeur du champ magnétique atteint $B = 1{,}21$ T en fin de cycle d'accélération.

3. Quantité de mouvement d'une particule tournant dans un accélérateur circulaire.

• **Dans un cyclotron,** les particules tournent à vitesse angulaire constante $\omega = \frac{v}{R} = \frac{q}{m} B$ (page 383). Leur quantité de mouvement s'exprime donc par $p = mv = qBR$.

• Nous avons vu plus haut (page 397) que la vitesse angulaire des particules diminue lorsqu'elles deviennent relativistes dans un **synchrocyclotron.** La relation $\omega = \frac{q}{m} B =$ constante ne convient donc plus (vérifiez aussi que l'on calculerait ainsi une vitesse $v \approx 425\ c$ (!) pour des particules sortant du **synchrotron** de Genève signalé ci-dessus).



9. Principe du synchrotron. Les particules sont injectées par un accélérateur linéaire. La fréquence des tensions accélératrices est augmentée progressivement, de moins en moins rapidement lorsque les particules deviennent ultra-relativistes. Le champ magnétique de guidage ne s'exerce que le long de la trajectoire, et non plus sur l'ensemble de l'appareil comme dans le cas des synchrocyclotrons.

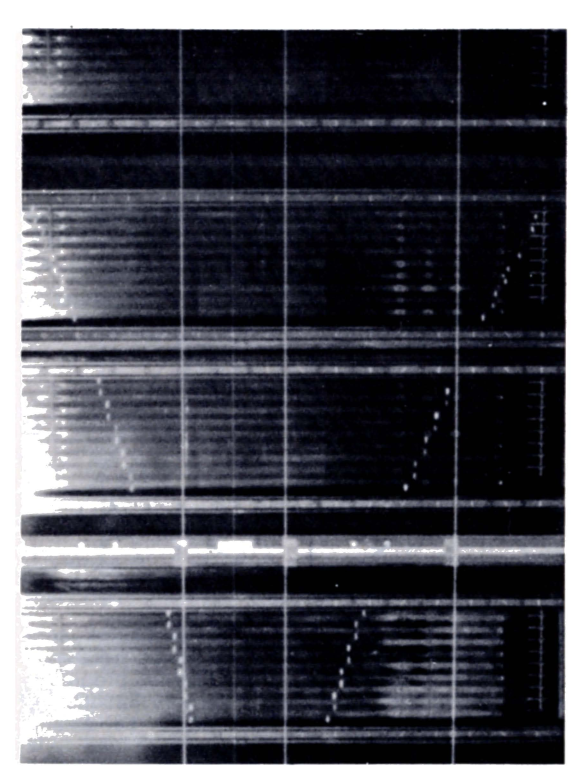
• Les physiciens ont constaté que l'on rend bien compte de la rotation des particules relativistes dans les accélérateurs circulaires en remplaçant, dans la relation newtonienne $\frac{v}{R} = \frac{q}{m} B$, v par $\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma v$.

De $\gamma \frac{v}{R} = \frac{q}{m} B$, on déduit la vitesse angulaire $\omega = \frac{v}{R} = \frac{q}{m} \frac{B}{\gamma}$: elle diminue bien lorsque v augmente (car $\gamma > 1$ croît). De plus, γmv n'est autre que l'expression relativiste de la quantité de mouvement, dont la valeur est aussi qBR.

Ainsi, une particule, relativiste ou non, de charge *q*, décrivant un arc de cercle de rayon *R* sous l'influence d'un champ magnétique *B*, possède une quantité de mouvement de valeur *p* telle que

$$\boxed{p = qBR}\ .$$

• **Remarque :** La relation précédente, présentée ici comme d'origine expérimentale, peut être étayée par des considérations théoriques. Le fait qu'elle rende bien compte des phénomènes expérimentaux est une justification fondamentalement suffisante aux yeux d'un physicien.



10. Chambre à étincelles en fonctionnement.

4. Appareils de détection.

• Les particules peuvent être détectées par visualisation des traces qu'elles laissent, dans certaines conditions, dans les liquides ou les vapeurs, ou par les réactions secondaires qu'elles provoquent en agissant sur la matière. Il existe de nombreux types d'appareils détecteurs. Dans le chapitre suivant, nous étudierons les **chambres à bulles ;** nous n'évoquerons ici que les **chambres à étincelles.**

• Une chambre à étincelles est constituée d'une succession d'électrodes, planes ou filiformes, équidistantes de quelques millimètres, auxquelles on applique des tensions électriques telles que des étincelles soient prêtes à jaillir entre elles.
Les électrodes baignent dans un gaz qui s'ionise lorsqu'une particule rapide le traverse. Les ions, captés par les électrodes, provoquent un déséquilibre électrique suffisant pour qu'une étincelle se produise là ou ils sont passés.

Le photo 10 donne un exemple de trajectoire ainsi obtenue.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

• La célérité de la lumière, voisine de $c \approx$ ______, est ______ relativement aux changements de ______ . Il s'agit d'une vitesse ______ , qu'aucun objet ______ ne peut atteindre. Cette célérité est une constante ______ , indépendante de la vitesse de la ______ .

• La quantité de mouvement et l'énergie totale relativistes sont définies par les relations : $\vec{p} =$ ______ et $E =$ ______ . On en déduit $\vec{p}c =$ ______ et $E =$ ______ . L'énergie cinétique relativiste est l'excès de l'énergie ______ sur l'énergie ______ : $E_c =$ ______ .

• Les grandeurs E, pc et mc^2 s'expriment pratiquement en ______ .

• Lorsqu'une particule est non relativiste :

— l'énergie ______ est très voisine de son ______ ,

— le produit pc associé à sa ______ est d'un ordre de grandeur inférieur à son ______ ,

— son énergie cinétique est d'un ordre de grandeur nettement inférieur à son ______ .

Petites questions.

1. S'il existe des extra-terrestres, la célérité de la lumière est-elle la même pour eux et nous ?
L'exprimeront-ils avec la même unité ?
Prendra-t-elle la même valeur numérique ?
Leurs OVNI dépasseront-ils la vitesse c ?

2. L'énergie cinétique acquise par une particule chargée sous tension constante dépend-elle :

a) de la distance d'accélération ?

b) de la vitesse initiale de la particule ?

3. Obtient-on une expression correcte de l'énergie cinétique relativiste en remplaçant v par $\dfrac{v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ dans l'expression $\dfrac{1}{2}mv^2$.

4. Une particule d'énergie totale 5 MeV est-elle relativiste ?

Réponse partielle : Cela dépend...

5. L'énergie cinétique finale d'une particule initialement immobile double-t-elle si l'on double

a) la tension accélératrice ?

b) le champ électrique accélérateur ?

c) la distance d'accélération sans modifier la tension ?

6. Mêmes questions pour l'énergie totale.

7. Si l'on injectait simultanément des protons et des électrons dans le même synchrotron,

a) tourneraient-ils dans le même sens ?

b) auraient-ils la même quantité de mouvement ?

c) la même énergie ?

8. Un proton et un électron relativistes ont la même quantité de mouvement. Lequel a la plus grande énergie cinétique ?

Applications immédiates.

9. Combien 1 GeV vaut-il de kWh ?

10. Comparez les forces gravitationnelles et électriques d'interaction entre deux protons d'une molécule d'hydrogène (distants de $7{,}5 \cdot 10^{-11}$ m).

11. Comparez, en formant leur rapport, les forces de répulsion électrique et d'attraction gravitationnelle pour deux électrons immobiles.
Même question pour deux protons.
Conclusion.

12. Calculez la vitesse d'une particule relativiste dont l'énergie totale est les cinq tiers de son énergie au repos. Le résultat dépend-il du corpuscule considéré ?

13. Quelle est la vitesse d'une particule relativiste dont la quantité de mouvement vaut $p = mc$.

Réponse : 0,707 c.

14. Calculez, en MeV, les énergies cinétiques des particules suivantes, accélérées sous tension $U = 5 \cdot 10^6$ V : électrons ; protons ; particules α (noyaux d'atomes d'hélium).

15. On pose : $\vec{p}c = \vec{P}$ et $mc^2 = M$. Écrire toutes les formules relativistes en ne faisant intervenir que $\vec{P}$ (ou $\vec{p}$), M, γ et β $\left(\text{où } \beta = \dfrac{v}{c}.\right)$

Réponse : $\vec{P} = \gamma\vec{\beta}M$; $E = \gamma M$; $\vec{P} = \vec{\beta}E$; $E_c = (\gamma - 1)\,M$; $E = \sqrt{P^2 + M^2}$.

16. Calculez la valeur de la tension accélératrice nécessaire pour communiquer à un électron ou à un proton une énergie cinétique égale à leur énergie au repos.
Valeurs correspondantes de β et γ pour ces particules ?

17. Calculez, en MeV ou MeV/c, les énergies totale, cinétique et la quantité de mouvement d'un électron dont la vitesse est 0,8 c.

Réponses : $E \approx 0{,}85$ MeV $E_c \approx 0{,}34$ MeV $p \approx 0{,}68$ MeV/c.

18. Quelle est la vitesse d'un électron dont l'énergie cinétique vaut 1,5 MeV ? Que devient cette vitesse si on lui communique une énergie supplémentaire de 15 MeV ?

19 Une particule neutre, d'énergie totale 2 210 MeV, a une quantité de mouvement p telle que $pc = 2\,000$ MeV. Calculez sa vitesse et sa masse.

20. Calculez la quantité de mouvement, l'énergie totale et l'énergie cinétique d'un proton qui décrit un cercle de rayon 4 m sous l'influence d'un champ magnétique de valeur $B = 1{,}5$ T.

Réponses : $pc \approx 1\,800$ MeV ;

$E \approx 2\,030$ MeV ; $E_c \approx 1\,090$ MeV.

Exploitation de documents.

21. Reportez-vous à la figure 7c du cours (page 386). Précisez la direction et le sens du champ $\vec{B}$ incurvateur. Calculez $\dfrac{V_1}{\sqrt{1-\dfrac{V_1^2}{c^2}}}$ et les expressions analogues pour V_2 et V_3.
En utilisant un papier calque posé sur la figure 8d, vérifiez que les quantités de mouvement relativistes sont telles que $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3$.
Calculez et comparez les sommes des énergies totales du système constitué par les deux particules, avant, puis après collision.

22. La figure ci-dessous indique les vecteurs quantité de mouvement relativiste lors d'une collision élastique proton-proton. $\vec{p}_1$ et $\vec{p}\,'_1$

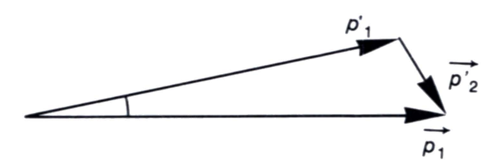
représentent les quantités de mouvement du proton incident avant et après la collision. Avant le choc, l'énergie totale du proton vaut 7 fois son énergie au repos.

a) Par des mesures au rapporteur, déterminer l'écart angulaire des deux trajectoires après le choc.

b) Calculez la quantité de mouvement du proton incident. A quelle échelle sont représentés les vecteurs $\vec{p}$?

c) Déterminez, à partir de mesures sur le document, les quantités de mouvement après le choc, et calculer les énergies totales des particules après le choc.

d) Comparez la somme des énergies totales avant et après choc. (Ne pas oublier que l'énergie totale d'une particule immobile est égale à son énergie au repos.)



Approfondissement.

23. Quelles sont les valeurs de β, de γ, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale (exprimées en fonction de l'énergie au repos) d'une particule dont l'énergie cinétique est égale à l'énergie au repos ?

24. Existe-t-il une vitesse non nulle telle que l'énergie cinétique d'une particule newtonienne double lorsque sa vitesse double ? Même question pour une particule relativiste. Si oui, les calculer.

25. Quelle doit être la vitesse d'un électron pour que son énergie totale soit égale à l'énergie de masse d'un proton ?

26. Pour une particule relativiste de masse m, de vitesse $v = \beta c$, de quantité de mouvement p et d'énergie totale E, exprimez $P_1 = \frac{pc}{mc^2}$ et $E_1 = \frac{E}{mc^2}$ en fonction de β et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.
Représentez graphiquement les variations de P_1 et E_1 en fonction de β. Que constate-t-on pour ces courbes lorsque β tend vers 1 ? Interpréter.

27. On pose : $v = c \sin\varphi$ et $u = 2c \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi}}$
(u n'est pas susceptible d'une interprétation physique intéressante).

a) Donnez, en fonction de m, c et φ, les expressions de l'énergie totale et de la quantité de mouvement d'une particule relativiste.

b) Trouvez l'expression de l'énergie cinétique en fonction de m et u.

28. L'unité de masse atomique (u) est le douzième de la masse d'un atome ^{12}C. Elle vaut $1{,}660\,42 \cdot 10^{-27}$ kg. Calculez en MeV l'énergie correspondant à cette masse.

29. Exprimez la quantité de mouvement relativiste d'une particule de charge q, après accélération sous une tension U, en fonction de sa masse m, de c et de $e_1 = \frac{qU}{mc^2}$.

Comment se simplifie la relation précédente

a) pour des particules non relativistes ($e_1 \ll 1$) ?

b) pour des particules ultra-relativistes $\left(\frac{1}{e_1} \ll 1\right)$?

Réponses : $p = mc\sqrt{e_1(e_1 + 2)}$

a) $p \approx mc\sqrt{2e_1} = \sqrt{2qmU}$;

b) $p \approx mce_1 = \frac{qU}{c}$.

30. Nous avons utilisé dans le cours l'approximation $\gamma \approx 1 + \frac{\beta^2}{2}$, valable lorsque β est nettement inférieur à 1. Pour des vitesses *un peu* plus grandes, γ est mieux représenté par $\gamma \approx 1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8}\beta^4$.

a) Écrire les expressions des énergies cinétiques newtonienne E_{c_N} et relativiste E_{c_r} en fonction de m, β et c.

b) On se demande pour quelles vitesses on peut écrire $E_{c_r} \approx E_{c_N}$ à k % près (c'est-à-dire quand a-t-on $\frac{E_{c_r} - E_{c_N}}{E_{c_N}} = \frac{k}{100}$?). Déterminez β selon que l'on veut travailler à 1 %, 3 % ou 10 % près.

31 On a détecté dans la haute atmosphère des protons dont la vitesse est telle que $\frac{v}{c} = \beta = 1 - 10^{-10}$.

a) Calculez l'énergie de ces protons.

b) Quelle serait la tension accélératrice nécessaire pour leur communiquer cette énergie dans un accélérateur électrostatique ? Est-ce réalisable ?

c) Si ces protons « font la course » avec un front d'onde lumineux, dans le vide, quelle est l'avance prise par la lumière au bout d'un an ?

32. Compléments sur l'expérience de Bertozzi. Dans l'expérience schématisée à la figure 4 (page 382), la distance AB de vol des électrons vaut 8,40 m. La vitesse de balayage du spot sur l'oscillographe est de 10^6 m/s.

$E_{c\,(\text{MeV})}$	0,5	1,0	1,5	4,5	15
$d_{(\text{cm})}$	3,23	2,98	2,89	2,81	2,80
$t_{(\text{ns})}$					
$\beta = \frac{v}{c}$ (mesuré)					

La distance d, mesurée entre les deux pics de l'oscillogramme, est donnée, pour diverses énergies cinétiques finales des électrons, par le tableau précédent.

a) Complétez le tableau en calculant la durée t de parcours des électrons, en nanoseconde (10^{-9} s). En déduire la valeur mesurée de β des électrons.

b) Pour des énergies cinétiques inférieures ou égales à 1,5 MeV, les électrons sont accélérés avant A par un générateur électrostatique. Quelle est leur vitesse de passage en A lorsque leur énergie vaut 1,5 MeV ? Nature de leur mouvement ultérieur entre A et B ?

c) Pour obtenir des électrons dont l'énergie est supérieure à 1,5 MeV, on place entre A et B un accélérateur linéaire, qui fait suite au précédent. Le mouvement des électrons entre A et B peut-il encore être considéré comme sensiblement uniforme ?

d) On pose $e_1 = \frac{E_c}{E_0}$, où E_c désigne l'énergie cinétique des électrons à leur arrivée en B et E_0 leur énergie au repos. Établir la relation théorique entre la valeur β d'arrivée des électrons et e_1.
Complétez le tableau suivant :

$E_{c\,(\text{MeV})}$	0,5	1,0	1,5	4,5	15
e_1					
$\beta_{(\text{mesuré})}$					
$\beta_{(\text{calculé})}$					

où $\beta_{(\text{mesuré})}$ sera extrait du tableau précédent, l'autre étant calculé par la relation que vous venez d'établir. Conclusion ?

2) Le canon à électrons initial, commandé par une photocathode, émet 120 « bouffées » d'électrons par seconde. On admet que tous les électrons sont captés par le disque β, ce qui le charge et l'échauffe.

a) B est constitué par l'une des armatures d'un condensateur de capacité $C = 76\ nF$, qui se décharge dès que la tension à ses bornes atteint 1 V. On observe qu'il se décharge 80 fois en 7 minutes. En déduire le nombre moyen d'électrons contenus par chaque bouffée.

b) Quelle est, en joule, l'énergie absorbée par le disque au bout de 7 minutes, lorsque l'énergie cinétique des électrons vaut 4,5 MeV ?

c) Si la masse du disque est de 200 g, quelle est son élévation de température finale ? (on admettra qu'il ne rayonne pas de chaleur). Chaleur massique de l'aluminium : 887 J/kg . K.

33. Des électrons de vitesse initiale négligeable sont accélérés par un dispositif comportant une série de « cellules » successives identiques. A la traversée de chaque « cellule », les électrons sont soumis à une tension d'accélération de 6 400 V.

1) Calculez la variation d'énergie cinétique d'un électron à la traversée d'une « cellule ».

2) En utilisant la théorie relativiste, en déduire son énergie totale et sa vitesse à la sortie de la cinquième « cellule ».

3) Combien faut-il prévoir de « cellules » en série pour atteindre une vitesse de 150 000 km . s^{-1} ?

Données : Énergie de masse de l'électron : $mc^2 = 0{,}51$ MeV. Célérité de la lumière : $c = 300\,000$ km . s^{-1}.

(Baccalauréat expérimental d'essai ; janvier 1976.)

Réponses : 1) 6 400 eV, 2) $E = 0{,}542$ MeV, $\beta \simeq 0{,}34$, 3) 13.

34. Un proton sort d'un synchrotron de 10 km de circonférence, où le champ magnétique vaut $B = 5$ T.

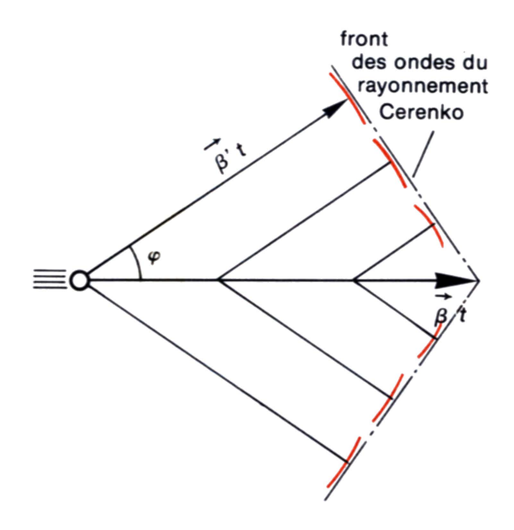
a) Calculez sa quantité de mouvement, son énergie totale et son énergie cinétique.

b) Quelle devrait être la tension d'un accélérateur électrostatique pour lui communiquer la même énergie. Est-ce possible ?

Réponses : $pc \approx 2{,}4 \cdot 10^6$ MeV ;
a) $E \approx E_c \simeq 2{,}4 \cdot 10^6$ MeV ;
b) $2{,}4 \cdot 10^{12}$ V (impossible).

35. Rayonnement Cerenkov.
Aucune particule ne peut aller plus vite que la lumière **dans le vide.**
Il est cependant possible de faire progresser des particules, dans un milieu matériel donné, plus rapidement que la lumière **dans le même milieu.**

a) Soient β et β' les vitesses des particules et de la lumière dans un milieu donné. En s'inspirant de la figure ci-dessous, calculez le demi-angle au sommet du cône en fonction de β et β'.



Effet Cerenkov : une particule, progressant dans un milieu matériel plus vite que la lumière dans ce même milieu, émet de la lumière cohérente dans un cône de demi-angle au sommet φ.

b) Des électrons de 700 MeV sortent d'un accélérateur et se propagent dans l'air, dont l'indice de réfraction vaut $n = 1{,}002\,9$. On rappelle que la vitesse de la lumière dans un milieu d'indice n est $v = \frac{c}{n}$.

Calculez le diamètre de la tache lumineuse observée, par suite de l'effet Cerenkov, sur un écran situé à 20 m perpendiculairement à la trajectoire des électrons d'indice $n = 1{,}5$.

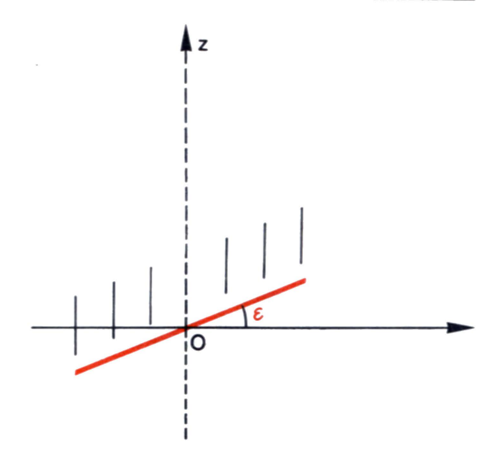
c) Dans l'altuglass, on observe que des électrons produisent l'effet Cerenkov dans un cône de demi-angle au sommet $\varphi = 42°$. Quelle est la vitesse des électrons dans l'altuglass ?

36. Une règle, de longueur l, lâchée sans vitesse initiale, est animée d'un mouvement de translation vertical tel qu'elle reste très légèrement inclinée par rapport aux horizontales, d'un écart angulaire ε. A la date $t = 0$, la vitesse de la règle est v_0 et son centre de masse coïncide avec le point O d'une ligne horizontale. O est choisi comme origine des abscisses.

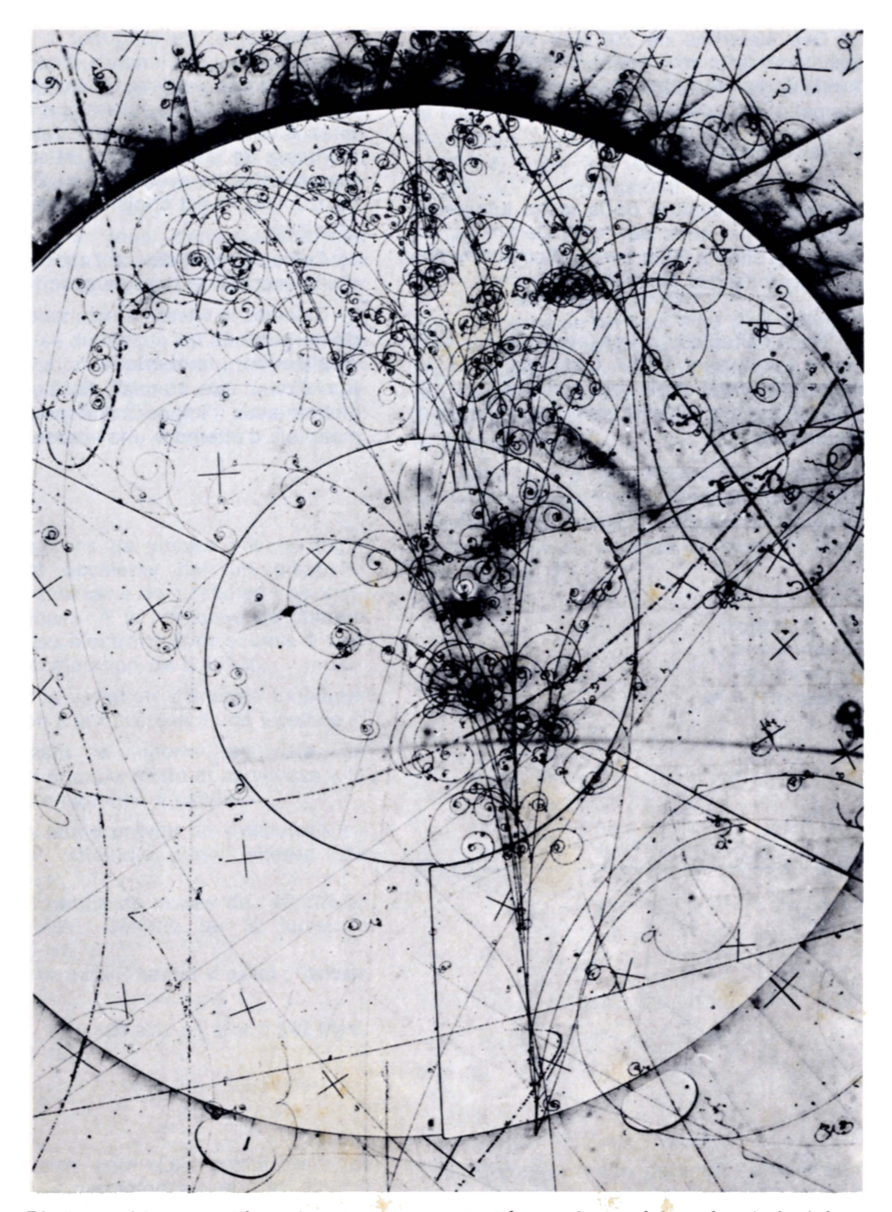
a) Calculez, à la date t, l'abscisse du point d'intersection de la règle avec l'horizontale.

b) Calculez la vitesse horizontale de ce point d'intersection.

Application numérique : $\varepsilon = 10^{-8}$ rad ; $v_0 = 6$ m/s ; $g \simeq 10$ m/s². Est-ce en contradiction avec l'impossibilité pour les corps matériels d'atteindre une vitesse égale à c ?



21 Interaction entre particules de haute énergie.



Photographie (négatif), prise avec un objectif grand angulaire, des trajectoires de diverses particules chargées dans une chambre à bulles à hydrogène liquide.

Nous venons d'admettre les formules qui donnent la quantité de mouvement et l'énergie totale d'une particule relativiste. Vérifions maintenant qu'il s'agit de grandeurs conservatives.

I. Les chambres à bulles.

Vous avez déjà observé (page 386) des clichés d'événements obtenus dans des chambres à bulles où sont enfermés sous pression certains liquides tels que : l'hydrogène, le propane, le fréon... Ces liquides sont bombardés avec des particules relativistes. Voici quelques informations complémentaires sur le fonctionnement de ces chambres.

1. Obtention des projectiles.

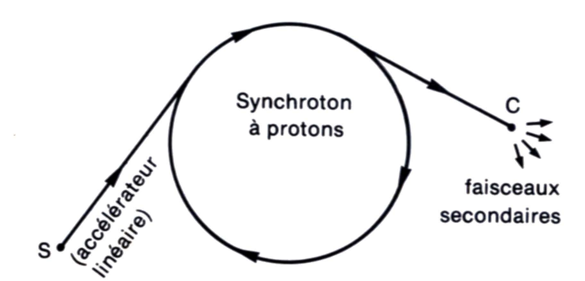
• Le point de départ est **une source de protons,** obtenus par exemple en provoquant une décharge électrique dans de l'hydrogène gazeux.

• Ces protons ainsi créés sont ensuite accélérés (figure 1), d'abord par un accélérateur linéaire, puis par **un synchrotron.**

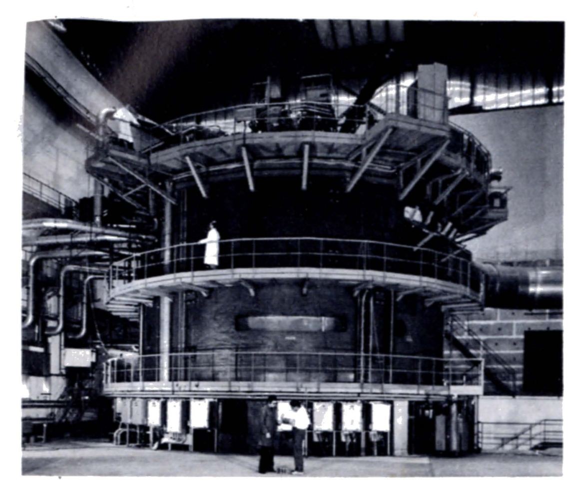
• Les protons qui sortent du synchrotron ont une énergie considérable (plusieurs dizaines de GeV). Ils viennent frapper une cible dont ils extraient un grand nombre de particules que l'on sépare les unes des autres par une succession de déviations électriques ou magnétiques. Les particules de charge, de masse et d'énergie semblables se trouvent ainsi réunies dans différents pinceaux. On choisit alors le pinceau dont les particules présentent les caractéristiques convenant à l'expérience que l'on se propose d'entreprendre. Ces particules sont guidées vers un réservoir : **la chambre,** contenant un liquide (hydrogène, propane...) dont les atomes servent de nouvelles cibles.

2. Principe de fonctionnement.

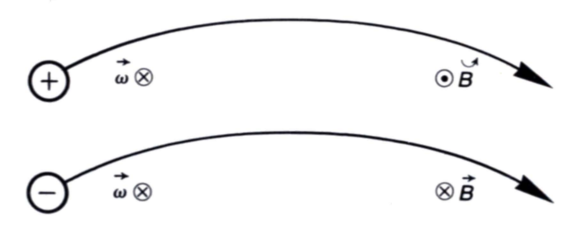
Lorsque des **particules chargées** pénètrent dans une chambre à bulles, elles agissent sur les nuages électroniques des atomes du liquide, à qui elles cèdent une faible fraction de leur énergie. Si la pression est brusquement diminuée, par détente d'un piston, le liquide va entrer en ébullition. Cette ébullition commence plus tôt sur le trajet des particules, et c'est là que les premières bulles se forment.



1. Obtention des projectiles lancés dans une chambre à bulles. Pour les clichés étudiés dans ce chapitre, réalisés au CERN, l'accélérateur linéaire a fait pénétrer dans un synchrotron des protons d'énergie cinétique égale à 50 MeV. Dans le synchrotron de 100 m de rayon, des « bouffées » d'environ 10^{13} protons accomplissent, en 1 s, environ un demi million de révolutions avant d'en sortir, avec une énergie de 28 GeV, pour aller percuter une cible C.



2. Photographie d'une chambre à bulles. Des parois de verre épais (plus de 20 cm) enferment de l'hydrogène liquide. Ces parois portent des repères cruciformes (croix visibles sur les clichés).
Pour les chambres plus grandes (il en existe de 5 m de long) le verre n'est plus assez résistant. Les parois sont en acier. Les photographies sont obtenues avec des appareils munis d'objectifs « grand angulaire », ou « fish-eye », qui trempent directement dans le liquide. L'ouverture angulaire de l'objectif est voisine de 180° : toute la chambre est photographiée. Un tel cliché est donné page 404. Par rapport aux chambres à liquides « lourds » (propane, fréon), les chambres à hydrogène liquide présentent l'avantage de la **simplicité des cibles,** mais leur cryogénie pose des problèmes délicats (26 K, ou − 247°C !)



3. Le sens de la déviation magnétique dépend du signe de la charge et du sens du champ $\vec{B}$.

On laisse grossir les bulles pendant quelques millisecondes. On photographie ensuite en éclairant par un flash de durée 10^{-3} s, sous plusieurs angles différents pour reconstruire les positions successives des bulles **dans l'espace,** à partir de plusieurs clichés plans simultanés.

- Les particules neutres n'agissent pas sur les nuages électroniques et ne provoquent donc pas l'apparition de bulles : **les particules neutres ne laissent pas de traces dans les chambres à bulles.**

- Pour déterminer les quantités de mouvement des particules chargées, on incurve leurs trajectoires en faisant agir un champ magnétique uniforme intense, créé par des courants électriques dans des circuits analogues à des bobines de Helmholtz.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que ces trajectoires sont circulaires (rayon R) et nous avons admis que la quantité de mouvement d'une particule, relativiste ou non, est donnée par la relation :

$$p = qBR.$$

La quantité de mouvement des particules de charge q connue, évoluant dans un champ dont on connaît la valeur B, se déduit donc de la mesure du rayon de courbure de leur trajectoire. La mesure du rayon R est plus précise si les trajectoires sont très incurvées (R petit), ce qui nécessite des champs magnétiques intenses si les particules sont très énergiques. Actuellement, on atteint couramment des valeurs voisines de 2 teslas.

- Dans une chambre à bulles, on observe un événement chaque fois que la particule incidente (pour nous il s'agira d'un proton) heurte une autre particule. Le plus souvent, le choc se produit avec un noyau d'hydrogène de la chambre, c'est-à-dire avec un proton que l'on considérera, avec une très bonne approximation, comme étant au repos.

Ainsi l'hydrogène d'une chambre joue deux rôles : c'est une cible particulièrement simple (protons au repos) et il permet aussi de visualiser les trajectoires.

- Les clichés que nous étudierons ont été sélectionnés après étude précise, menée en particulier à l'aide d'un ordinateur.

Ils représentent des événements plans : toutes les trajectoires sont dans un plan parallèle à celui du film photographique. L'énergie des particules incidentes a été choisie assez faible pour que leur courbure par le champ magnétique soit suffisante. Les rayons de courbure seront ainsi plus facilement mesurables sur les photographies.

II. Étude d'une collision élastique.

Lorsqu'une particule heurte une autre particule, la collision est dite **élastique** quand les interactions liées au choc ne **changent ni la nature des particules, ni leur état.**
Le cliché de la figure 6a (page 409) reproduit un tel événement : un proton relativiste, entrant à gauche, est venu heurter un noyau d'hydrogène de la chambre et l'a expulsé en rebondissant sur lui.

1. Étude des quantités de mouvement.

a) Valeur des quantités de mouvement.

• **Principe de leur détermination.** Comme le champ magnétique est quasi uniforme dans toute la chambre, les quantités de mouvement des différentes particules sont proportionnelles aux rayons de courbure des trajectoires ($p = qBR$).
En posant $P = pc$, il vient : $\frac{P_1}{R_1} = \frac{P_2}{R_2} = \frac{P_3}{R_3}$ $(= qcB)$,

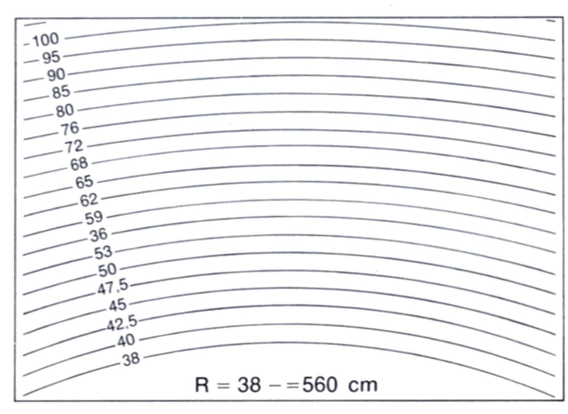
où les indices correspondent aux numéros portés à côté des trajectoires sur la figure 5a (page 409). L'ordinateur a calculé pour nous la valeur de la quantité de mouvement incidente des particules 1. Dans le cas étudié, elle est :

$$P_1 = p_1 c = 2\,075 \text{ MeV}.$$

En mesurant les rayons de courbure R_1, R_2 et R_3, nous pouvons déduire les quantités de mouvement des particules 2 et 3 :

$$P_2 = P_1 \frac{R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad P_3 = P_1 \frac{R_3}{R_1}.$$

• **Mesure des rayons de courbure.** En posant sur la photographie un abaque translucide sur laquelle sont tracés des cercles de rayon connu (figure 4), on cherche par tâtonnement **le cercle qui coïncide au mieux avec la trajectoire étudiée.** Cette coïncidence peut ne pas être parfaite, pour plusieurs raisons :
— le rayon de la trajectoire n'est pas nécessairement égal à l'un de ceux des abaques ;
— le champ magnétique n'est pas rigoureusement uniforme dans la chambre et la trajectoire n'est donc pas un cercle parfait ;



4. Abaque des rayons de courbure.

— les particules sont **légèrement freinées** par le liquide, surtout si elles sont « lentes » et peu massives, et leur trajectoire est une **spirale** plutôt qu'un cercle (figure 5).
Pour le cliché que nous étudions, on trouve par exemple :

$$R_1 \approx 430 \text{ cm} ; \quad R_2 \approx 400 \text{ cm} ; \quad R_3 \approx 85 \text{ cm} .$$

• **Calcul des quantités de mouvement.** P_1 est connue, et :

$$P_2 = \frac{P_1}{R_1} . R_2 \approx \frac{2\,075}{430} . 400 \approx 1\,930 \text{ MeV} .$$

$$P_3 = \frac{P}{R_1} . R_3 = \frac{2\,075 \times 85}{430} = 410 \text{ MeV} .$$

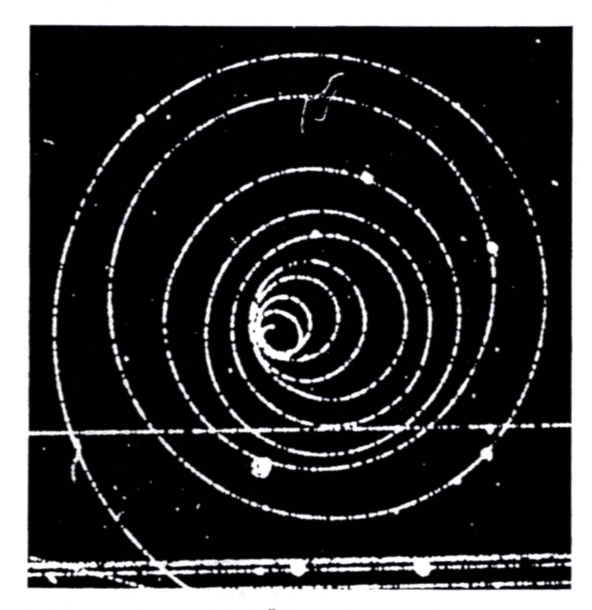
b) Conservation de la quantité de mouvement vectorielle.

• **Vecteurs quantités de mouvement relativistes.** En mécanique newtonienne, la conservation de la quantité de mouvement se traduit par la **relation vectorielle** $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3$. Nous allons montrer que cette loi de conservation s'étend aux quantités de mouvement relativistes, c'est-à-dire que l'on peut écrire $\vec{p}_1 c = \vec{p}_2 c + \vec{p}_3 c$ ou, (en posant $\vec{P} = \vec{p}c$), $\vec{P}_1 = \vec{P}_2 + \vec{P}_3$ (nous connaissons leurs valeurs).

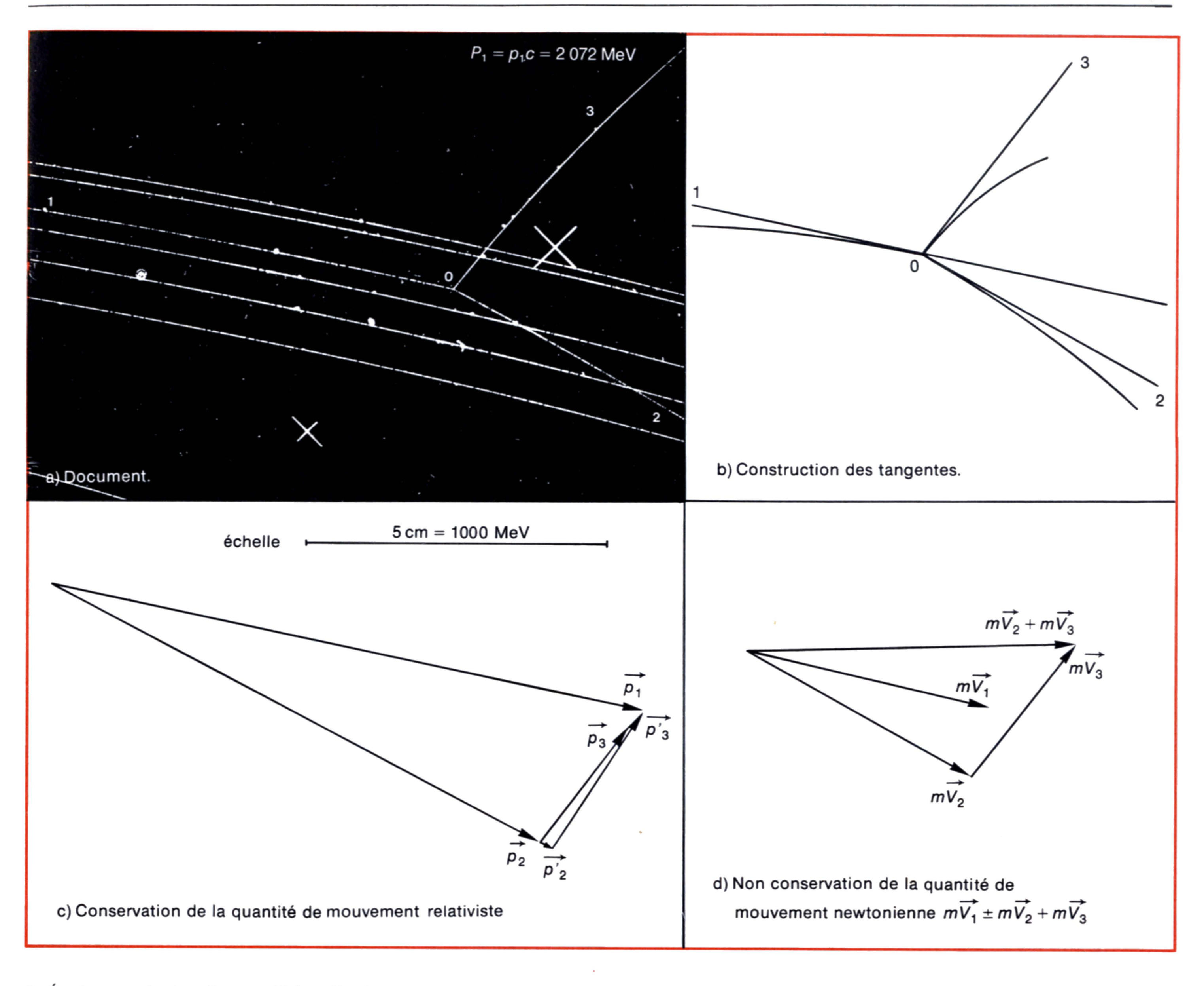
• **Tangentes aux trajectoires.** Les directions des vecteurs quantités de mouvement juste avant, et juste après le choc, peuvent être obtenues à partir du cliché en **décalquant les tangentes aux trajectoires au point d'impact.** On améliore la précision du tracé en utilisant deux réglets parallèles unis par du papier adhésif et séparés par une fente de largeur juste suffisante pour guider une fine pointe de crayon. La construction d'ensemble est indiquée à la figure 6b (p. 409).

• **Représentation des vecteurs $\vec{P}$.** Les représentants des vecteurs $\vec{P} = \vec{p}c$ ont des supports parallèles aux tangentes précédemment déterminées. Il est commode de les tracer à l'échelle 1 cm $\triangleq$ 100 MeV : une flèche de 20 cm de longueur représente ainsi un vecteur $\vec{p}$ tel que $pc = P = 2\,000$ MeV. La figure 6c (page 409), reproduite à une échelle plus petite que celle qui vient d'être préconisée, indique le résultat obtenu pour le cliché qui nous occupe.

• **Conclusion.** Nous constatons que les extrémités des flèches représentant $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2 + \vec{P}_3$ sont voisines : **la conservation vectorielle de la quantité de mouvement relativiste est vérifiée de façon satisfaisante.**



5. Trajectoire spiralée d'un électron freiné par le liquide d'une chambre à bulles. Cette trajectoire n'est pas plane en général.



6. Étude quantitative d'une collision élastique proton-proton.

2. Étude des énergies.

a) Conservation de l'énergie totale.

• **Corrections de freinage.** Sur la figure 6c, les flèches noires représentant $\overrightarrow{P_2}$ et $\overrightarrow{P_3}$ sont toutes deux un peu trop courtes pour assurer parfaitement la conservation de la quantité de mouvement. Bien sûr, une vérification expérimentale est nécessairement imparfaite, mais il existe une **raison physique** qui nous incite à augmenter les valeurs mesurées. En effet, les particules, **freinées par le liquide,** ont une trajectoire dont les rayons de courbure décroissent progressivement et légèrement. Nous avons donc tendance à mesurer des rayons de courbures un peu faibles. Il en sera donc de même pour les quantités de mouvement ($p = qRB$).
Nous pouvons parfaire la quantité de mouvement en allongeant légèrement les flèches représentant $\overrightarrow{P_2}$ et $\overrightarrow{P_3}$. Ces modifications sont indiquées sur la figure 6c. Sur le graphique fait à l'échelle de 1 cm = 100 MeV, nous mesurons les longueurs des flèches ainsi corrigées. Dans notre cas, on obtient 19,4 cm pour P_2 et 4,8 cm pour P_3. D'où :

$$P_2 \simeq 1\,940 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad P_3 \simeq 480 \text{ MeV}.$$

Remarque : La correction est d'autant plus nécessaire que les particules sont plus lentes. Nous ne l'avons pas faite sur P_1, bien que le rayon mesuré R_1 soit un peu trop grand, car la particule incidente est très rapide.

• **Énergie totale du système avant la collision.** L'énergie relativiste totale du proton incident, d'énergie au repos $E_0 \simeq 938$ MeV, et de quantité de mouvement telle que $P_1 = 2\,072$ MeV, est :

$$E_1 = \sqrt{P_0^2 + E_0^2} \simeq \sqrt{(2\,072)^2 + (938)^2} \simeq 2\,274 \text{ MeV}.$$

L'énergie relativiste totale du proton choqué, immobile, n'est autre que son énergie au repos : $E_0 \simeq 938$ MeV.
Si nous appelons **énergie totale du système** la somme des deux énergies précédentes, cette énergie vaut, avant le choc :

$$E_{\text{avant}} = E_1 + E_0 \simeq 2\,274 \text{ MeV} + 938 \text{ MeV} = 3\,212 \text{ MeV}.$$

L'énergie totale d'un système de particules est la somme des énergies relativistes totales de chacune des particules.

- **Énergie totale du système après la collision.** Nous la calculons de façon analogue à partir des valeurs corrigées des quantités de mouvement qui sont probablement meilleures :

$$E_2 = \sqrt{P_2'^2 + E_0^2} \simeq \sqrt{(1\,940)^2 + (938)^2} \simeq 1\,054 \text{ MeV}.$$

$$E_3 = \sqrt{P_3'^2 + E_0^2} \simeq \sqrt{(480)^2 + (938)^2} \simeq 2\,155 \text{ MeV}.$$

L'énergie totale du système après le choc vaut donc :

$$E_{\text{après}} = E_2 + E_3 = 3\,209 \text{ MeV}.$$

- **Conclusion.** Les résultats vérifient, avec une excellente approximation, qu'il y a bien **conservation de l'énergie totale du système.** La vérification aurait été un peu moins bonne, quoique satisfaisante, en partant des valeurs non corrigées des quantités de mouvement. Notons qu'il convient, lorsqu'on calcule l'énergie totale avant choc, de **ne pas oublier l'énergie au repos de la particule cible.**

b) Conséquences de l'élasticité du choc.

- La collision précédente est **élastique** en ce sens que les protons n'ont pas acquis d'excitation interne et n'ont pas été transformés en nouvelles particules lors de l'interaction : il en résulte que **l'énergie au repos du système se conserve** ($2\,E_0 \simeq 1\,876$ MeV).

Par suite, il y a aussi conservation de la masse du système, ($2\,E_0 = 2\,m_p c^2$).

- La conservation de l'énergie totale.

$$E_1 + E_0 = E_2 + E_3$$

s'écrit, en faisant intervenir l'énergie relativiste :

$$(E_{c_1} + E_0) + (0 + E_0) = (E_{c_2} + E_0) + (E_{c_3} + E_0),$$

$$\text{d'où : } E_{c_1} = E_{c_2} + E_{c_3}.$$

Cette relation montre qu'il y a aussi **conservation de l'énergie cinétique.**

3. Non-conservation des grandeurs newtoniennes.

Il est évident que les quantités de mouvement et les énergies ne peuvent se conserver à la fois quand on utilise leurs expressions relativistes et non relativistes. Bien que ce ne soit pas nécessaire, nous allons le vérifier.

- Les vitesses des particules se calculent aisément à partir de la relation $\beta = \frac{v}{c} = \frac{pc}{E}$. Dans notre cas, on obtient :

$$\beta_1 = \frac{P_1}{E_1} \approx \frac{2\,072}{2\,274} \approx 0{,}911 \; ; \quad \beta_2 \approx \frac{1\,940}{2\,155} \approx 0{,}900 \; ; \quad \beta_3 \approx \frac{480}{1\,054} \approx 0{,}455 \,.$$

- Les tangentes décalquées plus haut fournissent les directions des vecteurs $\overrightarrow{mv}_1$, $\overrightarrow{mv}_2$ et $\overrightarrow{mv}_3$, représentés sur la figure 5d (page 409). On peut vérifier que :

$$\overrightarrow{mv}_1 \neq \overrightarrow{mv}_2 + \overrightarrow{mv}_3 \,.$$

La non-coïncidence est trop importante pour être ici imputée à des incertitudes d'ordre expérimental.
Ce résultat prouve qu'il n'y a pas conservation de la quantité de mouvement newtonienne.

- De même, puisque :

$$\beta_2 \approx 0{,}830 \quad \text{et} \quad \beta_2^2 + \beta_3^2 \approx (0{,}455)^2 + (0{,}900)^2 \approx 1{,}02 \,,$$

$$\frac{1}{2} mv_1^2 \neq \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} mv_3^2 \,.$$

Il n'y a donc pas conservation de l'énergie cinétique newtonienne.

• Rayons de courbure :		
$R_1 \approx$ (cm)	$R_2 \approx$ (cm)	$R_3 \approx$ (cm)
• Quantités de mouvement :		
— calculées :		
$p_1 c = P_1 \approx$ (MeV)	$P_2 \approx$ (MeV)	$P_3 \approx$ (MeV)
— corrigées (éventuellement) :		
$P_1 \approx$ (MeV)	$P_2 \approx$ (MeV)	$P_3 \approx$ (MeV)
• Énergies totales :		
$E_1 \approx$ (MeV)	$E_2 \approx$ (MeV)	
$E_0 \approx 938$	(MeV) $E_3 \approx$	(MeV)
$E_{avant} \approx$	(MeV) $E_{après} \approx$	(MeV)
• Vitesses :		
$\beta_1 \approx$	$\beta_2 \approx$	$\beta_3 \approx$

7. Présentation résumée des résultats obtenus lors de l'étude d'une interaction élastique.

4. Conclusion.

En travaux pratiques, vous reprendrez probablement l'étude d'autres clichés d'interactions élastiques. La figure 7 indique un mode de présentation qui résume les résultats. Dans tous les cas, vous vérifierez, avec une précision plus ou moins grande, que la **quantité de mouvement et l'énergie totale relativistes sont des grandeurs conservatives.**

III. Étude d'une collision inélastique.

Il arrive fréquemment que la nature des particules se trouve modifiée à la suite d'une collision. Les exemples sont nombreux par exemple en chimie où les molécules finales diffèrent des initiales. De telles interactions sont dites **inélastiques.**

Le document que nous étudierons à titre d'exemple est reproduit à la page 415 (figure 8a). En apparence, il ne diffère pas notablement du cliché d'interaction élastique étudié précédemment (figure 5a, page 409).

1. Étude des quantités de mouvement.

a) Valeur des quantités de mouvement.

• L'ordinateur a calculé pour nous la valeur de la quantité de mouvement $\vec{p}_1$ du proton incident. Elle est telle que :

$$p_1 c = P_1 = 2\,034 \text{ MeV} .$$

• Les rayons de courbure se déterminent avec l'abaque, comme précédemment. Dans notre cas :

$$R_1 \simeq 430 \text{ cm} ; \quad R_2 \simeq 170 \text{ cm} ; R_3 \simeq 121 \text{ cm} .$$

Les indices correspondent aux numéros portés par la figure 8a.

• On en déduit :

$$p_2 c = P_2 = \frac{P_1}{R_1} . R_2 \simeq \frac{2\,034}{430} . 170 \approx 804 \text{ MeV} ,$$

$$p_3 c = P_3 = \frac{P_1}{R_1} . R_3 \simeq \frac{2\,034}{430} . 121 \approx 572 \text{ MeV} .$$

b) Conservation de la quantité de mouvement.

• **Non-conservation apparente.**

La figure 8b montre les tangentes au point d'impact, décalquées comme précédemment. La construction 8c, reproduite ici à une échelle inférieure à celle que vous utilisez (1 cm $\triangleq$ 100 MeV), indique des représentants de P_1 et $\vec{P}_2 + \vec{P}_3$. Manifestement, l'extrémité de

$\vec{P}_2 + \vec{P}_3$ est beaucoup trop loin de celle de $\vec{P}_1$ pour que l'écart puisse être attribué à des incertitudes expérimentales ou à l'absence de corrections de freinage, dont nous avons vu plus haut l'ordre de grandeur.

• La loi de conservation de la quantité de mouvement semble être mise en défaut. Mais, il faut se souvenir que l'on ne voit pas tout ce qui se passe dans une chambre à bulles : **les particules neutres n'apparaissent pas car elles ne laissent pas de traces.**
Les physiciens considèrent que la loi de conservation de la quantité de mouvement est une loi très générale. Nous l'admettrons ici et nous interpréterons le résultat précédent par l'hypothèse suivante : **au cours du choc, il s'est créé une particule nouvelle mais il s'agissait d'une particule neutre** qui n'est pas apparue sur la photo ; la quantité de mouvement $\vec{p}_n$ de cette particule est telle que $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_n$.

• L'étude du cliché permet donc de connaître cette quantité de mouvement $\vec{p}_n$. Sur une figure réalisée à l'échelle 1 cm $\triangleq$ 100 MeV (représentée en plus petit à la figure 8c), nous avons trouvé que la flèche représentant $\vec{p}_n$ avait 9,8 cm de longueur, d'où :

$$p_n c = P_n \approx 980 \text{ MeV}.$$

c) Problème posé par l'identification de la particule neutre.

• L'idée la plus simple qui vient à l'esprit est que la particule neutre formée est un neutron, seul corpuscule neutre que vous connaissiez actuellement. Ainsi, la « réaction » pourrait s'écrire, en désignant par *n* le neutron et par p_i^+ les protons (les indices *i* correspondant aux numéros des traces indiquées sur la figure 8) :

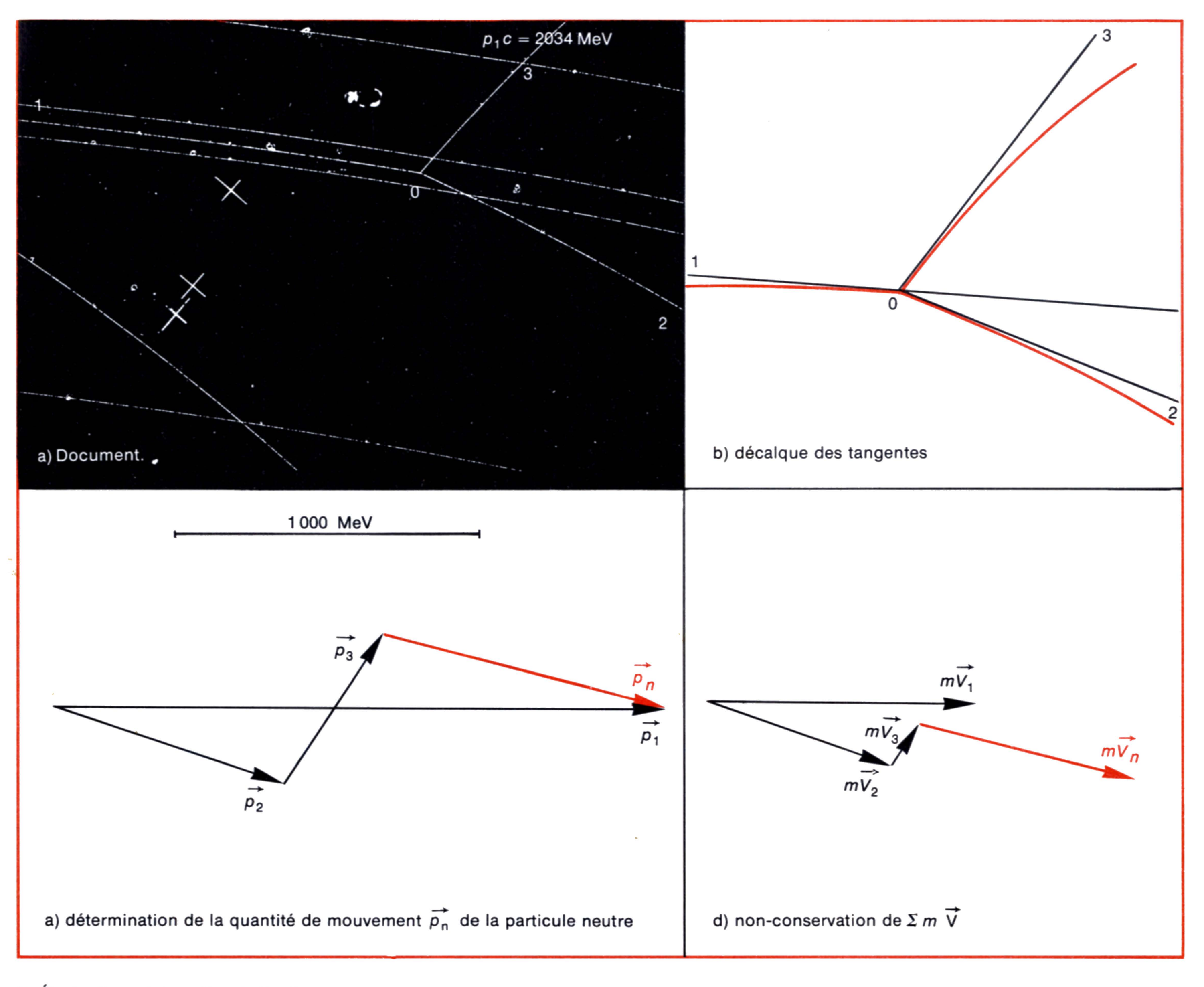
$$p_1^+ + p_0^+ \rightarrow p_2^+ + p_3^+ + n$$

$$\text{ou, plus simplement,} \quad pp \rightarrow ppn.$$

• **Mais cette hypothèse ne tient pas.** En effet, calculons l'énergie totale du système avant et après le choc :
— Avant la collision,

$$E_1 = \sqrt{P_0^2 + E_0^2} \approx \sqrt{(2\,034)^2 + (938)^2} \approx 2\,240 \text{ MeV}.$$

D'où $$E_{\text{avant}} = E_1 + E_0 \approx 2\,240 + 938 \approx 3\,178 \text{ MeV}.$$



8. Étude d'une interaction inélastique.

— Après le choc, selon notre hypothèse,

$$\left.\begin{aligned} E_2 &= \sqrt{(804)^2 + (938)^2} \approx 1\,235 \text{ MeV} \\ E_3 &= \sqrt{(572)^2 + (938)^2} \approx 1\,099 \text{ MeV} \end{aligned}\right\} 2\,334 \text{ MeV}$$

— La loi de conservation de l'énergie totale conduit à $3\,178 = 2\,334 + E_n$, d'où $E_n = 844$ MeV pour le neutron. Or, l'énergie totale d'un corpuscule est nécessairement supérieure à son énergie au repos (940 MeV pour un neutron).
Cela infirme donc notre supposition.

• Quelle réaction s'est donc produite ? Pour répondre, nous devons mieux faire connaissance avec les diverses particules élémentaires détectées depuis quelques années par les physiciens.

2. Classification sommaire des particules élémentaires.

• Partant de considérations théoriques, associées aux dépouillements de nombreux clichés de chambres à bulles, les physiciens ont été amenés à penser que **les protons, les électrons et les neutrons ne sont pas les seules particules élémentaires.**
Les mesures de l'énergie et de la quantité de mouvement des particules permettent de calculer leur énergie au repos : $E_0 = \sqrt{E^2 - p^2 c^2}$, d'où l'on déduit leur masse. C'est ainsi par exemple que l'on a découvert un groupe de particules de masse intermédiaire entre celle des électrons et des nucléons. Leur énergie de masse est voisine de 140 MeV (électron : 0,5 MeV ; proton : 938 MeV). Ces particules de masse moyenne ont été appelées **mésons** π (du grec « mesos », moyen) ou encore **pions.** Il existe un méson π neutre, noté π^0 (énergie de masse : 140 MeV) : il existe aussi un méson π^+ et un méson π^-. On a découvert d'autres mésons (Kaons K^+ et K^0, η (êta) ψ (psi) etc...). Il s'en forme par exemple, lorsque des protons énergiques viennent frapper les cibles destinées à l'obtention des particules secondaires envoyées dans les chambres à bulles (page 405).

• On a aussi découvert plusieurs catégories de particules légères (« leptons ») ou lourdes (« baryons »).
Les physiciens assistent avec étonnement à la prolifération des particules « élémentaires ». Pour mieux s'y retrouver, ils classent habituellement les corpuscules par familles, en fonction de leurs masses et des lois de conservation qui régissent leurs interactions. Le tableau ci-contre (figure 9), extrêmement incomplet, donne quelques exemples de ces particules, limitées à celles que vous pourrez voir dans ce cours.

• Les expériences menées dans les diverses chambres de détection ont parfois prouvé l'existence de particules **d'antimatière.** A toute particule chargée correspond en général **une antiparticule,** dont les caractéristiques sont les mêmes que celles de la particule, exception faite pour la charge, qui est de signe contraire.
Nous parlerons plus loin de l'antiélectron (ou positron) à propos de la radioactivité (chapitre 24).
La plupart des particules neutres possèdent aussi une antiparticule associée que nous ne pouvons pas définir ici.

• Les physiciens ont constaté que lorsqu'un baryon est créé au cours d'une réaction inélastique, il y a toujours aussi formation d'un antibaryon. De même, un baryon et un antibaryon disparaissent toujours simultanément. Il en résulte que la somme algébrique du nombre de baryons et d'antibaryons (en comptant -1 pour un antibaryon) reste constante avant et après toute réaction.
Cette **loi de conservation du nombre baryonique** est considérée comme l'une des lois fondamentales de la physique.

• Dans ce cours, les seuls baryons que nous rencontrerons seront des nucléons (neutrons et protons), et nous n'aurons pas à faire intervenir d'antinucléons.
Cette limitation fait que la loi de conservation du nombre baryonique se réduit à la **conservation du nombre de nucléons.** Lorsque nous évoquerons cette loi, vous saurez toutefois qu'il s'agit d'un cas particulier d'une loi beaucoup plus générale.

• Nous disposons maintenant d'une raison bien plus fondamentale pour rejeter notre hypothèse initiale ($pp \rightarrow ppn$), car elle n'assure pas la conservation du nombre de nucléons.

Classe	Exemples	Symbole	Énergie de masse (MeV)
LEPTONS	électron	e^-	0,511
MÉSONS	pions	π^0	135
		π^+	140
	kaons	k^+	494
		k^0	498
BARYONS	proton	p^+	938
	neutron	n	940

9. Tableau très incomplet des particules « élémentaires ». Les leptons sont des particules légères (du grec « leptos » : léger). Les baryons sont massifs (du grec « barus » : lourd).

3. Étude des énergies.

On peut estimer ce qui s'est produit au cours de la collision présentée à la figure 8 (page 415) en faisant le bilan énergétique de la réaction.

• Pour l'événement que nous étudions, **les lois de conservation du nombre de nucléons et de la charge électrique** autorisent les hypothèses suivantes :

$$p_1^+ + p_0^+ \to p_2^+ + p_3^+ + \pi^0$$

$$p_1^+ + p_0^+ \to p_2^+ + \pi_3^+ + n$$

$$p_1^+ + p_0^+ \to \pi_2^+ + p_3^+ + n\,.$$

D'autres hypothèses, correspondant à des événements plus rares, seraient possibles, mais les clichés qui seront à votre disposition ont été sélectionnés pour satisfaire une seule de ces hypothèses.
Par ailleurs, la conservation du nombre des nucléons exclut les événements suivants :

$$p^+ + p_0^+ \to \pi^+ + \pi^+ + n\,,$$

ou

$$\pi^+ + p^+ + \pi^0\,,$$

ou

$$\pi^+ + \pi^+ + \pi^0\,,$$

car il manquerait des nucléons.

• Parmi ces trois hypothèses, nous retiendrons celle qui assure au mieux la **conservation de l'énergie totale.**
— L'énergie totale du système avant le choc s'obtient en ajoutant l'énergie au repos du proton « immobile » choqué à l'énergie totale du proton incident. Cette dernière a été calculée plus haut (page 414) :

$$E_{\text{avant}} = E_1 + E_0 \approx 2\,240 + 938 \approx 3\,178 \text{ MeV}\,.$$

— Après collision, les énergies se calculent encore par la relation

$$E = \sqrt{P^2 + E_0^2}\,,$$

où E_0 désigne selon les cas l'énergie au repos du méson π ou du proton, ou du neutron. La quantité de mouvement de la particule neutre, nécessaire pour calculer son énergie, a été déterminée graphiquement (figure 8c).

Quelle que soit l'interaction, élastique ou non, il y a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale.

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant :

Hypothèse	$E_{avant} = E_1 + E_0$ MeV	E_2 (MeV)	E_3 (MeV)	E_n (MeV)	$E_{après} = E_2 + E_3 + E_n$
$pp \to pp\pi$	3 178	$\sqrt{804^2 + 938^2} \approx 1\,235$	$\sqrt{572^2 + 938^2} \approx 1\,099$	$\sqrt{980^2 + 135^2} \approx 989$	3 325
$pp \to p\pi n$	3 178	1 235	$\sqrt{572^2 + 140^2} \approx 589$	$\sqrt{980^2 + 940^2} \approx 1\,360$	3 184
$pp \to \pi pn$	3 178	$\sqrt{804^2 + 140^2} \approx 816$	1 099	1 360	3 275

L'une de ces hypothèses est bien mieux vérifiée que les deux autres (la seconde dans notre cas). **Les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale se trouvent ainsi vérifiées.**

b) Caractéristiques des chocs inélastiques.

• L'hypothèse retenue est donc la suivante :

$$p_1^+ + p_0^+ \to p_2^+ + \pi_3^+ + n\,.$$

Il n'y a pas conservation de l'énergie au repos qui vaut en effet :

2×938 MeV $= 1\,876$ MeV, avant le choc,

et $938 + 140 + 940 = 2\,018$ MeV, après le choc.

Il y a donc création d'une énergie de masse de 142 MeV : **il n'y a pas conservation de la masse.**

• La conservation de l'énergie totale s'écrit, en faisant intervenir l'énergie cinétique :

$$\underbrace{(E_c + E_0)_1}_{\text{proton projectile}} + \underbrace{(0 + E_0)_0}_{\text{proton cible}}$$

$$= \underbrace{(E_c + E_0)_2}_{\text{proton}} + \underbrace{(E_c + E'_0)_3}_{\text{méson } \pi} + \underbrace{(E_c + E''_0)_n}_{\text{neutron}} \quad \text{ou encore :}$$

$$\underbrace{E_{c_1} + 2\,E_0}_{\text{initiale}} = \underbrace{E_{c_2} + E_{c_3} + E_{c_n}}_{\text{finale}} + E_{0_2} + E'_{0_3} + E''_{0_n}$$

$2\,E_0$ est l'énergie de masse initiale : $m_{in}\,c^2$.
$E_{0_2} + E_{0_3} + E_{0_n}$ est l'énergie de masse finale : $M_{fin}\,c^2$.

On a donc : $$\underbrace{E_c}_{\text{initiale}} - \underbrace{E_c}_{\text{finale}} = (M - m)\,c^2\,.$$

• Rayons de courbure

$R_1 \approx$ $R_2 \approx$ $R_3 \approx$

• Quantités de mouvement

$P_1 \approx$ $P_2 \approx$ $P_3 \approx$ $P_n \approx$

• Énergies totales

$p_1^+ + p_0^+ \to$	$p_2^+ + p_3^+ + \pi_0$	$p_2^+ + \pi_3^+ + n$	$\pi_2^+ + p_3^+ + n$
$E_1 =$ $E_0 = 938$	$E_2 =$ $E_3 =$ $E_n =$	$E_2 =$ $E_3 =$ $E_n =$	$E_2 =$ $E_3 =$ $E_n =$
$E_{avant} =$	$E_{après} =$	$E_{après} =$	$E_{après} =$

• Vitesses

$\beta_1 \approx$ $\beta_2 \approx$ $\beta_3 \approx$ $\beta_n \approx$

10. Présentation synthétique des résultats obtenus lors de l'étude d'une collision inélastique proton-proton.

Ainsi la perte d'énergie du système est égale à l'augmentation de son énergie de masse. On dit aussi qu'il y a eu **matérialisation de l'énergie.**

• On peut se demander si la **non-conservation de la masse** est compatible avec le fait que la masse est **invariante** relativement à un changement de référentiel, comme nous l'avons signalé au chapitre précédent (page 389). La réponse est oui : tous les observateurs, en mouvement ou non les uns par rapport aux autres, constateront pour le système la **même variation de masse.** C'est en ce sens que la masse est **invariante.** « Invariant » ne signifie pas « qui ne varie pas ».

IV. Conclusion générale.

L'étude de ce chapitre a dû vous convaincre de la validité des formules de la mécanique relativiste (formules que vous aviez admises), de la généralité et de l'importance des lois de la conservation, peut-être aussi de leur beauté.
Rappelons ces lois fondamentales :

• **Pour toute interaction entre particules, il y a conservation :**
— **de la charge ;**
— **de la quantité de mouvement ;**
— **de l'énergie totale du système de particules.**

• **Pour les interactions élastiques, il y a aussi conservation de la masse et de l'énergie cinétique.**

• **Pour les interactions inélastiques, les pertes (algébriques) d'énergie cinétique sont exactement compensées par des gains (algébriques) d'énergie de masse.**
Même si les phénomènes naturels sont parfois complexes, il est tout à fait remarquable qu'ils puissent être décrits en utilisant des lois fondamentalement simples.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

• Les ______ permettent de visualiser les trajectoires de particules diverses. Ces dernières, déviées par des champs ______ uniformes, décrivent des arcs de ______ . Seules, les particules ______ laissent des traces. Dans les chambres à hydrogène liquide, les particules cibles sont des ______ .

• Quelle que soit l'interaction, la ______ électrique, la ______ et l' ______ relativistes sont des grandeurs conservatives.

• Lors d'une interaction inélastique, la ______ et l' ______ ne se conservent pas (contrairement au cas des interactions ______). La perte d' ______ est exactement compensée par une apparition équivalente de ______ .

Petites questions.

1. Dans une chambre à bulles, les trajectoires des particules neutres sont-elles incurvées par les champs magnétiques ?

2. La quantité de mouvement d'une particule de charge q, décrivant dans un champ $\vec{B}$ un cercle de centre O, est-elle donnée par $\vec{p} = q\overrightarrow{OM} \wedge \vec{B}$ (M désigne la position actuelle de la particule) ?

3. Si, dans une chambre à bulles, deux particules de même charge décrivent dans le même sens des arcs de cercle de même rayon, ont-elles la même quantité de mouvement ? la même énergie cinétique ?

4. Un proton et un méson π^+ pénètrent dans une chambre à bulles avec la même énergie cinétique. Quel est celui dont la trajectoire s'incurvera davantage ?

5. Un proton et un électron peuvent-ils décrire des trajectoires de même rayon dans une chambre à bulles.

6. Pourrez-vous exploiter un cliché d'interaction inélastique s'il se crée deux particules neutres ?

7. L'étude d'un cliché pris dans une chambre à bulles a montré qu'il y a conservation de la quantité de mouvement des particules chargées. Cela suffit-il pour affirmer que l'interaction est élastique ?

8. Les « réactions » suivantes sont-elles possibles ?

$p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + \pi^o + n$?

$p^+ + p^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + n + n$?

$p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + \pi^o + \pi^o + \pi^o$?

$\pi^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+$?

Réponses : Non ; oui ; oui ; non.

Applications immédiates.

9. Un proton, dont la quantité de mouvement est telle que $pc = P = 2\,070$ MeV, décrit dans une chambre à bulles un arc de cercle de 4 m de rayon. Quelle est la valeur du champ magnétique ?

10. Calculez l'énergie cinétique et la quantité de mouvement d'un méson π (énergie de masse 140 MeV) dont l'énergie totale est égale à l'énergie au repos d'un proton (938 MeV).

Réponses : $E_c \approx 798$ MeV ; $pc \approx 927$ MeV.

11. Un proton (énergie de masse $\approx$ 1 GeV) possède une énergie totale de 5 GeV ;

a) Calculez sa quantité de mouvement.

b) Il entre en collision élastique avec un autre proton immobile ; après choc, les deux protons ont même énergie : calculez leur énergie totale et leur quantité de mouvement.

c) Tracez le diagramme de conservation de quantité de mouvement. Quel est l'écart angulaire des deux trajectoires après choc ?

12. Un proton de quantité de mouvement p_1 telle que $p_1\,c = 3\,873$ MeV vient en choquer un autre immobile. Après le choc, on observe les traces d'un proton ($pc = 1\,732$ MeV) et d'un méson π^+ ($pc = 989$ MeV), dont la somme vectorielle des quantités de mouvement a même direction et sens que p_1. La trajectoire du proton émergent fait un écart angulaire de 27° avec celle du proton incident. On donne (valeurs approchées) : énergies de masse du proton et du neutron : 1 000 MeV ; du méson π : 150 MeV.

a) Calculez les énergies totales du proton incident, du proton et du méson émergents. En déduire l'énergie totale du neutre formé.

b) Dessinez le diagramme vectoriel de conservation de la quantité de mouvement (précisez l'échelle adoptée). Déterminez graphiquement la valeur de la quantité de mouvement de la particule créée.

c) Calculez l'énergie de masse de cette particule neutre ; l'identifier.

Réponses :

a) $E_1 \approx 4\,000$ MeV ; $E_2 \approx 2\,000$ MeV (p) ; $E_3 \approx 1\,000$ MeV (π) ; $E_n \approx 2\,000$ MeV ;

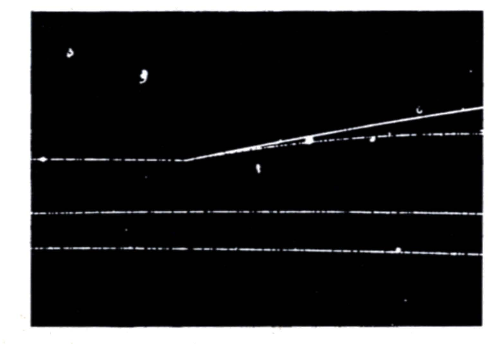
b) 1 730 MeV/c ; **c)** 1 000 MeV (neutron).

13. Sur un cliché de chambre à bulles, le champ magnétique étant perpendiculaire aux trajectoires observées, un proton de grande énergie rencontre un proton initialement au repos. Le choc est élastique. L'énergie initiale du proton est supérieure à chacune des énergies finales des deux protons : comment pouvez-vous le vérifier en observant le cliché ? Pour vérifier que le choc est bien élastique, quelles mesures ou constructions feriez-vous sur le cliché ?
(D'après baccalauréat expérimental ; 1975. Session de remplacement).

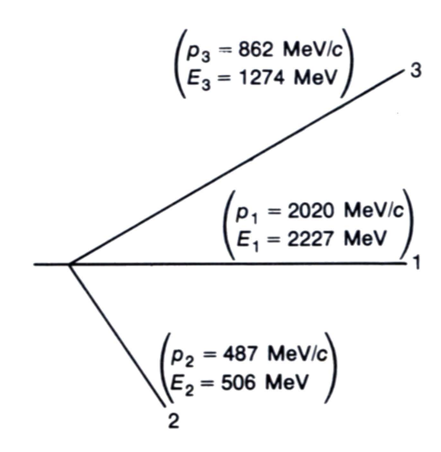
Exploitation de documents.

14. Vérifiez que la collision relativiste proton-proton, donnée au chapitre précédent (figure 7c, page 386) est élastique.

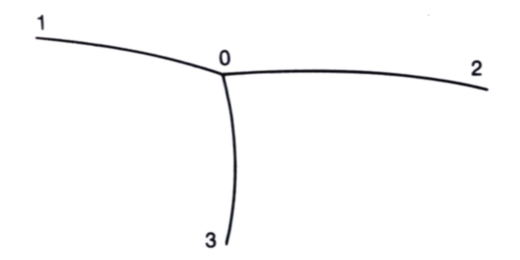
15. La figure ci-dessous est la photographie d'une collision relativiste proton-proton. A quoi reconnaît-on, sans mesure ni calcul, qu'il s'agit d'une interaction inélastique ?



16. La figure ci-dessous indique, pour une interaction proton-proton, les positions des tangentes au point d'impact (1 pour l'incidente, 2 et 3 après choc). Les valeurs des quantités de mouvement et des énergies totales sont indiquées sur le schéma. Identifiez les particules et, éventuellement, celle qui s'est formée.



17. La figure ci-dessous représente la partie intéressante d'un cliché de chambre à bulles. Il s'agit du « choc », présumé élastique, d'un proton (noté 1) sur un proton au repos (noté 0). Après l'interaction, les deux trajectoires sont probablement celles de deux protons (notés 2 et 3). Les trajectoires sont toutes trois dans un même plan.
La quantité de mouvement p_1 du proton incident est telle que $P_1 = p_1 c = 2\,000$ MeV (ou, ce qui est équivalent : la quantité de mouvement p_1 vaut $2\,000$ MeV/c).

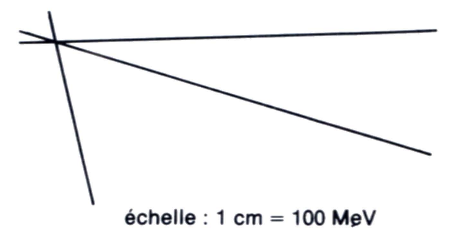


Les rayons de courbure, mesurés sur le cliché, valent respectivement $R_1 \approx 340$ cm ; $R_2 \approx 300$ cm ; $R_3 \approx 113$ cm.

1) Expliquez brièvement comment procéder pour déterminer ces rayons de courbure.

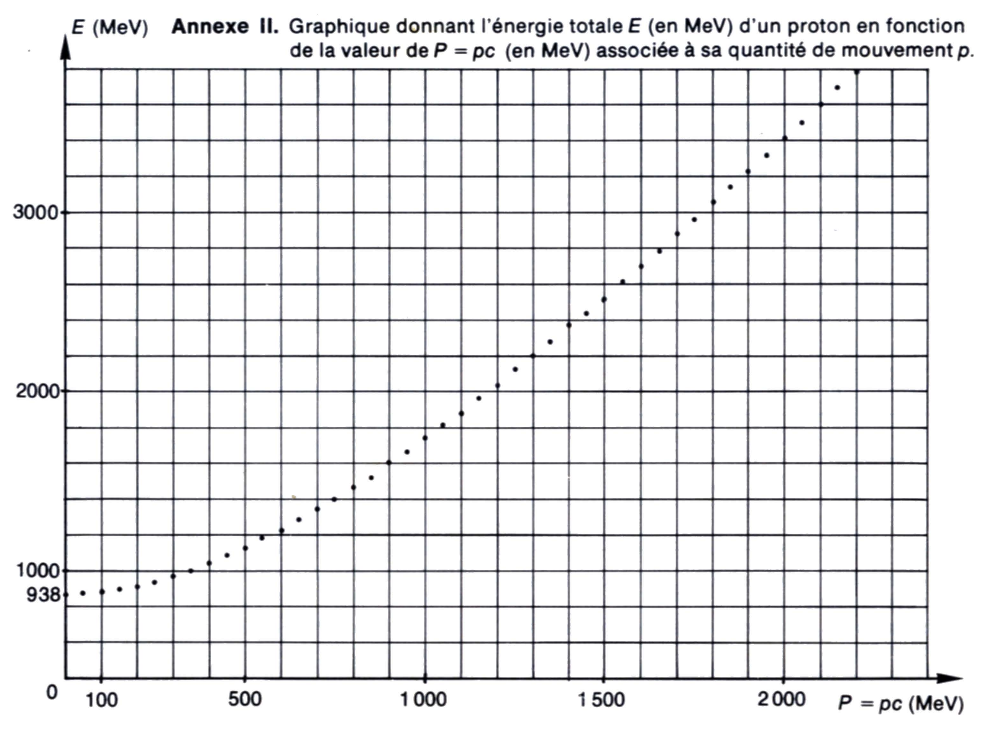
2) Déterminez, en MeV, les valeurs $P_2 = p_2 c$ et $P_3 = p_3 c$ associées aux quantités de mouvement p_2 et p_3.
A l'échelle 1 cm = 100 MeV, construire des représentants des vecteurs $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$ et $\overrightarrow{P_3}$ associés aux quantités de mouvement p_1, p_2 et $\overrightarrow{p_3}$.
Commentez et conclure.

3) A l'aide de l'annexe II, qui permet de déterminer graphiquement (éventuellement par interpolation) l'énergie totale E (en MeV) d'un proton connaissant la valeur de $P = pc$ (en MeV) associée à la quantité de mouvement, déterminez les énergies du système avant, puis après l'interaction. Conclure, en particulier sur la validité de l'hypothèse d'élasticité du choc.

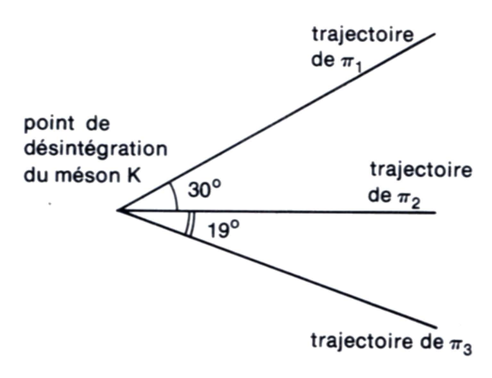


Annexe I. Figure donnant la disposition des tangentes au point d'impact, décalquées sur le cliché.

Annexe II. Graphique donnant l'énergie totale E (en MeV) d'un proton en fonction de la valeur de $P = pc$ (en MeV) associée à sa quantité de mouvement p.



18. Un méson K, mobile dans un repère R, se désintègre en donnant naissance à trois pions notés π_1, π_2, π_3. Les trajectoires rectilignes des trois pions sont coplanaires et situées, les unes par rapport aux autres, comme l'indique le croquis ci-dessous fait par un observateur immobile lié au repère R, le plan de figure étant le plan des trajectoires.



Le même observateur a relevé les grandeurs suivantes concernant les quatre particules (dans ce tableau, MeV désigne le « méga-électron-volt » et c est la célérité de la lumière dans le vide) :

Nature des particules	Énergie totale (en MeV)	Valeur de la quantité de mouvement (en MeV/c)	Masse des particules (en MeV/c^2)
π_1	$E_1 = 280$	p_1	$m = 140$
π_2	$E_2 = 382$	$p_2 = 355$	$m = 140$
π_3	$E_3 = 173$	$p_3 = 102$	$m = 140$
K	E	P	M

En utilisant le croquis et le tableau, trouver successivement :
— la valeur p_1 de la quantité de mouvement du pion π_1 ;
— l'énergie totale E du méson K ;
— le tracé graphique, à une échelle qu'on précisera, de la quantité de mouvement p du méson K, en utilisant les quantités de mouvement $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$, $\vec{p_3}$ des pions ;
— la valeur de p, trouvée graphiquement, et exprimée en MeV/c ;
— une valeur approchée, en MeV/c^2, de la masse M du méson K.
(Baccalauréat expérimental ; juin 1979).

Approfondissement.

Les exercices signalés par un carré rouge □ présentent une plus grande difficulté que les autres.

19. Dans une chambre à bulles, un proton de grande énergie décrit un arc de cercle de rayon $R = 2{,}25$ m ; le champ magnétique uniforme dans lequel il se déplace est perpendiculaire au plan du cercle et vaut $B = 1{,}90$ tesla.
Calculer la valeur de la quantité de mouvement du proton en unité SI. Calculer son énergie cinétique en électron-volt. Certaines valeurs numériques sont à connaître par le candidat, ne serait-ce que par leur ordre de grandeur.
(Baccalauréat expérimental ; série C ; juin 1975).

Réponses : $6{,}8 \cdot 10^{-19}$ kg m/s ; $6{,}5 \cdot 10^{8}$ eV.

20 **Obtention de protons primaires.** Un proton (énergie de masse 1 000 MeV environ) pénètre dans un synchrotron de 100 m de rayon, avec une énergie cinétique de 50 MeV. Il en sort une seconde après avec une énergie cinétique de 28 GeV.

a) Calculez, à l'entrée et à la sortie, les énergies totales, les quantités de mouvement et les vitesses du proton.

b) Calculez les valeurs initiale et finale du champ magnétique dans le synchrotron. On admet que ce champ croît proportionnellement au temps. Donnez la relation fournissant sa valeur en fonction du temps.

c) Établir les expressions donnant, en GeV, les valeurs en fonction du temps de $P = pc$ associée à la quantité de mouvement des protons et leur énergie totale.
Calculez ces valeurs aux dates $t = 0$; 0,05 ; 0,1 ; 0,2 ; ... 0,9 ; 1,0 s. (Consignez les résultats dans un tableau.)

d) Calculez, aux mêmes dates, les vitesses des protons exprimées en fraction β de la célérité de la lumière.
Représentez graphiquement les variations de la vitesse en fonction du temps (Échelle : 1 cm = 0,05 s en abscisses ; 1 cm = 0,05 pour β). Que représente, sur ce graphique, une aire de 1 cm² ? Par une mesure d'aire approximative, déterminez la distance totale parcourue par un proton dans le synchrotron ; la comparer à la distance Terre-Lune. Combien de révolutions les protons accomplissent-ils avant de sortir du synchrotron ?

e) A chacun des cycles précédents, ce sont des « bouffées » d'environ 10^{13} protons qui sont accélérées.
Quelle est l'intensité du courant équivalent à ce faisceau protonique ? Si l'on procède à 10 cycles d'accélération par minute, 8 heures par jour et 360 fois par an, quelle masse (exprimée en kg) sera passée dans le synchrotron au bout de 10 ans ?

21 **Sélection des particules avant entrée en chambre à bulles.**

1) Des protons de haute énergie viennent frapper une cible, d'où il sort en particulier des mésons π^+ (énergie de masse : 136,9 MeV) et des protons (énergie de masse : 938,3 MeV). Après focalisation, ce mélange de particules pénètre dans une région où est appliqué un champ magnétique de valeur $B = 1{,}25$ T. Une fente sélectionne à la sortie les particules qui ont décrit un arc de cercle de 6 m de rayon.
Calculez la quantité de mouvement de ces particules émergentes, leurs énergies cinétiques et leurs vitesses.

2) Les particules pénètrent ensuite horizontalement dans un condensateur plan horizontal de 4 m de long, dont les armatures sont séparées de 10 cm. La tension aux bornes du condensateur est de 400 kV.

a) Calculez les accroissements d'énergie cinétique relativiste des particules après passage dans le condensateur.

b) Calculez les énergies totales, les quantités de mouvement et les vitesses des protons et des mésons π émergents.

c) En remarquant que l'accroissement d'énergie cinétique se traduit seulement par une variation de la composante verticale de la vitesse des particules, calculez ces composantes.

3) Les particules sortent du condensateur en semblant provenir du milieu de l'horizontale d'entrée intérieure au condensateur.

a) Calculez les écarts angulaires des trajectoires avec l'horizontale à la sortie.

b) A quelle hauteur, par rapport à l'horizontale d'entrée dans le condensateur, faudrait-il placer une fente qui sélectionnerait les protons ?

c) En réalité, un champ magnétique uniforme compense l'action du champ électrique. Précisez son sens et calculer la valeur. (On remarquera que les trajectoires sont assez tendues, et on cherchera le rayon du cercle trajectoire qui donnerait, en l'absence de champ électrique, une déviation opposée à la précédente).

22. Un noyau initialement immobile, d'énergie de masse 200 GeV, émet un électron de vitesse 0,998 c.

a) S'agit-il d'un événement élastique ou inélastique ?

b) Calculez la quantité de mouvement des particules après l'émission et la vitesse de recul du noyau fermé. Ce dernier est-il relativiste ?

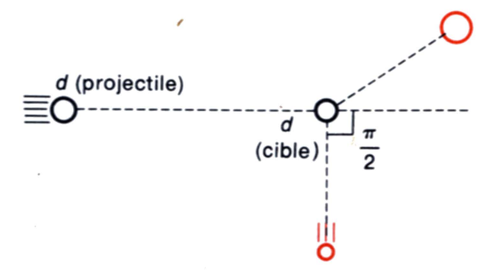
c) Calculez les énergies totales et cinétiques de l'électron et du noyau formés.

d) Calculez la variation de masse du système. Comparez la masse du noyau formé à celle du noyau initial.

23 Une mesure de l'énergie de masse d'un deuton (noyau d'« hydrogène lourd », constitué d'un proton et d'un neutron), effectuée au spectrographe de masse, a donné $E_0 = 1\,876{,}10$ MeV.

1) Ce deuton, initialement immobile, est soumis à une tension accélératrice de 1 808 kV. Quelle énergie cinétique, exprimée en MeV, acquiert-il ? Que vaut sa quantité de mouvement ?

2) Après avoir subi l'accélération précédente, le deuton vient en choquer un autre, immobile (figure ci-dessous). Il se forme un proton (énergie de masse 938,8 MeV) et un noyau de tritium (constitué d'un proton et de deux neutrons).



a) S'agit-il d'un événement élastique ou inélastique ?

b) Par déviations électriques et magnétiques, on mesure l'énergie cinétique des protons émis dans une direction perpendiculaire à celle du deuton incident. On trouve 3,467 MeV. Calculez l'énergie totale et la quantité de mouvement du proton.

3) Calculez l'énergie totale du triton, et déterminer les valeurs des composantes de son vecteur quantité de mouvement (parallèlement et perpendiculairement à la direction incidente). En déduire la valeur de la quantité de mouvement du noyau de tritium, et sa masse.

4) Une mesure de la masse du noyau de tritium, réalisée indépendamment au spectrographe de masse, donne $m_t = 2\,809{,}4$ MeV/c^2. Cela constitue-t-il une nouvelle vérification de la validité des lois de conservation ?

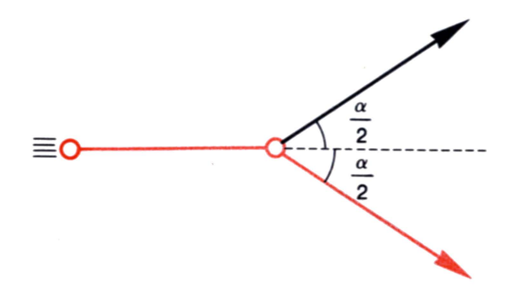
24. On bombarde des noyaux de lithium (constitués de 3 protons et 4 neutrons) avec des protons dont l'énergie cinétique est 500 keV. Il se forme deux hélions (noyaux d'hélium) de même énergie. Calculez l'énergie cinétique d'un noyau d'hélium et l'énergie libérée par cette réaction.
Énergies de masse des noyaux : Li : 6 535,26 MeV ; proton : 938,28 MeV ; hélium : 3 728,42 MeV.

25 Un proton relativiste vient heurter un autre proton immobile. La collision est élastique. Après le choc, les deux protons ont la même énergie ; α désigne l'écart angulaire entre les deux directions (figure ci-dessous).

a) Montrez que les trajectoires après choc sont symétriques par rapport à la trajectoire incidente.

b) Établir la relation donnant α en fonction de l'énergie totale E du proton incident et de l'énergie de masse E_0 des protons. Application numérique : $E_0 = 1$ GeV ; $E = 5$ GeV. Calculer α.

c) Que devient la relation précédente lorsque les protons sont relativement lents.



Réponses :

b) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{E + 3\,E_0}{E + 3\,E_0}$ ou

$\cos \alpha = \frac{E - E_0}{E + 3\,E_0}$;

c) $\cos \alpha = 0 \left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$.

22 Aspect corpusculaire des ondes

I. Effet photo-électrique.

1. Structure des métaux.
2. Expérience de Heinrich Hertz.
3. Insuffisance du modèle ondulatoire.
4. Caractéristiques tension-intensité d'une cellule.

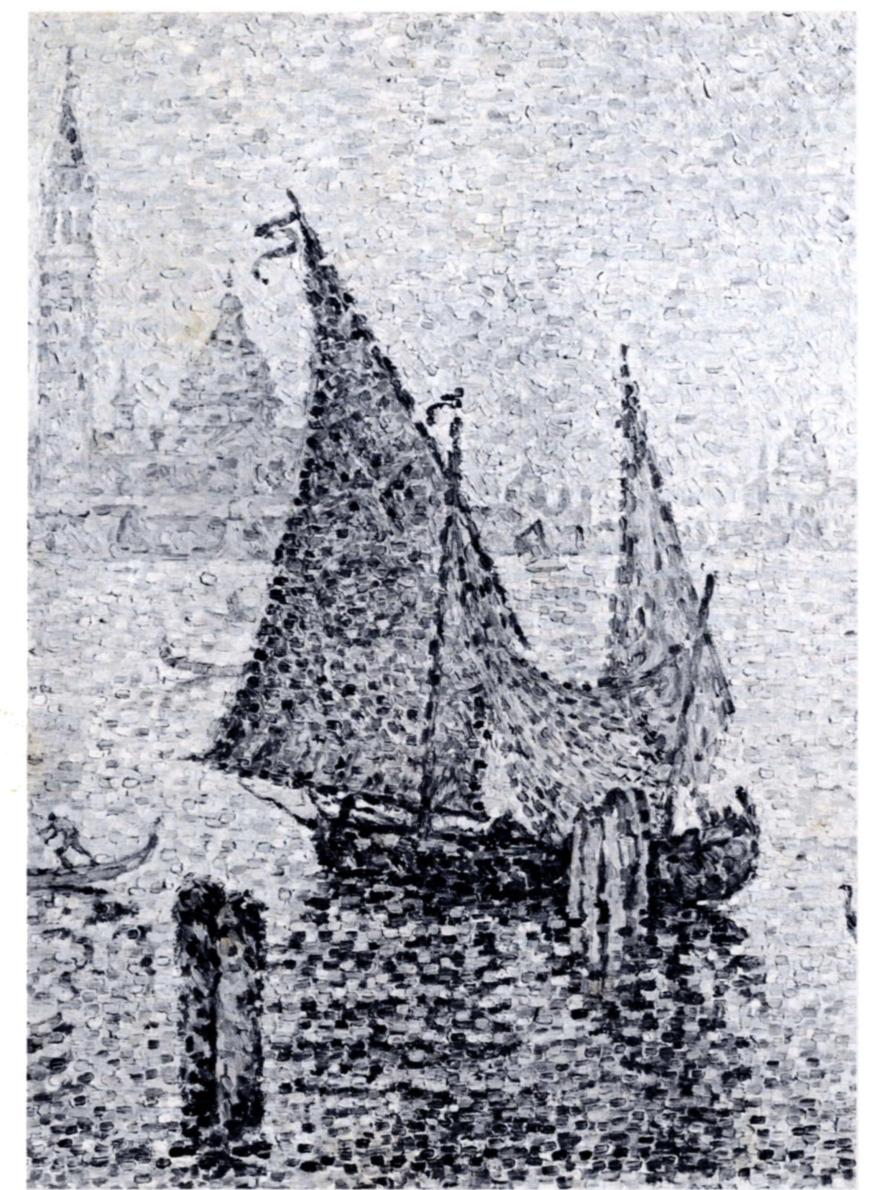
II. Les photons.

1. Mesures de Millikan.
2. Les photons, corpuscules relativistes.
3. Effet Compton.

III. Conciliation des points de vue ondulatoire et corpusculaire.

1. Ondes ou corpuscules ?
2. Analyse d'expériences d'interférences.
3. Les bases de la mécanique quantique.
4. Importance relative des aspects ondulatoires et corpusculaires.

IV. Conclusion.



La technique dite du « pointillisme » a été l'un des moyens d'expression des peintres. Tableau de Signac

Qu'est-ce que la lumière ? Cette question intrigue depuis fort longtemps les physiciens, les peintres et les poètes... D'après le modèle ondulatoire, étudié en classe de Première, il s'agit d'une onde électromagnétique qui transporte de l'énergie, même dans le vide. Cependant, nous allons constater que certaines interactions entre la lumière et la matière s'interprètent mal à partir de ce modèle et qu'il convient de lui en juxtaposer un autre : le modèle corpusculaire.

I. Effet photo-électrique.

L'effet photo-électrique consiste en une **émission d'électrons par la matière éclairée,** en particulier par les métaux. Pour mieux comprendre ces phénomènes, il convient d'abord de rappeler la structure des métaux.

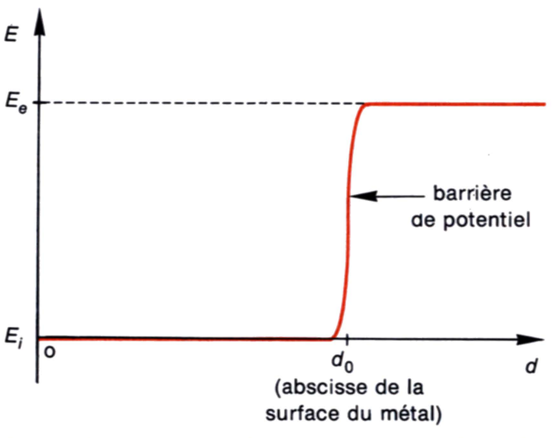
1. Structure des métaux.

- Les atomes d'éléments métalliques, situés dans les colonnes de gauche de la Classification Périodique, abandonnent facilement un électron, parfois plusieurs, qui constituent les **électrons de conduction.** A l'état solide, un métal a une structure cristalline : c'est un ensemble d'ions positifs, régulièrement disposés, entre lesquels circulent les électrons de conduction.

- Un électron intérieur au métal est surtout sensible aux champs électriques créés par les ions et les électrons qui sont situés dans son voisinage. Dans toutes les directions, il y a autant d'ions ou d'électrons sources de champs et en moyenne le champ électrique est en tout point nul.

Du fait de la répartition des charges, le champ électrique intérieur au métal est en moyenne nul et, par suite, **l'énergie potentielle d'origine électrique d'un électron de conduction reste pratiquement constante tant qu'il reste à l'intérieur du métal.** C'est en ce sens que les électrons peuvent être considérés comme **libres à l'intérieur du métal.**

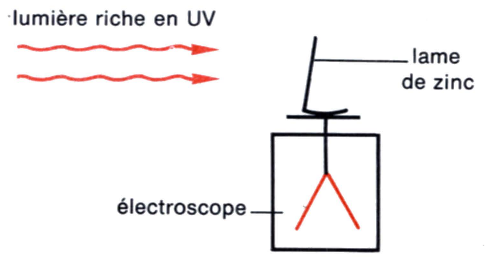
- Lorsqu'on fournit de l'énergie au métal, par exemple en l'échauffant, on augmente l'énergie cinétique moyenne de toutes ses particules (électrons et ions). Les électrons de conduction, peu massifs, acquièrent dans ces conditions des vitesses considérables, parfois suffisantes



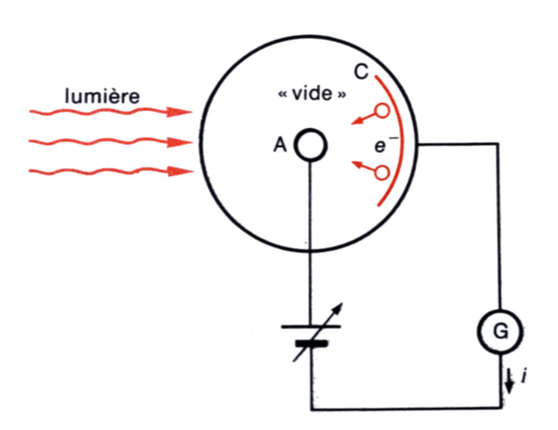
1. Représentation graphique approximative des variations de l'énergie d'un électron de conduction en fonction de sa distance d à la surface du métal, mesurée à partir d'un point arbitraire intérieur. L'énergie potentielle E_i, à l'intérieur, a été choisie conventionnellement nulle. L'énergie E_e de l'électron à l'extérieur est plus grande : la différence $E_e - E_i$ correspond à l'énergie d'extraction de l'électron.

Métal	Énergie d'extraction (eV)
Cs	1,9
K	2,3
Na	2,4
Ba	2,5
Zn	3,3
Cu	4,3
Ag	4,6
Pt	6,5

2. Énergie d'extraction des électrons de quelques métaux. Ces valeurs peuvent être déduites de mesures faisant intervenir l'effet thermoélectrique (c'est-à-dire l'émission d'électrons par les métaux chauffés).



3. Schéma de l'expérience de Hertz.



4. Schéma de principe d'une cellule photo-électrique. Le métal C, convenablement éclairé, émet des électrons captés par l'électrode positive (A).

pour que ceux qui sont proches de la surface quittent le métal. Ce dernier devient alors positif et rappelle vers lui les électrons, qui se trouvent ainsi « encagés » dans le métal par une **barrière de potentiel.** En ce sens, les électrons doivent être considérés comme **liés** au métal, à l'intérieur duquel ils sont **libres.**

- Seuls, les électrons qui reçoivent une énergie suffisante peuvent franchir la barrière de potentiel. La figure 1 schématise cette situation. L'énergie minimale qu'il faut fournir, **en moyenne,** à un électron de conduction voisin de la surface, pour qu'il sorte du métal sans y revenir, est appelée **énergie d'extraction** de l'électron.
Le tableau (figure 2) donne en eV les valeurs de l'énergie d'extraction pour certains métaux, classés de haut en bas par électropositivité décroissante.

- L'expérience de Heinrich Hertz, réalisée en 1887, a mis en évidence **l'effet photo-électrique.** Nous allons la décrire puis nous l'interpréterons à partir de ces quelques connaissances sur la structure des métaux

2. Expérience de Heinrich Hertz (1887).

a) Dispositif (figure 3).

Une lame de zinc, fraîchement décapée à la toile émeri, est posée sur un électroscope. Elle peut être éclairée par un arc électrique nu ou par une lampe à vapeur de mercure encore plus riche en rayonnements ultra-violets (fréquences de l'ordre de 10^{16} Hz).

b) Expériences.

- Chargeons négativement l'électroscope et éclairons le zinc : l'électroscope se décharge rapidement.
- Recommençons en interposant, dès que la décharge commence, une lame épaisse de verre (qui absorbe les radiations ultra-violettes) : la décharge s'arrête aussitôt, bien que le zinc soit toujours éclairé ; elle reprend dès que l'on ôte le verre.
- Chargeons positivement l'électroscope et éclairons : la décharge ne se produit plus.

c) Interprétation.

Les radiations lumineuses ont pour effet d'extraire certains électrons de conduction du métal (cela est confirmé par les mesures de la charge et

de la charge massique des particules émises, que l'on trouve bien égales à celles de l'électron). Un électroscope positif rappelle vers lui les électrons émis : on observe alors qu'il ne se décharge pas ; négatif, il les repousse : l'électroscope se décharge.
La nécessité d'utiliser des radiations ultra-violettes (dans le cas du zinc) mérite d'être approfondie ; nous le ferons plus loin. Pour l'instant, nous retenons que, **convenablement éclairé, un métal émet des électrons.**

d) Applications.

• **Cellules photo-électriques.** Une cellule photo-électrique est une ampoule transparente, vidée d'air, dans laquelle la lumière passe à travers une électrode annulaire A et illumine l'électrode photoémissive C (figure 4). Un générateur maintient entre A et C une tension réglable $U_{AC} = V_A - V_C$, positive en fonctionnement normal. Un micro-ampèremètre G mesure l'intensité d'un courant lorsque la cellule est éclairée. Ce courant est dû à la circulation des électrons émis par l'électrode éclairée : on l'appelle le courant photo-électrique. Ce type de cellule peut servir à commander des relais (escaliers roulants, portes, compteurs...), à lire les pistes sonores de certains films, à analyser l'image optique fournie par certaines caméras de télévision, etc... Les « cellules photo-électriques » des appareils photographiques fonctionnent le plus souvent selon un autre principe, sans générateur auxiliaire.

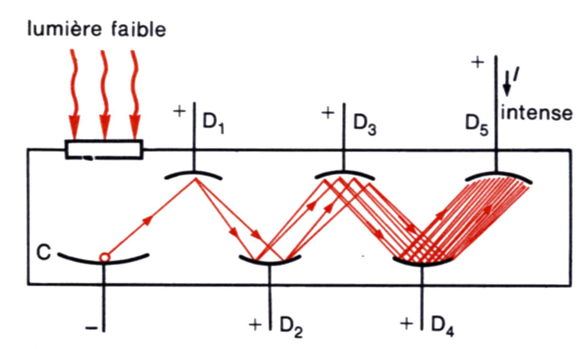
• **Cellules à gaz.** En mettant dans l'ampoule un gaz « inerte » (pour ne pas oxyder le métal) et en accélérant les électrons émis par C, on provoque l'ionisation par chocs du gaz introduit. Dans l'ampoule, des électrons nouveaux s'ajoutent aux précédents, et les ions positifs créés progressent en sens inverse. Cela **amplifie** l'intensité du courant photo-électrique.

• **Photomultiplicateurs.** Une autre méthode d'amplification du courant photo-électrique consiste à disposer une suite d'électrodes positives, qui émettent plusieurs électrons lorsqu'elles sont frappées par un seul (figure 5). Un photomultiplicateur détecte ainsi des flux lumineux extrêmement faibles.

• **Photorésistors.** Une cellule photoconductrice (ou photorésistor) est un dipôle constitué de deux fils conducteurs séparés, noyés dans une substance sensible à la lumière (sélénium, sulfure de cadmium...). La résistance du dipôle décroît lorsqu'il est éclairé, par suite de phénomènes assimilables à un effet photo-électrique interne : le nombre de porteurs de charge augmente.



5a. Photomultiplicateurs.



5b. Principe d'un photomultiplicateur. Un électron émis par C vient frapper une dynode (D_1), faite d'un métal dont l'énergie d'extraction des électrons est petite. Le choc de l'électron provoque l'émission de 3 ou 4, et jusqu'à 10 électrons secondaires. Le phénomène se reproduit sur chacune des autres dynodes (D_2), (D_3) ... (D_N) qui sont de plus en plus positives par rapport à C. La dernière dynode capte plusieurs millions de fois plus d'électrons qu'il n'y en a eu d'émis par C.

3. Insuffisance du modèle ondulatoire.

Dans le modèle ondulatoire, l'énergie transportée est supposée **uniformément répartie** sur les surfaces d'ondes. On peut s'attendre à ce qu'une onde qui transporte beaucoup d'énergie provoque un effet photo-électrique important. Il n'en va pas toujours ainsi.

a) Seuil photo-électrique.

• On peut éclairer une cellule photo-électrique par des faisceaux lumineux plus ou moins intenses et de couleurs, donc de fréquences, variées. Dans le cas du zinc, par exemple, on constate que l'émission d'électrons n'a lieu que si la fréquence de la lumière est **supérieure** à $\nu_0 \approx 8{,}1 \cdot 10^{14}$ Hz ; (domaine de l'ultra-violet). ν_0 est appelée **fréquence seuil** pour le zinc.

• Chaque métal possède une fréquence seuil **caractéristique.** Le tableau ci-dessous en indique quelques valeurs.

Métal	Fréquences seuils ν_0 (en 10^{14} Hz)	Longueurs d'onde Correspondantes dans le vide (en m)
Cs	4,6	$6{,}5 \cdot 10^{-7}$
K	5,6	$5{,}4 \cdot 10^{-7}$
Na	5,8	$5{,}6 \cdot 10^{-7}$
Ba	6,0	$5{,}8 \cdot 10^{-7}$
Zn	8,1	$7{,}8 \cdot 10^{-7}$
Cu	10,3	$9{,}9 \cdot 10^{-7}$
Ag	11,1	$1{,}06 \cdot 10^{-6}$
Pt	15,8	$1{,}51 \cdot 10^{-6}$

• Lorsqu'un métal est éclairé par une lumière de fréquence inférieure à son seuil ν_0, on constate que l'émission photo-électrique n'a pas lieu, même si la lumière est très intense. **Aussi puissante soit-elle, une lumière de fréquence insuffisante $\nu < \nu_0$ ne provoque pas l'émission photo-électrique du métal.** On comprend mal qu'une onde qui transporte beaucoup d'énergie par unité de temps ne réussisse pas à extraire les électrons.

Limites approximatives des fréquences visibles :

$4 \cdot 10^{14}$ **Hz** $< \nu <$ $8 \cdot 10^{14}$ **Hz**
(rouge) (violet)

b) Instantanéité de l'émission.

• Une cellule photo-électrique fonctionne **dès qu'elle est éclairée.** On a établi que, s'il existe un retard entre la réception des ondes et l'émission des photoélectrons, il est inférieur à 1 ns (10^{-9} s).

On peut, moyennant quelques hypothèses raisonnables, montrer que l'instantanéité de l'émission est incompatible avec l'hypothèse d'une répartition uniforme de l'énergie lumineuse sur une surface d'onde. Ce paragraphe est surtout destiné à vous familiariser avec des ordres de grandeur.

— **Données :** Une source lumineuse de puissance 100 W éclaire une cellule située à 3 m de distance. L'aire de l'électrode, en sodium, vaut 5 cm^2. On observe un courant photo-électrique d'intensité 50 pA ($5 \cdot 10^{-11}$ A).
— *Électrons débités :* Chaque cm^2 d'électrode émet un flot d'électrons équivalant à 10^{-11} A. A chaque seconde, le nombre n_1 d'électrons émis est donc tel que $n_1 e \triangleq 10^{-11}$ C, d'où $n_1 = \frac{10^{-11}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \quad 10^8$. Ainsi, 1 cm^2 de sodium émet environ 10^8 électrons par seconde.

— *Évaluation de la puissance lumineuse utilisée :* Supposons que l'énergie émise par la source pendant une durée très brève se trouve **uniformément** répartie sur des sphères centrées sur la source. L'aire d'une sphère de 3 m de rayon vaut $4\,\pi R^2 = 113$ m$^2 \simeq 100$ m$^2 = 10^6$ cm^2. L'éclairement de l'électrode correspond donc à une puissance lumineuse de $\frac{100 \text{ W}}{10^6 \text{ cm}^2} = 10^{-4}$ W par cm^2.
La cellule réfléchit une partie de l'énergie qu'elle reçoit. Toutes les radiations émises par la lampe ne contribuent pas à la photo-émission (en particulier les infra-rouges ou, plus généralement, toutes les radiations de fréquences inférieures à $5,8 \cdot 10^{14}$ Hz, seuil du sodium). L'énergie utilisée par 1 cm^2 d'électrode est certainement très inférieure à 1 % de ce que nous venons de calculer, c'est-à-dire qu'elle vaut moins de 10^{-6} joule par seconde pour 1 cm^2 d'électrode.
En somme, à chaque seconde, 1 cm^2 d'électrode reçoit moins de 10^{-6} joule utile pour émettre environ 10^8 électrons.

Nombre d'atomes de sodium impliqués. Une mole d'atomes de sodium (23 g), de masse volumique 970 kg/m^3, occupe un volume

$$V = \frac{23 \cdot 10^{-3}}{970} \approx 2,37 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \sim 20 \text{ cm}^3.$$

Il y a donc $\frac{6 \cdot 10^{23}}{20} = 3 \cdot 10^{22}$ atomes dans un cube d'arête 1 cm, soit $\sqrt[3]{3 \cdot 10^{22}} \approx 3 \cdot 10^7$ atomes le long d'une arête, ou encore $(3 \cdot 10^7)^2 \approx 10^{15}$ atomes par cm^2 d'électrode.
En admettant qu'une dizaine d'épaisseurs atomiques jouent un rôle dans l'émission, cela fait intervenir 10^{16} atomes qui se partagent les 10^{-6} J/s supposés uniformément répartis. En moyenne, et à chaque seconde, cela donne 10^{-22} joule à chacun.

Émission instantanée ? D'après le tableau 2 (page 428), il faut 2,4 eV pour extraire un électron du sodium, c'est-à-dire environ $4 \cdot 10^{-19}$ J. Au taux de 10^{-22} J/s, le temps mis pour recevoir cette énergie d'extraction serait de $\frac{4 \cdot 10^{-19}}{10^{-22}} = 4\,000$ s : **plus d'une heure !** Ce résultat, même s'il n'a été établi qu'en utilisant des ordres de grandeur, est incompatible avec l'expérience.

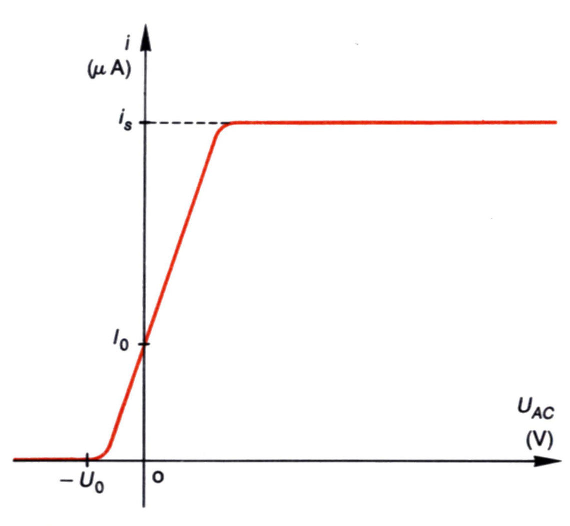
$1 \text{ eV} \simeq 1,6 \cdot 10^{-19}$ J

c) L'hypothèse d'Einstein.

Albert Einstein a levé la difficulté en supposant que l'énergie est **localisée par paquets** en certains endroits des surfaces d'onde. Chacun de ces paquets a été appelé **photon :** l'émission photo-électrique se produit lorsqu'**un** photon interagit avec **un** atome et lui arrache **un** électron (ou peut-être plusieurs).
Dès lors, on comprend mieux que les électrons puissent ne pas être extraits par des photons de trop faible énergie, même s'ils sont en grand nombre. On interprète ainsi l'existence du **seuil** photo-électrique.
D'autre part, un seul photon d'énergie suffisante peut arracher un électron s'il arrive au bon endroit...
On cite parfois l'analogie suivante : une multitude de gouttes de rosée ne réussit pas à faire tomber le fruit d'un arbre, alors qu'un seul grêlon bien placé peut suffire...

Remarque.

Les photons sont des discontinuités (on dit aussi des **quanta**) de l'énergie transportée par les ondes. L'introduction de cette discontinuité, en 1905, a fait suite à celles que l'on admet pour la matière (atomes...) ou pour les charges électriques (la charge élémentaire est un **quantum** d'électricité). La mécanique qui s'intéresse aux phénomènes à une échelle si petite qu'il faut tenir compte de ces discontinuités, est appelée **mécanique quantique.**
Vous obtiendrez plus loin, dans ce chapitre, des compléments d'information sur les photons.



6. Caractéristique tension-intensité d'une cellule photo-électrique vide d'air. Le « potentiel d'arrêt » U_0 est de l'ordre du volt. L'intensité i_s du courant de saturation est proportionnelle à la puissance lumineuse reçue par la cellule.

4. Caractéristiques tension-intensité d'une cellule.

Voici maintenant un peu plus de détails sur le fonctionnement des cellules photo-électriques, que l'hypothèse des photons nous aide à comprendre.

a) Relevé d'une caractéristique.

On éclaire la cellule avec une **source lumineuse monochromatique de fréquence suffisante** ($\nu > \nu_0$). On mesure l'intensité débitée pour diverses tensions $U_{AC} = V_A - V_C$ appliquées aux électrodes A et C (revoir la figure 4, page 428). L'allure des courbes obtenues est indiquée à la figure 6.

b) Interprétation.

Opérons par valeurs décroissantes de la tension.

- Tant que la tension U_{AC} positive reste élevée, tous les électrons émis par l'électrode C sont captés par l'autre électrode A. Si l'on ne modifie pas la puissance de la source lumineuse (c'est-à-dire le nombre de photons émis à chaque seconde), l'intensité reste constante quelle que soit la tension U_{AC} ; on dit que la cellule est à **saturation.**
Si l'on double la puissance de la source lumineuse monochromatique, c'est-à-dire le flux de photons, on extrait deux fois plus d'électrons. Plus généralement, **l'intensité du courant de saturation d'une cellule est sensiblement proportionnelle au flux lumineux qu'elle reçoit.** Cette propriété permet de comparer les énergies transportées par différents faisceaux lumineux (**photométrie**).

- Lorsque la tension devient insuffisante pour que tous les électrons émis soient captés, l'intensité diminue. Quand la tension U_{AC} devient nulle, on observe encore un courant I_0 de faible intensité. **Les photons communiquent donc aux électrons une certaine vitesse initiale** qui permet à certains d'atteindre l'électrode A (figure 4).

- Pour des tensions U_{AC} de plus en plus négatives, A repousse de plus en plus les électrons. L'intensité continue à décroître et devient nulle pour une certaine valeur $U_{AC} = -U_0$. La tension U_0 est appelé **potentiel d'arrêt,** ou **contre-tension.** U_0, **de l'ordre du volt,** est la tension juste suffisante pour que l'énergie cinétique des électrons émis par le métal soit contrebalancée par l'énergie potentielle due à cette tension. Au vu de l'ordre de grandeur de U_0, il n'y a pas lieu d'utiliser les formules relativistes :

$$eU_0 = \frac{1}{2} mV^2 - 0 .$$

II. Les photons.

Nous allons maintenant mieux faire connaissance avec le photon ; nous étudierons d'abord comment varie le potentiel d'arrêt de diverses cellules éclairées par différentes lumières monochromatiques.

1. Mesures de Millikan.

a) Variations du potentiel d'arrêt avec la fréquence de la lumière.

En éclairant des cellules à électrodes de potassium ou de zinc par diverses sources monochromatiques, Robert A. Millikan (1868-1953) a obtenu les résultats indiqués à la figure 7. On constate que :

— **Lorsque la fréquence ν de la lumière est supérieure à la fréquence-seuil ν_0 caractéristique du métal, le potentiel d'arrêt est une fonction affine de ν.**

— Le coefficient directeur des droites qui traduisent ces variations est **le même pour tous les métaux éclairés.** La figure 7 ne montre ce résultat que pour deux métaux, mais il est général.

Cela se résume par la relation $U_0 = k(\nu - \nu_0)$. La valeur de k, déterminée graphiquement, est d'environ $4{,}15 \cdot 10^{-15}$ V/Hz (ou V . s).

U_0

1

0,5

(K)

(Zn)

5,6 6 7 8 8,1 9 10 ν (10^{14} Hz)

7. Variations du potentiel d'arrêt avec la fréquence de la source lumineuse. Quel que soit le métal utilisé, on obtient des droites parallèles dont le coefficient directeur est $k \approx 4{,}15 \cdot 10^{-15}$ V/Hz.

b) Constante de Planck.

• Nous pouvons maintenant calculer l'énergie cinétique des électrons émis, en fonction de la fréquence de la lumière :

$$\frac{1}{2} mV^2 = eU_0 = ek(\nu - \nu_0) .$$

• Le produit ek, indépendant lui aussi de la matière bombardée, est une **constante universelle.** Sa valeur est

$$4{,}15 \cdot 10^{-15} \times 1{,}6 \cdot 10^{-19} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-34} \text{ unité S.I.}$$

Cette constante, appelée **constante de Planck,** est traditionnellement désignée par la lettre h. En 1978, on admettait qu'on la connaissait avec une précision suffisante pour écrire $h = 6{,}626\,176 \cdot 10^{-34}$ unité S.I. (vérifiez que cette unité est aussi le joule . seconde : J . s).

Le plus souvent, on pourra utiliser la valeur approchée :

$$\boxed{h \approx 6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ S.I.}} .$$

c) **Énergie d'un photon.**

- L'énergie cinétique d'un électron est donc donnée par

$$\frac{1}{2} mV^2 = h(\nu - \nu_0).$$

- Dans le cas du sodium, $h\nu_0$ vaut

$$6{,}63 \, . \, 10^{-34} \text{ (J . s)} \times 5{,}8 \, . \, 10^{14} \text{ (Hz)} \simeq 3{,}84 \, . \, 10^{-19} \text{ J soit } 2{,}4 \text{ eV},$$

qui est la valeur indiquée dans le tableau 2 (page 428) pour l'**énergie d'extraction de l'électron.**

- En regroupant d'un même côté les grandeurs relatives à l'électron, il vient :

$$h\nu_0 + \frac{1}{2} mV^2 = h\nu.$$

— Le premier membre représente l'énergie d'extraction ($h\nu_0$) augmentée de l'énergie cinétique de l'électron, c'est-à-dire toute l'énergie qu'il a reçue.
— Le second membre peut être alors interprété, conformément aux vues d'Einstein, comme **l'énergie E du photon extracteur transporté par la lumière de fréquence ν,** cédée ensuite à l'électron pour qu'il parte.

$$\boxed{E = h\nu}.$$

- **Ordres de grandeur.** L'énergie d'un photon de lumière rouge ($\nu \simeq 4 \, . \, 10^{14}$ Hz) vaut

$$E \simeq 6{,}63 \, . \, 10^{-34} \times 4 \, . \, 10^{14} \simeq 2{,}6 \, . \, 10^{-19} \text{ J soit } 1{,}7 \text{ eV}.$$

Cette énergie est insuffisante pour extraire les électrons du sodium, ce qui demanderait 2,4 eV. Un photon de lumière violette possède une énergie pratiquement double du précédent ; c'est ce qui le distingue du « photon rouge ».
Un laser de puissance 0,1 mW émet à chaque seconde un nombre N_1 de photons tel que $N_1 h\nu = 10^{-4}$ J/s soit, pour une lumière de fréquence $5 \, . \, 10^{14}$ Hz, environ $3 \, . \, 10^{14}$ photons par seconde.
Dans l'exemple numérique analysé plus haut (page 431), 1 cm^2 d'électrode recevait moins de 10^{-6} J/s $\simeq 6{,}25 \, . \, 10^{12}$ eV/s, c'est-à-dire approximativement 10^{12} photons par seconde, pour émettre 10^8 électrons par seconde. Tous les photons ne sont pas efficaces (ils peuvent « frapper » la matière ailleurs que sur un électron de conduction), mais **le pourcentage des photons utiles est sensiblement constant.**

Constante de Planck :

$h \approx$ **6,63 . 10^{-34} S.I.**

Limites approximatives de l'énergie d'un photon de lumière visible :

1,7 eV à 3,4 eV

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 10^{-34}\ \text{S.I.}$$

2. Les photons, corpuscules relativistes.

a) Comportement corpusculaire d'un photon.

• Un **photon,** c'est-à-dire un paquet d'énergie **localisé,** susceptible d'arracher un électron à la matière, possède un comportement tout à fait analogue à celui d'une particule qui viendrait choquer l'électron. En ce sens, il peut être assimilé à un **corpuscule,** d'énergie totale $E = h\nu$.

• Cette relation s'écrit souvent en faisant intervenir la pulsation $\omega = 2\pi\nu$ de l'onde : $E = \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi\nu = \hbar\omega$. La constante $\frac{h}{2\pi} = \hbar$ (lire : « h barré ») vaut sensiblement $\hbar \approx 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ J . s ou 10^{-34} J/s. Remarquons que l'énergie du **corpuscule** photon fait intervenir une variable **ondulatoire** (ν ou ω).

b) Les photons, corpuscules de masse nulle.

• Les photons, corpuscules lumineux, se déplacent dans le vide à une **vitesse rigoureusement égale à la vitesse limite c ≈ 3 . 10⁸ m/s.** Il s'agit donc de particules ultra-relativistes dont l'énergie est $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{0}$. Cette énergie ne peut prendre une valeur non infinie que si **la masse du photon est nulle. Le photon n'est donc pas un corpuscule matériel.**

• On ne peut cependant pas dire que l'énergie au repos d'un photon est nulle. En effet, aucun observateur matériel ne peut atteindre la vitesse c qui lui permettrait d'observer, dans son repère propre, le photon immobile (page 387), et la vitesse d'un photon est toujours égale à c, quel que soit le mouvement de l'observateur qui s'y intéresse. **La notion d'énergie au repos d'un photon n'a donc aucune signification.** De même, on ne parle pas d'énergie cinétique du photon, mais de son énergie totale ou même de son énergie tout court.

c) Les photons transportent de l'énergie et de la quantité de mouvement.

• L'énergie d'un photon de lumière de fréquence ν est $E = h\nu$. Considéré comme un corpuscule relativiste de masse nulle, son énergie $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ s'écrit $E = \sqrt{p^2c^2 + 0} = pc$:

$$\boxed{E = pc = h\nu = \hbar\omega}\ .$$

• La valeur de la quantité de mouvement d'un photon s'écrit

$$p = h\,\frac{\nu}{c}$$

ou, en faisant intervenir la **longueur d'onde dans le vide,** $\lambda = \frac{c}{\nu}$:

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda}}\,.$$

• Pour redonner à la quantité de mouvement son caractère **vectoriel,** il est d'usage de faire intervenir le **vecteur d'onde $\vec{k}$,** défini de la façon suivante :
— son sens est celui de la propagation du photon ;
— sa valeur est

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\,\pi\nu}{c} = \frac{2\,\pi}{\lambda}$$

d'où

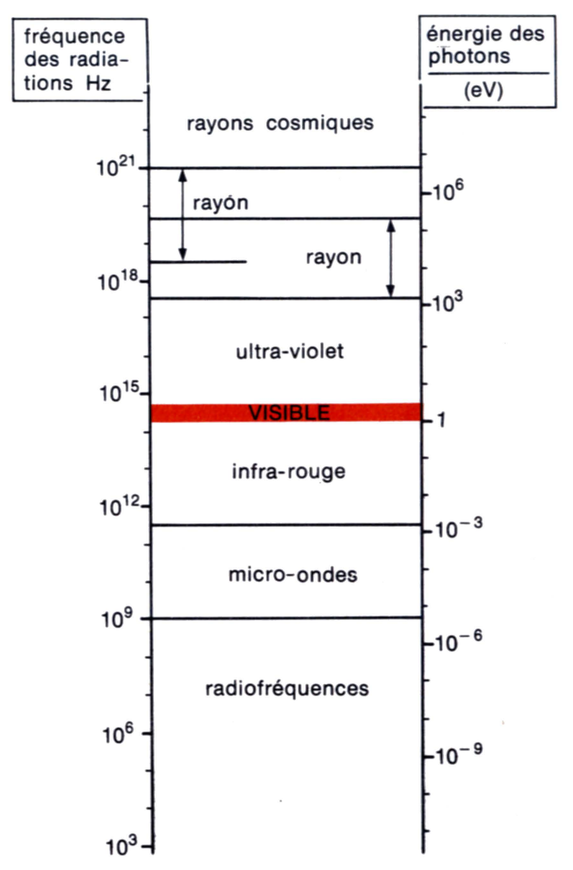
$$\boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k}}\,.$$

3. Effet Compton.

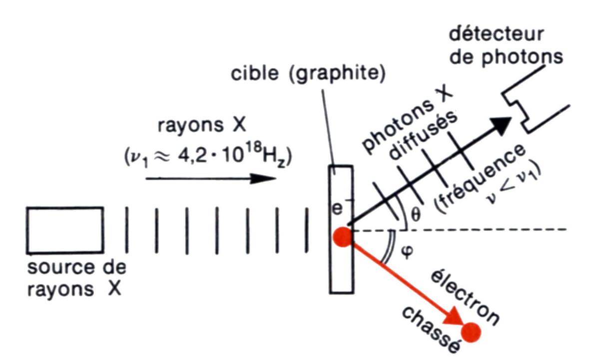
a) Photons associés aux radiations électromagnétiques.

• Nous nous sommes jusqu'ici surtout intéressés aux photons de lumière visible. Il existe aussi des « photons ultra-violets », ceux qui par exemple extraient les électrons du platine : leur énergie doit être supérieure à 6,5 eV d'après le tableau 2 (page 428). Plus généralement, **le concept de photon s'étend à toute la gamme de radiations électromagnétiques.** Le tableau 8 rappelle les ordres de grandeur des fréquences électromagnétiques et indique les énergies des photons correspondants.

• Les photons X ($\nu \sim 10^{18}$ Hz) ont une énergie de l'ordre de 10 keV. Vis-à-vis d'elle, l'énergie d'extraction des électrons (quelques eV) est négligeable, ainsi que l'énergie d'agitation thermique, encore plus faible. Les électrons des atomes soumis à ces rayonnements peuvent donc être considérés comme **libres** et **immobiles.** (Dans le cas de l'effet **photo-électrique** on pouvait aussi les supposer immobiles, mais ils **étaient liés au métal** par une barrière de potentiel non négligeable.)



8. Ordres de grandeur des fréquences du spectre électromagnétique, et énergie des photons associés.



9. Schéma du dispositif de Compton pour étudier la fréquence des photons diffusés par une cible.

b) Expériences de Compton.

• Le physicien Arthur Holly Compton (1892-1962) a étudié en 1922 l'action de rayons X de fréquence élevée ($4{,}2 \cdot 10^{18}$ Hz) sur des cibles de graphite. Il a observé les phénomènes suivants :
— A la sortie de la cible, **les rayons X sont diffusés dans toutes les directions.** Même si l'écart angulaire θ (figure 9), varie de 0° à 360°, le détecteur reçoit toujours des photons.
— Les rayons X diffusés contiennent **deux types de fréquences :** l'une est égale à la fréquence ν_1 des rayons X incidents (le rayonnement diffusé correspondant n'est pas représenté sur la figure 10) ; l'autre, ν, **dépend de l'angle θ de diffusion,** et est **inférieure à ν_1.** En réalité, Compton ne mesurait pas la fréquence des radiations X diffusées, mais leurs longueurs d'ondes $\lambda = \frac{c}{\nu}$. Il a obtenu la **relation empirique** suivante :

$$\lambda_\theta = \lambda_1 + 2{,}42 \cdot 10^{-12}(1 - \cos\theta)$$

où λ_θ désigne la longueur d'onde des radiations X modifiées et diffusées dans la direction définie par θ.
— Des électrons sont éjectés de la cible. En 1925, Compton a mesuré la quantité de mouvement et l'énergie de ces électrons.

c) Interprétation.

• Ces phénomènes s'interprètent en considérant les photons comme des particules. L'existence de radiations diffusées de même fréquence que les rayons X incidents résulte de **chocs élastiques des photons X sur les atomes bombardés** (l'exercice n° 28 nous montrera en quoi les électrons libres ne peuvent ici être impliqués). C'est seulement la direction de la quantité de mouvement du photon qui est modifiée, mais pas sa valeur.

• Les radiations diffusées de fréquence inférieure à la fréquence incidente s'interprètent par un don d'une partie de l'énergie des photons **aux électrons libres** de la cible.
La conservation de l'énergie relativiste totale se traduit par

$$\underset{\text{(photon)}}{h\nu_1} + \underset{\text{(électron)}}{E_0} = h\nu + \underset{\text{(électron)}}{E} = h\nu + \underbrace{E_0 + E_c}_{\text{(électron)}}$$

d'où

$$\underset{\text{(électron)}}{E_c} = h\nu_1 - h\nu .$$

Les mesures réalisées en chambre de Wilson ont confirmé ces résultats.

● **Exercice résolu.** Un photon d'énergie $h\nu$ vient choquer un électron libre immobile. Trouver, par application des lois générales de conservation de la mécanique relativiste, l'énergie du photon diffusé dans la direction faisant l'écart angulaire θ avec la direction initiale (figure 10).

● Réservons les indices 1 pour le photon avant choc, et les lettres primées pour l'électron.

— La loi de conservation de l'énergie totale donne (sans oublier l'énergie au repos E_0 de l'électron cible) :

$$h\nu_1 + E_0 = h\nu + E', \text{ d'où } E' = (h\nu_1 - h\nu) + E_0 . \qquad (1)$$

— D'après la loi de conservation de la quantité de mouvement,

$$\vec{p}_1 = \vec{p} + \vec{p}\,' . \qquad (2)$$

● Comme nous nous intéressons à ce qui arrive au photon, nous allons éliminer les grandeurs relatives à l'électron en calculant $E'^2 - p'^2 c^2 = E_0'^2$.

D'après (1) : $\quad E'^2 = (h\nu_1 - h\nu)^2 + E'^2 + 2\,E'\,(h\nu_1 - h\nu)$. $\qquad$ (1')

D'après (2) : $\quad (\vec{p}\,'c)^2 = (\vec{p}_1 c - \vec{p}c)^2 = (\vec{p}_1 c)^2 + (pc)^2 - 2\,\vec{p}_1 . \vec{p} . c^2$. $\qquad$ (2')

● Développons (1'). Dans (2'), introduisons $h\nu = E = pc$; en tenant compte de ce que le produit scalaire $\vec{p}_1 . \vec{p}$ vaut $p_1 . p \cos\theta$, il vient :

$$E'^2 = (h\nu_1)^2 + (h\nu)^2 - 2\,h\nu_1 . h\nu + E'^2 + 2\,E'(h\nu_1 - h\nu) \qquad (1'')$$

$$p'^2 c^2 = (h\nu_1)^2 + (h\nu)^2 - 2\,h\nu_1 . h\nu . \cos\theta . \qquad (2'')$$

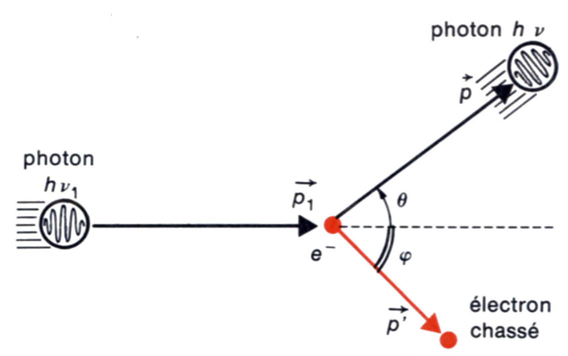
D'où $E'^2 - p'^2 c^2 = E'^2 = 2\,h\nu_1 . h\nu\,(\cos\theta - 1) + E'^2 + 2\,E'(h\nu_1 - h\nu)$.

Finalement $\quad E_0(h\nu_1 - h\nu) = h\nu_1 . h\nu\,(1 - \cos\theta)$.

ou $\dfrac{1}{h\nu} - \dfrac{1}{h\nu_1} = \dfrac{1}{E_0}(1 - \cos\theta)$ qui est la relation demandée.

● Cette relation présente quelques analogies formelles avec la formule empirique de Compton. On peut y remplacer ν par $\dfrac{c}{\lambda}$: $\lambda - \lambda_1 = \dfrac{hc}{E_0}(1 - \cos\theta)$.

$\dfrac{hc}{E_0} = \dfrac{hc}{m_e c^2} = \dfrac{h}{m_e c}$ est homogène à une **longueur d'onde.** On l'appelle **longueur d'onde Compton de l'électron.** Sa valeur numérique est $\lambda_c \approx \dfrac{6{,}63 . 10^{-34}}{9{,}1 . 10^{-31} \times 3 . 10^8} \approx 2{,}43 . 10^{-12}$ m (des valeurs plus précises donnent $\lambda_c \approx 2{,}436\,3 . 10^{-12}$ m). L'accord avec le résultat de Compton est excellent.



10. Interprétation corpusculaire de l'effet Compton.

● Le calcul précédent n'est pas au programme, et vous pouvez vous contenter d'en admettre le résultat. Rappelons que le photon y a été considéré comme un **corpuscule** d'énergie E et de quantité de mouvement $\vec{p}$ ($E = h\nu$ et $\vec{p} = \hbar\vec{k}$). Le brillant accord avec les résultats expérimentaux **confirme la validité de cette hypothèse.**

III. Conciliation des points de vue ondulatoire et corpusculaire.

1. Ondes ou corpuscules ?

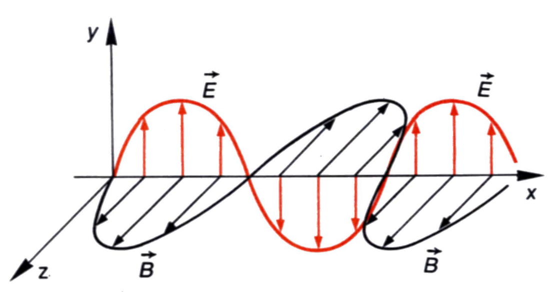
• Nous disposons maintenant de deux modèles pour décrire les radiations électromagnétiques :

— Il s'agit d'**ondes progressives** de célérité c, de **pulsation** ω et de **vecteur d'onde** $\vec{k}$ $\left(\text{dont la valeur } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ indique le nombre de vibrations existant sur } \Delta x = 2\pi \text{ mètres}\right)$. La figure 11 illustre cette situation.
— Il s'agit de **corpuscules** de masse nulle et de célérité c (photons), chacun d'énergie $E = \hbar\omega$ et de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.
Nous remarquons tout de suite que **les deux points de vue ne sont pas indépendants,** car ω et k interviennent dans les deux cas.

Variables ondulatoires : ω et $\vec{k}$.
Variables corpusculaires : E et $\vec{p}$.
Liens entre les deux : $E = \hbar\omega$ et $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

• Le premier modèle interprète bien les **interactions lumière-lumière,** par exemple les interférences étudiées en classe de première. Même si cela nous étonne un peu, nous admettons volontiers que, sur une frange d'interférences noire, on puisse avoir : lumière + lumière → obscurité (si les deux vibrations arrivent en opposition de phase). En revanche, nous hésiterons à écrire : 1 photon + 1 photon → 0 photon, équation où l'énergie n'est pas conservée.
Nous venons de voir que le second modèle est bien adapté à la description **interactions lumière-matière.**

• Ces deux conceptions paraissent à priori contradictoires, probablement parce que nous avons tendance à nous représenter les particules élémentaires à l'image, réduite, de la matière macroscopique. Ainsi, nous considérons les corpuscules comme de petites sphères ; quant aux ondes, il est plus difficile de se les représenter (peut-être des vagues ?). En réalité, de telles représentations n'ont plus de sens à l'échelle élémentaire : il n'existe pas de modèle du photon qui soit calqué sur des objets familiers. Les deux modèles, l'un ondulatoire, l'autre corpusculaire sont **deux descriptions complémentaires.**



11. Rayonnement électromagnétique, considéré comme une onde de 2 champs électrique et magnétique progressifs vibrant en phase :
$\vec{E} = \vec{E}_{r_y} \cos(\omega t - kx)$
$\vec{B} = \vec{B}_{r_z} \cos(\omega t - kx)$.

2. Analyse d'expériences d'interférences.

Nous avons vu en classe de Première que la lumière permet de réaliser des expériences d'interférences et de diffraction. Nous avions interprété ces phénomènes comme résultant de la nature ondulatoire de la lumière. Analysons à présent ces expériences en faisant intervenir à la fois les points de vue ondulatoire et corpusculaire.

a) Diffraction de la lumière par une petite ouverture circulaire.

• **Expérience (figure 12a et b).**

Envoyons un fin pinceau de lumière monochromatique, émis par un laser, perpendiculairement à un écran lointain : on observe une petite tache très lumineuse. Interposons sur le trajet de la lumière une petite ouverture circulaire dont le diamètre, de l'ordre de 0,1 mm, est inférieur à celui du pinceau laser. On observe sur l'écran une **figure de diffraction,** plus large que la tache précédente, où alternent des zones circulaires brillantes et noires (figure 13).

• **Interprétation ondulatoire.**

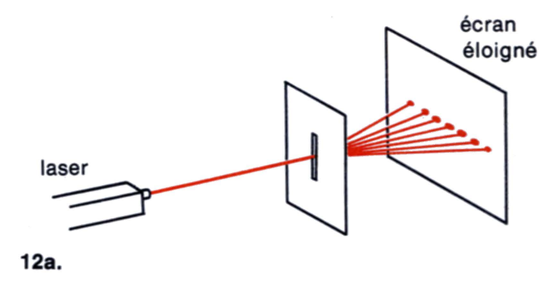
L'étude détaillée du phénomène de diffraction lumineuse montre qu'un trou circulaire de petit diamètre émet une onde issue du centre du trou, décrite par :

$$s = A_\theta \cos(\omega t - kx) .$$

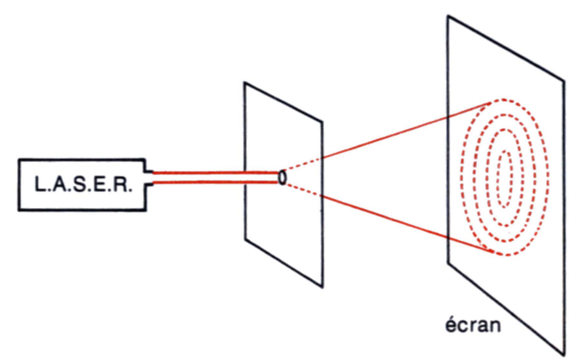
On démontre que l'amplitude A_θ dépend de la direction définie par l'angle θ et des dimensions de l'ouverture circulaire. On trouve, pour le faisceau lumineux légèrement étalé qui émerge du trou, qu'il existe des directions d'absence de lumière ($A_\theta = 0$) ou de luminosité relativement maximale, qui sont bien celles que l'on observe expérimentalement. **Le modèle ondulatoire interprète bien les phénomènes de diffraction.**

• **Interprétation corpusculaire.**

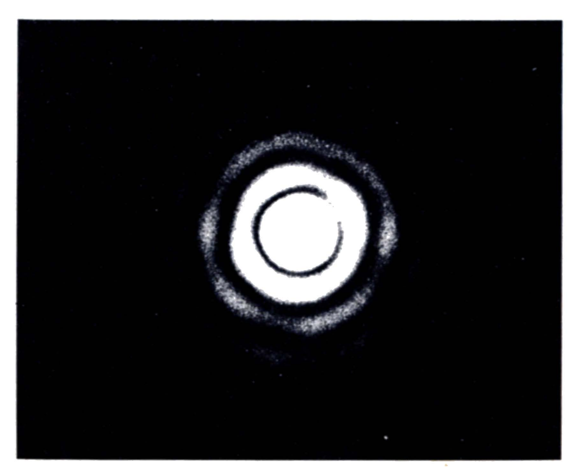
Les physiciens se sont contentés pendant longtemps de l'interprétation ondulatoire. Ils ont dû cependant s'assurer qu'elle ne présentait pas d'incompatibilité avec le modèle corpusculaire. Ils durent alors changer d'état d'esprit, et **constater** que dans certaines directions il est **très peu probable** de trouver des photons lorsqu'on les a obligés à passer par un petit trou (ou, comme on dit aussi, lorsqu'on leur a offert une faible « extension spatiale »). Moyennant cette intervention des probabilités, **le modèle corpusculaire interprète bien les phénomènes de diffraction.**



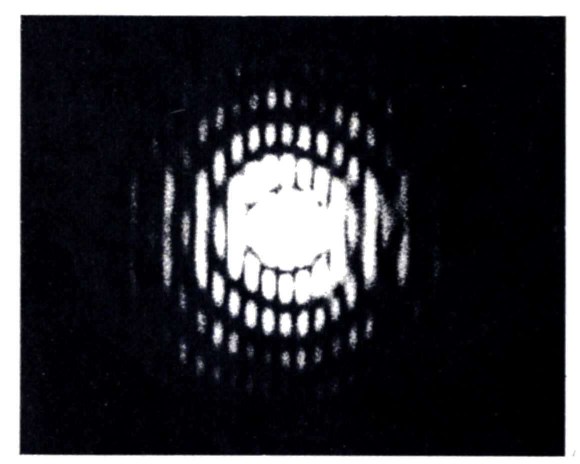
12a.



12b. Figure de diffraction sur l'écran.



a.



b.

13. Figure de diffraction obtenue avec une petite ouverture circulaire.

a) diffraction par un trou.

b) diffraction et interférences par deux trous.

b) Interférences obtenues à l'aide des « trous d'Young ».

• **Expérience.**
Juste à côté du trou précédent, perçons un autre trou de même dimension, et faisons passer simultanément la lumière à travers les deux trous. On observe **une** figure de diffraction circulaire identique à la précédente, à laquelle se superposent des **franges** rectilignes brillantes et sombres orthogonales à la droite qui joint les centres des deux trous (sur la figure 13b, ces franges sont verticales : les centres des deux trous étaient situés sur la même horizontale).

• **Interprétation ondulatoire.**
— Tout se passe, loin des sources, comme si chaque trou émettait une seule onde issue de son centre, d'amplitude A_θ variable avec la direction considérée. Le raisonnement de la figure 14 établit que ces deux ondes équivalent à une seule, qui serait issue du milieu des deux trous. Cela interprète l'existence d'une figure **unique** de diffraction, analogue à celle qui est fournie par un seul trou.
— Les deux ondes issues des centres des trous interfèrent de façon destructive dans des directions telles qu'elles atteignent l'écran lointain en opposition de phase. Cela introduit des zones supplémentaires d'extinction, qui forment les franges d'interférences superposées à la figure de diffraction du trou unique.

• **Point de vue corpusculaire.**
— L'existence de deux trous accroît les zones de **faible probabilité de présence** des photons, puisqu'on observe des franges d'interférences supplémentaires.
— On s'est demandé si les franges noires d'interférences pouvaient résulter d'interactions destructives entre les photons à leur arrivée sur l'écran. L'expérience suivante répond par la négative : en répétant l'expérience sur une plaque photographique exposée pendant plusieurs sance, on peut faire en sorte qu'il n'y ait jamais plus d'un seul photon entre la source et l'écran. Pourtant, si l'on enregistre le résultat de l'expérience sur une plaque photographique, exposée pendant plusieurs mois, on observe la figure d'interférences bien que les photons soient arrivés un par un sur l'écran.
— Comment les photons passent-ils à travers les ouvertures ? Si, comme nous serions tentés de le penser, ils passaient tantôt par un trou, tantôt par l'autre, nous devrions obtenir deux figures de diffraction (une par trou) mais pas d'interférences. Ce n'est pas le cas. Il reste une possibilité : chaque photon passe par les deux trous à la fois ! Mais cela ne signifie pas qu'il soit passé, par exemple, un quart de photon $\frac{h\nu}{4}$ d'un

côté et les trois quarts de l'autre : nous n'observons pas de lumières de fréquences $\frac{\nu}{4}$ ou $\frac{3\,\nu}{4}$. Le photon se présente ainsi comme un corpuscule indivisible qui peut passer par deux trous à la fois.

— En nous posant la question précédente, nous avons admis implicitement que l'on pouvait parler, comme pour une bille, de trajectoire pour le photon. En fait, **le concept de trajectoire perd sa signification** à l'échelle du photon, car aucune expérience ne permet de la déterminer. Dès que l'on tente de mettre expérimentalement en évidence le trou d'Young par lequel passe un photon, on perturbe le système au moins de ce qu'il faut pour **détruire la figure d'interférences** (par exemple, on n'obtient qu'une figure de diffraction si l'on bouche un des trous pour être sûr que les photons passent par l'autre).

• **Conclusion.**

Nous renoncerons donc à déterminer la trajectoire empruntée par un photon : cette question n'a plus de sens à petite échelle. Plus généralement, les physiciens ont renoncé à connaître dans leurs moindres détails l'évolution des corpuscules atomiques ou subatomiques. Ils se contentent d'**aspects probabilistes** globaux, qu'ils déduisent du comportement étrange et inhabituel des particules considérées isolément. L'ensemble des règles nouvelles élaborées pour ces calculs constitue la **mécanique quantique.** Nous en donnons un bref aperçu dans le paragraphe qui suit.

3. Notions sur les bases de la mécanique quantique.

La mécanique quantique présente au moins deux aspects étonnants :

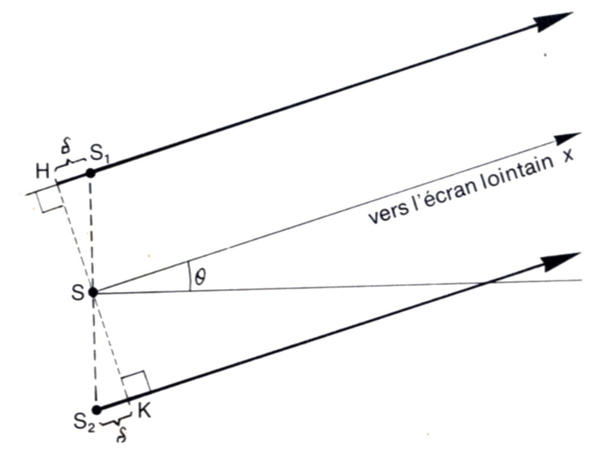
— Les calculs effectués à partir de grandeurs individuelles imparfaitement connues aboutissent à des résultats globaux en excellent accord avec les faits expérimentaux.

— Un petit nombre d'hypothèses de base permet de prévoir un grand nombre de phénomènes et d'en interpréter certains, classiquement inexplicables.

a) Rappels concernant l'onde électromagnétique plane.

• Une onde électromagnétique progressive, plane et monochromatique, est décrite par l'expression

$$s = a \cos(\omega t - kx)\,.$$



14. Les ondes émises par S_1 et S_2 dans la direction repérée par θ sur la figure, n'ont pas la même distance à parcourir pour atteindre le même point d'un écran très lointain. L'abscisse de ce point est $x - \delta$ pour S_1 et $x + \lambda$ pour S_2 ($\delta = \frac{d}{2} \sin\theta$ en désignant par d la distance des sources).
Les deux ondes progressives sont donc décrites par $s_1 = a \cos\,[\omega t - k(x - \delta)]$ et $s_2 = a \cos\,[\omega t - k(x + \delta)]$, où a désigne leur amplitude à leur arrivée sur l'écran. D'après la relation $\cos p + \cos q = ...$, ou en considérant s_1 et s_2 comme les parties réelles de $ae^{j\omega t}e^{-jk(x \mp \delta)}$, il vient $s = s_1 + s_2 = 2\,a \cos k\delta \,.\, \cos\,(\omega t - kx)$. s décrit une onde progressive unique, issue de S, dont l'amplitude $A = 2\,a \cos k\delta$ dépend de la direction SX envisagée.

De même que l'énergie mécanique d'un oscillateur est proportionnelle au carré de l'amplitude des vibrations (chapitre 13, page 247) l'énergie véhiculée par une onde est proportionnelle à a^2. C'est ainsi que l'on peut calculer l'intensité lumineuse I en un point d'un écran ($I = ka^2$).

• En toute rigueur, une telle onde n'a pas d'existence physique : sans début ni fin, il faudrait une énergie infinie pour la créer. Elle constitue cependant une bonne approximation d'un train d'ondes assez long. Du point de vue corpusculaire, un tel train d'onde est constitué par une multitude de photons.

b) Fonction d'onde associée à un photon.

• Un photon est associé à un train d'onde assez court, d'extension spatiale Δx suffisante pour contenir plusieurs vibrations de courte longueur d'onde (figure 15).
Pour faire intervenir les variables corpusculaires

$$E = \hbar\omega \text{ et } \vec{p} = \hbar\vec{k},$$

nous écrirons
$$\psi = \psi_0 \cos\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{\vec{p}}{\hbar}\vec{x}\right).$$

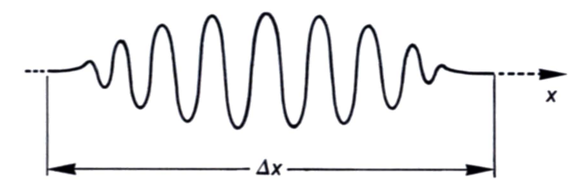
E et p représentent maintenant l'énergie et la quantité de mouvement **les plus probables** du photon envisagé isolément. L'amplitude ψ_0 ne doit plus être considérée comme constante : elle dépend en général de x et t. ψ est appelée **fonction d'onde.**

• Le caractère probabiliste intrinsèque de la mécanique quantique est encore valable si l'on décide que **le carré de l'amplitude ψ^2 indique la probabilité $\mathcal{P}$ de trouver le photon à la position d'abscisse x à la date t**

$$(\mathcal{P} = k\psi^2).$$

• Ainsi, tout en procédant d'un état d'esprit assez différent, les deux points de vue ne sont pas totalement étrangers ($I = ka^2$ et $\mathcal{P} = k\psi^2$). On conçoit qu'un grand nombre de photons puisse avoir un effet statistique équivalent à ceux qui sont décrits par

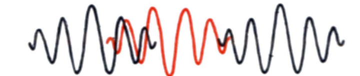
$$s = a\cos(\omega t - kx).$$



15. Représentation schématique d'un train d'ondes associé, à la date t à un photon.

4. Importance relative des aspects ondulatoires et corpusculaires.

• Il semble difficile d'offrir aux photons une extension spatiale inférieure à leur longueur d'onde associée, sous peine de ne pas bien définir cette dernière. Cela confère aux « photons radios », de grande longueur d'onde (~ 1 km), une extension spatiale plutôt importante. Comme le suggère la figure 16, les photons successifs se recouvrent et le schéma ne diffère pas beaucoup de celui d'une onde. **Aux faibles fréquences, l'aspect ondulatoire est prépondérant.** On constate d'ailleurs que le phénomène de diffraction apparaît facilement.



16. Des photons de faible fréquence, de grande extension spatiale, équivalent à une onde.

• A l'opposé, des photons de haute fréquence auront une extension spatiale plutôt faible, et les paquets d'énergie seront mieux localisés (figure 17). La fréquence est bien trop élevée pour que la matière, trop inerte, puisse entrer en résonance : le caractère ondulatoire ne sera pas décelé. Mais, les photons très énergétiques seront facilement détectés.

17. Des photons très énergiques sont bien localisés ; ils équivalent à des corpuscules.

En résumé : En passant des ondes hertziennes aux rayons γ, l'aspect ondulatoire s'atténue au fur et à mesure que l'aspect corpusculaire s'affirme.

IV. Conclusion.

Les rayonnements électromagnétiques se présentent sous deux **aspects complémentaires.** Il n'y a pas lieu de distinguer le corpuscule photon de l'onde qui lui est associée : tous deux représentent un seul et même être physique.
Comme l'a écrit Louis de Broglie, l'un des fondateurs de la mécanique quantique : « Nous apercevons le service fondamental que la lumière nous a rendu en nous révélant la dualité des ondes et des corpuscules : elle a éclairé nos intelligences comme elle éclaire nos corps. »

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

• L' ______ photo-électrique consiste en une ______ par la matière lorsqu'elle est bombardée par des ______ d'énergie suffisante.

• Pour une cellule ______ :

— l'intensité du courant de ______ est proportionnelle au nombre de ______ reçus à chaque ______ par l'électrode photo-émissive ;

— le potentiel d' ______ augmente avec l'énergie des ______ incidents (si la fréquence est supérieure à la ______) ;

— la fréquence-seuil est ______ du métal bombardé.

• L'énergie et la quantité de mouvement de photons associés à une ______ électromagnétique de ______ ν, de ______ ω, de ______ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, sont données par $E =$ ______ $=$ ______ et $p =$ ______. Dans ces expressions, h et $\hbar$ désignent les constantes de Planck.

• L'effet ______ confirme le caractère ______ du photon.

• Les phénomènes de ______ et d' ______ sont susceptibles de deux interprétations complémentaires : les zones d'absence de lumière résultent d' ______ destructives entre les vibrations issues de sources, ou sont considérées comme des endroits où la ______ de présence des ______ est faible. Cette probabilité de ______ est proportionnelle au ______ de l' ______ de l' ______ associée au photon.

• Aucune expérience ne permet de préciser la ______ d'un photon.

Petites questions.

1. Les photons sont-ils colorés ?

2. Les mesures de Millikan et de Compton évoquées dans ce chapitre peuvent-elles passer pour deux méthodes différentes, indépendantes, de mesure de la constante de Planck ?

3. Une cellule photo-électrique fonctionne quand elle est éclairée par de la lumière monochromatique violette, mais pas avec de la lumière monochromatique bleue. Fonctionne-t-elle en lumière blanche ? en lumière verte ? en recevant un mélange bleu et rouge qui donne à l'œil une impression de violet ?

4. En approchant votre main d'une plaque chauffée au rouge, vous ressentez une impression de chaud due en particulier au rayonnement infra-rouge. Préférez-vous donner de ce phénomène une interprétation ondulatoire ou corpusculaire ?

5. Vous avez rencontré dans le cours des questions sans réponse. Peut-on répondre aux questions suivantes :
— Qu'y a-t-il à côté de l'Univers ?
— Pourquoi deux charges de signes contraires s'attirent-elles ?

6. Lors de l'expérience de Compton, les électrons-cibles sont-ils relativistes après le choc par un photon ?

7. A l'échelle du photon, peut-on considérer que les bords des fentes diffractantes sont rectilignes ?

8. La tache centrale de diffraction par un trou éclairé en lumière blanche est-elle totalement ou partiellement blanche ? Précisez.

9. Deux trous de Young peuvent-ils simultanément laisser passer chacune une moitié de photon ?

10. Observerait-on des phénomènes de diffraction et d'interférences en utilisant des trous de Young de diamètre différent ?

11. Peut-on dire que la trajectoire d'un photon est un rayon lumineux ?

12. En quoi la photographie d'ouverture (page 426) vous paraît-elle liée au contenu de ce chapitre ?

Applications immédiates.

13. Établir une relation numérique donnant une valeur approchée de la longueur d'onde d'un photon (exprimée en μm) en fonction de son énergie (exprimée en eV).

Réponse : $\lambda \, . \, E \approx 1$.

14. Une cellule photo-électrique au césium (fréquence-seuil : $4,6 \, . \, 10^{14}$ Hz) reçoit une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,5$ μm.
Calculez l'énergie cinétique des électrons émis et le potentiel d'arrêt.

Réponses : $9,3 \, . \, 10^{-20}$ J ou 0,58 eV. 0,58 V.

15. Avec des radiations de diverses longueurs d'onde, on éclaire une cellule photo-électrique et on mesure les potentiels d'arrêt U_0. Les résultats sont donnés par le tableau ci-contre.

$U_{0(V)}$	$\lambda_{(Å)}$
1,5	3 500
1,1	4 000
0,76	4 500
0,48	5 000
0,27	5 500
0,06	6 000

a) Tracez la courbe représentant les variations du potentiel d'arrêt en fonction de la fréquence.

b) Déterminez graphiquement la valeur de la fréquence-seuil.

c) Calculez, à partir de mesures graphiques, la valeur de la constante de Planck.

d) Identifiez le métal bombardé.

16. Donnez l'allure de la courbe représentant les variations, en fonction de la fréquence associée aux photons, de l'énergie cinétique des électrons émis par bombardement d'une cellule de fréquence-seuil ν_0. Interprétez l'ordonnée à l'origine de cette courbe.

17. La « longueur d'onde Compton » associée à l'électron vaut $\lambda_c = \dfrac{h}{m_e c}$. (voir définition à l'exercice résolu page 439). La comparez à la longueur d'onde associée à un photon dont l'énergie est égale à l'énergie au repos de l'électron. Dans quelle gamme de radiations ce photon est-il situé ?

18. Calculez votre propre longueur d'onde Compton.

Réponse : $4 \, . \, 10^{-44}$ m environ (cela dépend de votre masse).

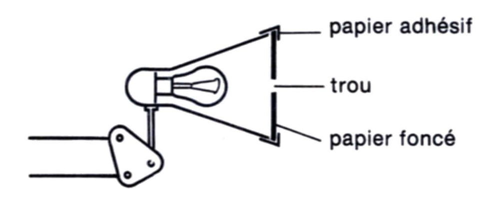
19. Un photon de longueur d'onde 71,4 pm (on rappelle que 1 pm = 10^{-12} m) subit une diffusion Compton. Sa longueur d'onde devient 72,2 pm. Déterminez l'énergie cinétique et la vitesse de l'électron expulsé.

Réponse : 0,19 eV ; $2,6 \, . \, 10^5$ m/s.

Exercices expérimentaux.

20. Entre deux doigts que vous rapprocherez progressivement jusqu'à ne plus former qu'une fente très fine, observez d'un seul œil une source lumineuse aussi lointaine que possible : étoile brillante, lampe d'éclairage public, tube fluorescent ou à filament rectiligne... (dans ce cas, il faudra que la fente réalisée par vos doigts soit parallèle au tube).
Cherchez à quelle distance de l'œil il faut placer la main pour observer au mieux la figure de diffraction.

21 a). A l'aide d'une pointe de compas, percez un trou dans une feuille de papier de couleur foncée (papier carbone par exemple). Placez ce trou devant le filament d'une lampe à incandescence assez puissante (la figure ci-dessous indique un dispositif possible utilisant une lampe de bureau avec abat-jour ; son avantage est qu'en travaillant le soir, la pièce est peu éclairée). Si vous avez bien disposé le trou, vous observerez, en vous plaçant convenablement à 2 ou 3 m de la lampe, une source quasi ponctuelle très brillante.



b) Avec une pointe d'épingle, percez dans une feuille de papier ordinaire un, puis deux trous fins distants de moins de 1 mm. Placez le papier contre votre œil, et regardez votre source ponctuelle.
Observez les cercles de diffraction à travers le trou, et les franges rectilignes d'interférences à travers les deux trous.

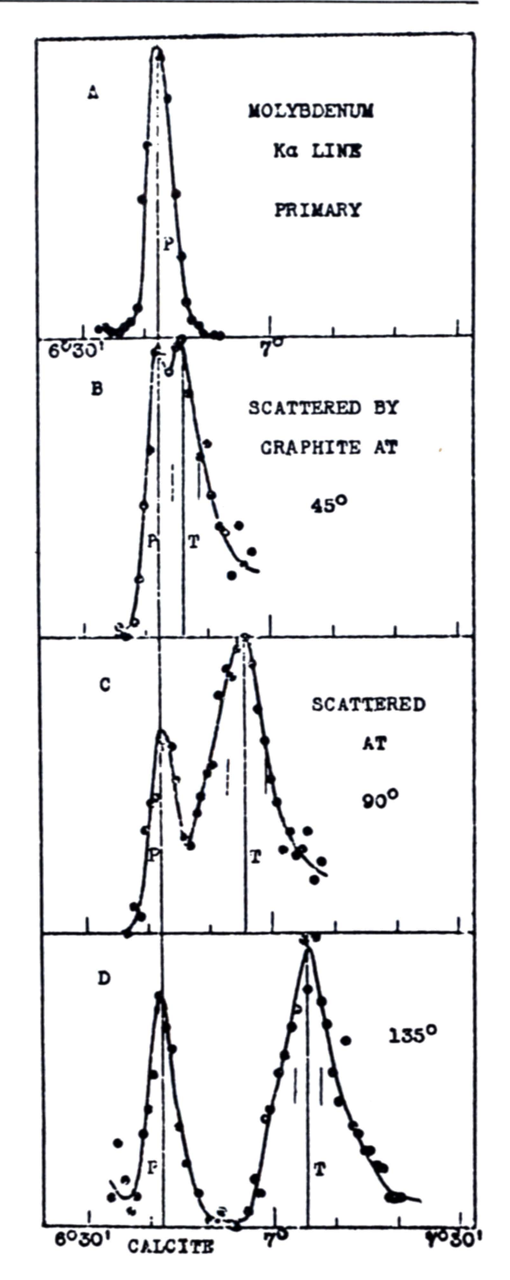
c) Dans la feuille de papier, tracez à la lame de rasoir une fente fine de 2 à 3 cm de long. Regardez votre source à travers cette fente. En tirant légèrement sur les bords de la feuille, vous verrez le déplacement des taches de diffraction. Interpréter.

d) Tracez de même, à la règle, deux fentes fines parallèles et aussi proches que possible, l'une étant plus longue que l'autre pour que votre œil puisse passer rapidement d'une fente simple à une double. Vous verrez ainsi (peut-être !) apparaître une ou deux franges d'interférences dans la région centrale (cela est plus difficile).

Exploitation de documents.

22. Les figures ci-contre sont extraites d'un article de Compton paru en 1923.
La figure A représente l'intensité du rayonnement incident, obtenu en bombardant du molybdène par des électrons rapides.
Ce rayonnement, appelé K_α, a pour longueur d'onde 0,71 Å. Scattered signifie « diffusé ».
Les directions d'observation des diffusions sont indiquées sur les figures. Les abscisses sont proportionnelles aux longueurs d'onde.
D'après la relation de Compton $\lambda_1 = \lambda + 2{,}43 \,.\, 10^{-12}\ (1 - \cos\theta)$, calculez l'abscisse du second pic sur la figure D. En déduire :
— une graduation en longueurs d'onde pour l'axe des abscisses ;
— les positions que l'on peut prévoir pour les diffusions à 90° et 45° ; comparez ces résultats aux données des figures B et C.

Courbes extraites de la « Physical Review » (22.409 ; 1923). Les pics de gauche correspondent à des rayonnements diffusés de même longueur d'onde que le rayonnement incident. Les pics de droite sont relatifs à la diffusion Compton.



Approfondissement.

23. Calculez les valeurs des constantes de Planck h et $\hbar$ en MeV . s.

24. Établir la relation numérique entre l'énergie d'extraction W d'un électron (exprimée en eV) et la fréquence-seuil ν_0 (exprimée en 10^{14} Hz).

Réponse : $W \simeq 0{,}41\ \nu_0$.

25. Un milliampèremètre permet de mesurer l'intensité i du courant d'une cellule photoélectrique éclairée par une lumière de fréquence N.
Comment varie qualitativement l'intensité i_s du courant de la cellule :
— lorsqu'on augmente ou diminue le flux lumineux reçu par la cellule, N restant constant ?
— lorsqu'on diminue de plus en plus la fréquence de la lumière utilisée ?
Justifiez les réponses.
Quelle relation numérique y a-t-il entre la fréquence N et la longueur d'onde λ dans le vide d'une radiation lumineuse ? Calculez une valeur approchée de N pour $\lambda = 0{,}40\ \mu$m.
[Baccalauréat expérimental ; juin 1979].

26. Une boule de matière plastique a une masse $m = 1\ \mu$g. Elle se déplace dans le vide à une vitesse $v = 10$ cm/s selon un axe Ox. Cette boule absorbe pendant un intervalle de temps très court un éclair lumineux. La quantité d'énergie absorbée est $E = 6 . 10^{-3}$ joule. La direction de la lumière est perpendiculaire à l'axe Ox.
Quel angle α fait la nouvelle direction de la vitesse de la boule par rapport à la direction initiale ?
On donne : $c = 3 . 10^8$ m/s. On rappelle que la quantité de mouvement d'un photon d'énergie E est $p = \dfrac{E}{c}$.
N.B. On donnera l'expression littérale de tg . α, puis on fera l'application numérique.
[Baccalauréat expérimental ; 1978].

27. Pour des radiations de longueur d'onde 5 500 Å, l'œil humain commence à déceler l'existence de lumière lorsqu'une section de 1 cm² de faisceau lumineux transporte 5 photons par seconde. Évaluez l'aire de la pupille de l'œil et calculer, en eV, l'énergie qui y pénètre dans ces conditions limites, à chaque seconde.

28. Aucune expérience n'a encore montré que des photons pouvaient être absorbés par des électrons. Supposons qu'un électron au repos soit choqué par un photon de fréquence ν et l'absorbe. Calculez l'énergie relativiste totale de l'électron :

a) en la déduisant de la loi de conservation de l'énergie totale ;

b) en la déduisant de la loi de conservation de la quantité de mouvement.
Ces deux résultats sont-ils compatibles ? Conclusion ?

29. Il arrive que les atomes absorbent certains photons. L'atome formé se trouve alors dans un état « excité », et sa masse est supérieure à la masse initiale. En utilisant les lois de conservation de la mécanique relativiste, calculez la masse de l'atome excité en fonction de sa masse initiale et de l'énergie du photon absorbé.
Comparez à l'exercice précédent.
Conclusion ?

Réponses : $M = m\sqrt{1 + \dfrac{2\,h\nu}{mc^2}}$. Il n'existe pas d'électron dans un état excité.

30. Il a été signalé dans le cours que les radiations qui, lors d'une diffusion Compton, gardaient la même fréquence que les rayonnements initiaux, ne pouvaient résulter d'un choc élastique du photon sur un électron libre.
Montrez que cette circonstance serait en contradiction avec les lois de conservation.
Montrez qualitativement que ce choc est concevable s'il a lieu sur un atome massif lié aux autres atomes.

31. Les radiations de longueur d'onde λ_1 modifiées par effet Compton, dans la direction angulaire repérée par θ (figure 9, page 438), sont données en fonction de la longueur d'onde initiale λ par

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Exprimer la variation relative de longueur d'onde $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}$ en fonction de l'énergie du photon incident, de l'énergie au repos E_0 de l'électron, et de θ

Réponse : $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{h\nu}{mc^2}(1 - \cos\theta)$.

32 a). e désignant la charge élémentaire et $\dfrac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}$ la constante de Coulomb, montrer que $\dfrac{e^2}{4\,\pi\varepsilon_0}$ peut s'exprimer en kg . m³/s².

b) La constante $\alpha = \dfrac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{\hbar c}$ est-elle affectée d'une unité ?
Calculer les valeurs numériques de α et $\dfrac{1}{\alpha}$.

c) Dans l'atome d'hydrogène, c'est à la distance $r_0 \simeq 0{,}53$ Å du noyau que l'on a le plus plus de chances de trouver l'électron, à un instant donné. Calculer le rapport $\dfrac{r_0}{\lambda\!\!\!^{-}_c}$, où $\lambda\!\!\!^{-}_c = \dfrac{\hbar}{m_e\,c}$ désigne la « longueur d'onde Compton » réduite de l'électron. Comparer ce rapport à $\dfrac{1}{\alpha}$.

d) Lorsque l'électron se trouve à la distance r du noyau, son énergie potentielle (supposée nulle lorsqu'il est très loin du noyau) s'exprime par $E_p = -\dfrac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r}$. Établir l'expression qui donne, en fonction de α et de l'énergie au repos de l'électron, l'énergie potentielle lorsque l'atome d'hydrogène est dans sa configuration le plus probable.

33 Trous noirs.

1) Montrez que la constante de gravitation $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *u* S.I. peut s'exprimer en $m^3/kg \cdot s^2$. En quelle unité s'exprime la constante $K = \frac{GM}{c^2}$ relative à un astre de masse M ? Calculez la valeur numérique de K pour la Terre ($M = 6 \cdot 10^{24}$ kg) et le Soleil ($M = 2 \cdot 10^{30}$ kg).

2) A la distance r du centre d'un astre de rayon R et de masse M, et loin de tout autre astre, l'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet de masse m est donnée par

$$E_p = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

a) Pour quelle position de l'objet a-t-il été décidé que l'énergie potentielle serait nulle ?

b) Calculez, en fonction de K, de E_0 (énergie au repos de l'objet de masse m) et R, l'énergie potentielle d'un objet situé très loin de l'astre.

c) Exprimez cette énergie en fraction de l'énergie au repos de l'objet ; calculez cette fraction dans le cas de la Terre (rayon 6 400 km) et du Soleil (rayon $7 \cdot 10^8$ m). Le résultat dépend-t-il de la masse m de l'objet ?

d) Quelle énergie cinétique initiale, exprimée en fraction de l'énergie au repos, faut-il communiquer à un objet pour qu'il quitte la Terre ? le Soleil ? Exprimez la vitesse correspondante en fonction de c (cette vitesse est la « vitesse de libération »).

3) A partir de l'astre, on lance « verticalement vers le haut » un objet avec une énergie cinétique initiale E_c supérieure à l'énergie cinétique de libération.

a) Calculez, en fonction de K et R, la variation relative $\frac{\Delta E_c}{E_c}$ d'énergie cinétique de l'objet lorsqu'il a échappé à l'attraction de l'astre.

b) La variation relative d'énergie précédente est indépendante de la masse de l'objet lancé. On peut supposer que la relation précédente est valable aussi pour l'énergie des photons (ce qui a été confirmé expérimentalement). En déduire la variation relative $\frac{\Delta \nu}{\nu}$ de fréquence d'un photon quittant un astre et s'en éloignant définitivement. Cette variation relative de fréquence, due à la gravitation, correspond-t-elle à un déplacement de la raie spectrale vers le rouge ou vers le violet ? La calculer dans le cas de la Terre et du Soleil.

4) Dans les calculs précédents, on a supposé que les vitesses mises en jeu sont toujours nettement inférieures à c. Ce n'est pas toujours le cas (quand l'astre est très massif et de faible rayon). Un calcul plus élaboré montre qu'il faut remplacer, dans la formule précédente,

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} \text{ par } \frac{1}{2}\,\frac{\nu^2 - \nu_0^2}{\nu^2}$$

(où ν_0 désigne la fréquence initiale).

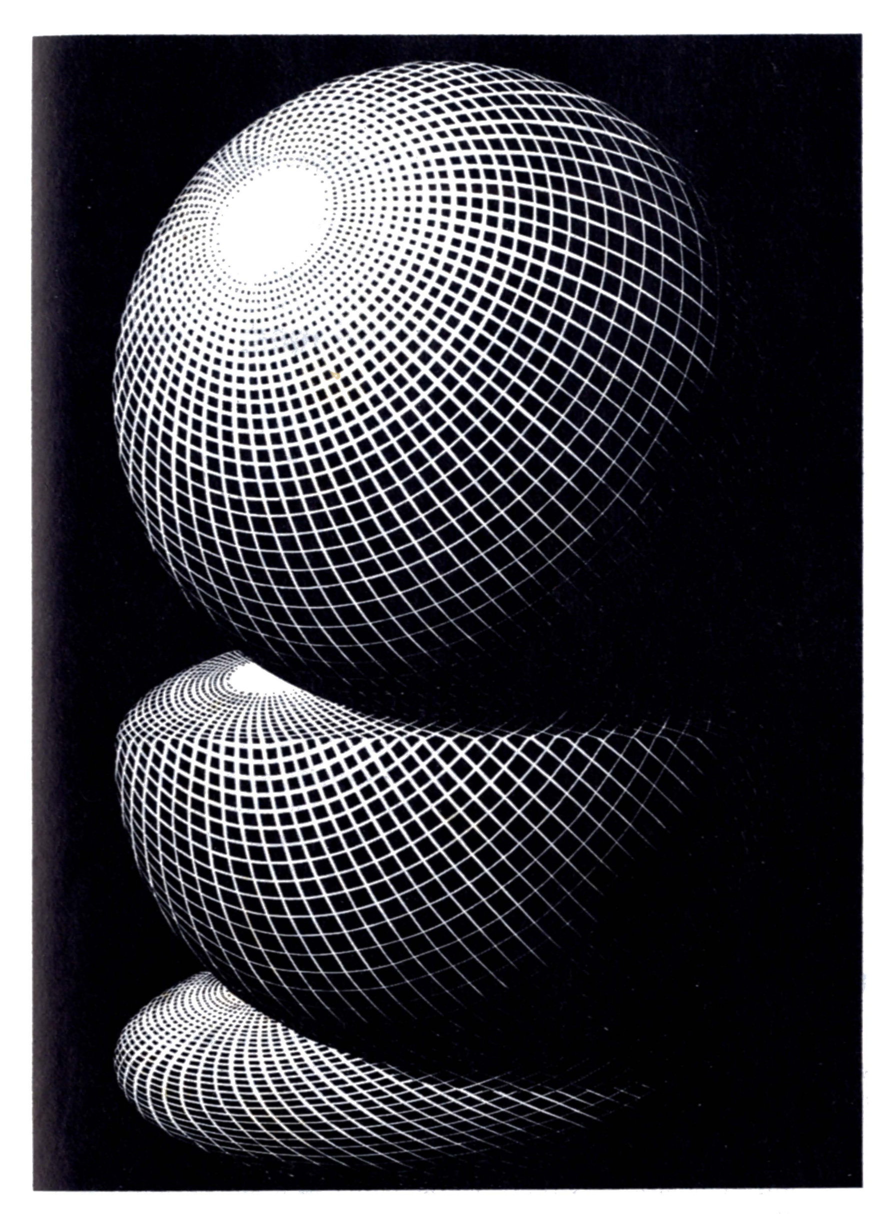
a) Montrez que ces deux expressions sont équivalentes lorsque $\nu \simeq \nu_0$.

b) Établir l'expression donnant la fréquence ν très loin de l'astre, en fonction de la fréquence ν_0 de départ, de K et de R.

c) Montrez que l'expression précédente impose au rayon de l'astre d'être supérieur à une certaine valeur, que l'on calculera en fonction de G, M et c.

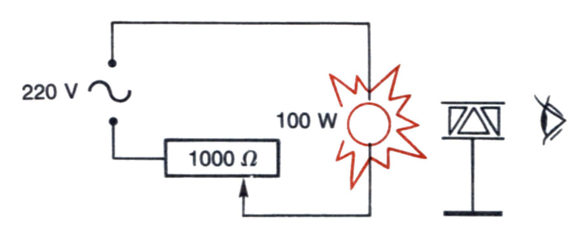
d) Lorsque le rayon de l'astre est inférieur à la valeur précédemment calculée, on dit qu'il s'agit d'un **trou noir,** que les photons ne réussissent même pas à quitter. Justifiez cette appellation.

e) Calculez les rayons maximaux des trous noirs qui auraient la même masse que la Terre ou le Soleil. Quelles seraient leurs masses volumiques dans ces conditions ?

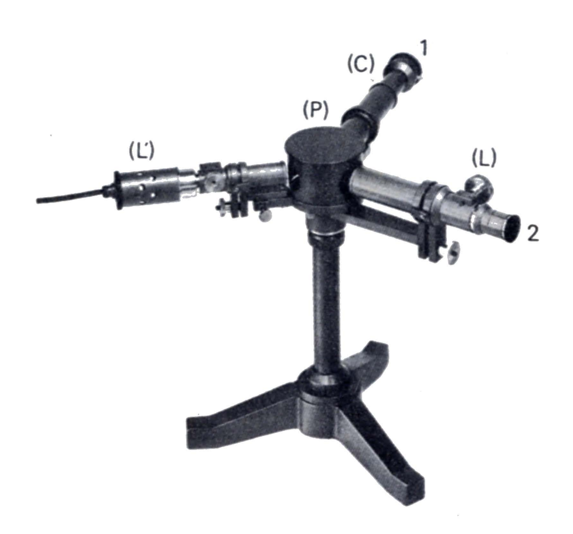


Aucun des dessins que l'on utilise pour représenter l'atome n'est vraiment satisfaisant. Pourquoi pas celui-ci, de M. C. ESCHER ?

23 Niveaux d'énergie dans un atome



1. En faisant croître l'intensité du courant dans la lampe, on voit à travers le prisme apparaître successivement toutes les couleurs de l'arc-en-ciel. Les prismes constituent un milieu dispersif pour la lumière, c'est-à-dire que la célérité des photons qui les traversent dépend de leurs fréquences. En utilisant une succession de prismes fabriqués dans des substances différentes, on peut s'arranger pour que la déviation moyenne des faisceaux lumineux soit nulle, bien que chaque prisme contribue à augmenter la dispersion.



2. Un spectroscope à prisme. Une fente fine est placée dans le plan focal d'une lentille convergente : tout se passe pour le prisme comme si la fente était « à l'infini ». Une lunette (L), réglée sur l'infini, permet d'observer les diverses images colorées de cette fente. (L') est un dispositif fournissant en surimpression des graduations équidistantes sur le spectre.

Le modèle ondulatoire et le modèle corpusculaire (ou quantique) se complètent de façon satisfaisante pour interpréter la discontinuité des émissions lumineuses observées dans les spectres. Cette étude a été abordée en classe de Première.
Nous allons la reprendre maintenant, en nous attachant surtout à l'aspect quantique des radiations.

I. Spectres atomiques.

Dans certaines conditions, les atomes émettent de la lumière lorsqu'ils reçoivent de l'énergie. Inversement, ils peuvent absorber les radiations lumineuses. Précisons ces phénomènes.

1. Spectres d'émission et spectres d'absorption.

a) Obtention d'un spectre continu.

• **Expérience.** Observons le filament d'une lampe à incandescence à travers un diaphragme puis des **prismes dispersifs,** en réglant l'intensité du courant dans la lampe par l'intermédiaire d'un rhéostat (figure 1).
— Pour une faible intensité du courant, le filament est chaud, mais non lumineux : il émet des **radiations infra-rouges** invisibles.
— Lorsque l'intensité augmente, des teintes jaunes, vertes, bleues... apparaissent successivement. On observe finalement toutes les couleurs de l'arc-en-ciel, dont le mélange donne à l'œil une impression de **lumière blanche.**

• L'expérience précédente est encore plus belle à observer à travers un **spectroscope** à fente fine (photo 2). Le principe de ces appareils, à **prismes** ou à **réseaux,** a été étudié en classe de Première. On assiste à la formation progressive d'un **spectre continu** où, du rouge au violet, toutes les radiations visibles sont présentes. En survoltant la lampe et en photographiant le spectre, on constate qu'il se prolonge dans l'**ultraviolet** auquel l'œil est insensible, contrairement aux émulsions photographiques.

• Le tableau de la figure 4 indique les longueurs d'ondes et les fréquences des radiations visibles ainsi que l'énergie des photons correspondants.

b) Spectres d'émission discontinus.

1) Réalisation des sources.

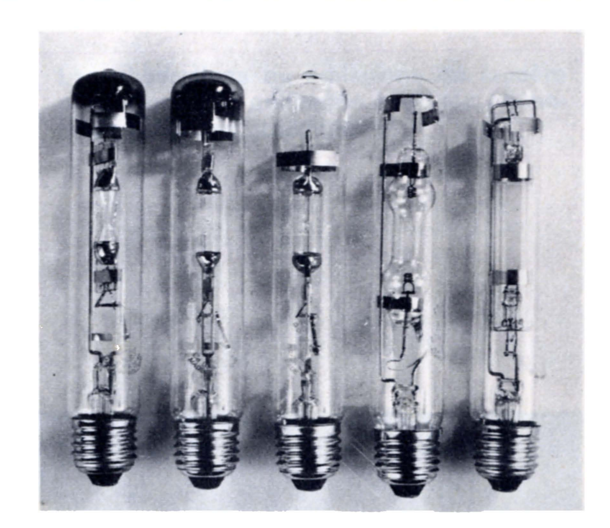
• **Un gaz** (ou une vapeur), enfermé sous pression réduite dans un tube, émet de la lumière lorsqu'il est excité :
— **par décharge électrique** entre électrodes placées aux extrémités du tube (« tubes de Geissler »). Les **lampes spectrales** (à mercure, à sodium...) dérivent de ce dispositif (photo ci-contre) ;
— **par un courant haute fréquence** parcourant un solénoïde entourant le tube ;
— **par bombardements d'électrons** ou d'ions accélérés au sein du gaz.

• **Pour les solides ou les liquides,** les modes d'excitation sont :
— **la flamme.** La substance étudiée est pulvérisée dans la flamme d'un brûleur (température de l'ordre de 3 000 °C) ;
— **l'arc électrique.** L'une des électrodes de l'arc est imbibée du liquide, ou du solide en poudre. La température atteint 6 000 °C ;
— **l'étincelle électrique.** Elle est obtenue à partir d'un arc électrique alimenté sous forte tension et à haute fréquence. Les électrodes sont imprégnées de la substance à étudier ; l'énergie des étincelles est répartie dans des volumes moindres que dans le cas de l'arc.

2) Caractères généraux des spectres observés.

• Lorsque l'une des sources précédentes est placée devant la fente d'un spectroscope, on obtient diverses images colorées de cette fente, appelées **raies spectrales.**
La figure de la page suivante reproduit les principales raies du sodium et du fer. Vous trouverez plus loin celles de l'hydrogène (page 457), du cadmium et du mercure (page 463).

• Voici quelques traits communs à tous les spectres :
— **La position des raies est caractéristique des atomes émetteurs.** Par exemple, le chlorure, le sulfate ou le nitrate de sodium donnent tous un même ensemble de raies. Il en résulte un moyen précieux d'**analyse spectrale** des éléments, utilisable par exemple pour déterminer la composition des étoiles.



3. Lampes spectrales.

Couleur	Longueur d'onde λ (*nm*)	Fréquence ν (10^{14} Hz)	Énergie du photon E (eV)
Infra-rouge	> 780	< 3,84	< 1,59
Rouge	622-780	3,84-4,82	1,59-1,99
Orange	597-622	4,82-5,03	1,99-2,08
Jaune	577-597	5,03-5,20	2,08-2,15
Vert	492-577	5,20-6,10	2,15-2,52
Bleu	455-492	6,10-6,59	2,52-2,72
Violet	390-455	6,59-7,69	2,72-3,18
Ultra-violet	< 390	> 7,69	> 3,18

4. Spectre visible. Les limites d'une couleur à la suivante ne sont pas strictes : elles varient légèrement d'un individu à l'autre. Les valeurs indiquées dans ce tableau valent pour l'œil moyen dit « œil normal ». Les longueurs d'ondes sont exprimées en nanomètres (1 nm = 10^{-9} m). Le maximum de sensibilité de l'œil est dans le vert. Newton avait introduit une septième couleur : l'indigo (7 est un chiffre biblique).

La sensation colorée perçue par l'œil résulte du mélange des diverses radiations, mais ce sont en général les raies les plus intenses qui imposent la couleur. Par exemple, la flamme du sodium paraît jaune ($\lambda \simeq 590$ nm) bien que son spectre contienne aussi des radiations moins intenses, vertes (569 nm) et violettes (420 et 415 nm).

— **La complexité du spectre augmente avec le nombre d'électrons dans les atomes émetteurs :** le spectre du fer contient plus de raies que celui du sodium.

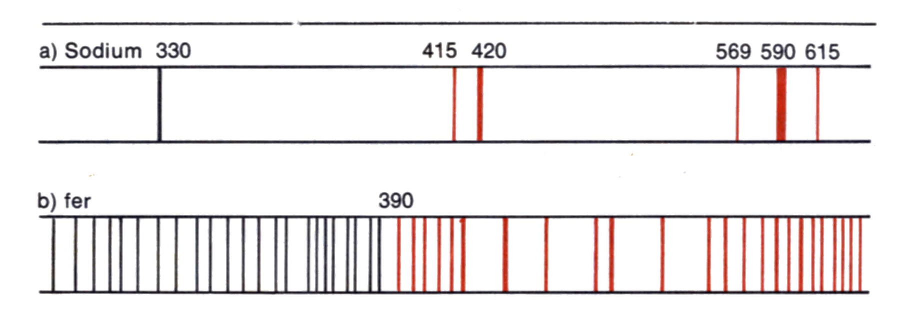
— **Le nombre de raies émises par un élément augmente avec l'énergie mise en jeu pour exciter les atomes.** Il en va souvent de même pour l'intensité des raies.

— En général, les raies se trouvent **de plus en plus serrées dans l'infra-rouge.**

— Chaque atome possède une fréquence caractéristique, située dans l'ultra-violet, au-delà de laquelle **son spectre devient continu** et de faible intensité.

c) Spectres d'absorption.

Éclairons la fente d'un spectroscope en lumière blanche. Interposons une flamme contenant du sodium sur le trajet de la lumière blanche : une raie noire apparaît dans le spectre, à 590 nm, c'est-à-dire précisément pour la longueur d'onde d'émission principale du sodium. On a constaté que ce phénomène est général : **les atomes sont susceptibles d'absorber les radiations qu'ils sont eux-mêmes capables d'émettre.**



Aspects partiels des spectres du sodium et du fer (spectre d'émission ou spectre d'absorption). Les raies marquées en rouge correspondent à la lumière visible. Le spectre du fer, qui contient de très nombreuses raies dont les longueurs d'onde ont été mesurées avec précision, est souvent utilisé pour étalonner les spectres par comparaison.
Ces spectres seraient à prolonger vers l'infra-rouge et vers l'ultra-violet.

2. Interprétation qualitative.

a) **Discontinuités dans les spectres.**

• **Interprétation ondulatoire.**

— Les molécules, les atomes, les ions, les électrons... possèdent certaines **fréquences naturelles** de vibration, caractéristiques de la matière dans laquelle ils se trouvent engagés. Celles des électrons, peu massifs, correspondent aux fréquences de la lumière visible ou des proches infra-rouge et ultra-violet.

— De même qu'une corde vibrante émet un son où plusieurs fréquences propres (fondamentale et harmoniques) se trouvent mêlées, les électrons d'un atome qui reçoit de l'énergie peuvent se mettre à vibrer à leurs diverses fréquences naturelles. Chacun joue le rôle d'une mini-antenne émettrice. Ainsi se trouvent interprétés les **spectres d'émission,** caractéristiques des substances : les fréquences des raies sont égales aux fréquences électroniques naturelles.

— Une corde vibrante entre en résonance et devient le siège d'**ondes stationnaires,** lorsque la fréquence excitatrice est égale à l'une de ses fréquences propres. De même, lorsqu'une vibration électromagnétique atteint la matière, son champ électrique met en vibration les électrons dont les fréquences naturelles sont en accord avec celle du champ ; l'énergie de ce champ est alors transférée aux électrons qui entrent en **résonance.** Si l'onde incidente est polychromatique, les seules énergies absorbées seront celles qui correspondent aux fréquences naturelles, d'où les **spectres d'absorption** de mêmes fréquences qu'en émission.

En résumé : les spectres d'absorption ou d'émission s'interprètent, comme les ondes stationnaires, par des phénomènes de résonance.

• **Interprétation quantique.**

Elle a été donnée par Niels Bohr : **l'énergie de l'ensemble des électrons d'un atome ne peut prendre qu'un certain nombre de valeurs discontinues.** On dit aussi que l'atome ne peut occuper que certains **niveaux d'énergie,** et non plus prendre n'importe quelle énergie comme en mécanique newtonienne : il apparaît donc aussi, pour l'atome, des quanta d'énergie. Par suite, l'atome ne peut absorber ou émettre que les photons dont l'énergie $h\nu$ le fait passer d'une énergie permise à une autre. Ce point de vue sera précisé dans la suite de ce chapitre.

• **Remarque :** soit un atome pouvant absorber 6 eV (par exemple). Cette énergie pourra lui être fournie :

— par des photons d'énergie 6 eV (**ni moins, ni plus**),

— par des électrons d'énergie supérieure ou égale à 6 eV (qui ne perdront alors que 6 eV).

Les absorptions ou émissions de lumière présentent des analogies avec les phénomènes d'ondes stationnaires.



5. Niels Henrik David Bohr (1885-1962), physicien danois. Ses travaux sur le spectre de l'hydrogène l'ont conduit à proposer un « modèle planétaire » pour l'atome (où les électrons tournaient autour du noyau) mais il n'enseignait déjà plus ce modèle à la fin de sa carrière. Il a participé très activement à l'élaboration de la Mécanique Quantique. Prix Nobel en 1922.

b) Spectres continus.

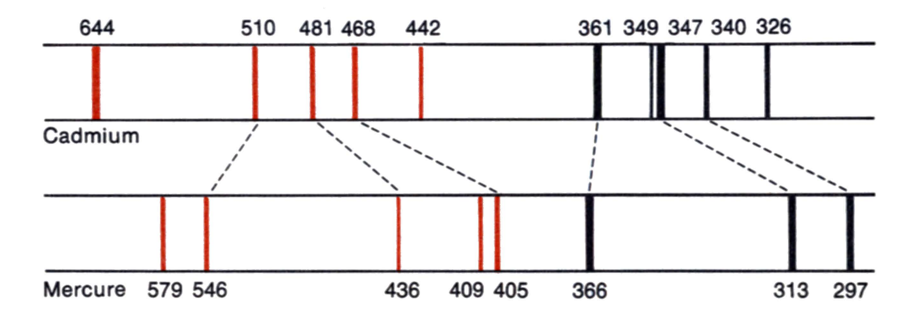
• Les atomes ne peuvent donc accroître leur énergie que par échelons, qui sont en général diversement espacés. Lorsqu'ils reçoivent plus d'énergie qu'il n'en faut pour qu'ils passent de leur niveau actuel à n'importe lequel des niveaux supérieurs autorisés, un électron (voire plusieurs) est arraché, emportant avec lui l'excédent d'énergie sous forme d'énergie cinétique ; l'atome est **ionisé.**

• Inversement, quand l'électron rejoint l'ion qu'il a quitté, il y a **émission d'énergie électromagnétique.** L'atome se retrouve à un niveau d'énergie permis, mais l'énergie initiale peut avoir n'importe quelle valeur pour l'électron hors de l'atome.
En d'autres termes, **les niveaux d'énergie de l'ensemble { ion + électron séparés} ne sont pas quantifiés.** On parle parfois du **continuum** des énergies permises à l'électron hors de l'atome. Au-delà de la limite d'ionisation, toutes les fréquences d'émission deviennent possibles et le spectre est continu.

• Ce qui précède interprète, du côté des hautes fréquences (ultraviolet), la limite des spectres à partir desquels ils sont continus, ainsi que les spectres d'émission continus des lampes à incandescence.

c) Relations entre le spectre et les propriétés chimiques.

• La figure 6 représente les spectres du cadmium et du mercure, qui sont deux éléments voisins dans la colonne II_B de la Classification Périodique. On y découvre, avec de l'entraînement, des analogies dans les dispositions relatives des raies. Le zinc, lui aussi élément de la même colonne, présente dans son spectre les mêmes dispositions relatives des raies. Ce fait est général : **on rencontre des analogies dans les spectres des éléments d'une même colonne de la Classification Périodique.**



6. Spectres du cadmium et du mercure, qui sont deux éléments d'une même colonne de la Classification Périodique. Un œil exercé y décèle des positions relatives analogues pour certaines raies, reliées sur le schéma par un tiret. Voir aussi, pour plus de détails, la figure 11, **page 462.**
Les valeurs des longueurs d'ondes sont exprimées en nanomètres. Les raies du spectre visible sont indiquées en rouge.

• On sait par ailleurs que les éléments d'une même colonne de la Classification Périodique ont des propriétés chimiques voisines. Les liaisons sont dues aux électrons les moins liés au noyau, c'est-à-dire les plus lointains (encore appelés « périphériques »). Cela conduit à penser que **ce sont les électrons périphériques qui sont responsables des émissions lumineuses.**

3. Étude quantitative du spectre de l'hydrogène.

L'analyse du spectre de l'hydrogène, dont l'atome est le plus simple qui soit, a servi de point de départ à l'établissement des lois de la Mécanique Quantique. Ce spectre est indiqué à la figure 8.

a) Énergie des photons émis.

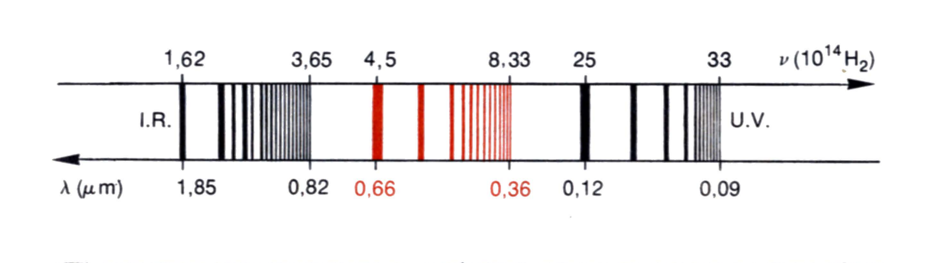
Ce sont les longueurs d'ondes lumineuses que les spectroscopistes mesurent avec une grande précision. On peut ensuite calculer les fréquences $\left(\nu = \frac{c}{\lambda}\right)$ et les énergies $(E = h\nu)$ des photons correspondants, qui sont cependant connues avec une moins grande précision à cause des incertitudes qui subsistent sur les constantes c et h. Le tableau 7 donne les valeurs mesurées des longueurs d'onde ainsi que les fréquences (en 10^{14} Hz) et les énergies des photons (en eV), pour les raies visibles et les premières raies ultra-violettes émises par l'atome H.

b) Formules empiriques de Balmer et Rydberg.

• Le suisse Johann Jakob Balmer (1825-1898) estimait que les raies visibles du spectre de l'hydrogène se resserrent d'une façon harmonieuse. Après plusieurs années de recherches, il a trouvé, en 1885, que

λ (nm)	ν (10^{14} Hz)	$E_{(eV)}$
656,279	4,568	1,89
486,133	6,167	2,55
434,05	6,907	2,86
410,17	7,309	3,02
397,01	7,551	3,12
388,91	7,709	3,19
383,54	7,816	3,23

7. Longueurs d'ondes, fréquences et énergies de quelques raies du spectre de l'hydrogène.
Les pointillés séparent les raies visibles des raies ultra-violettes.



8. Spectre de l'hydrogène, dans le visible (en rouge) et l'ultraviolet. Il existe aussi de nombreuses raies dans l'infra-rouge (à gauche sur le schéma ci-dessus)

les longueurs d'ondes pouvaient être exprimées par la relation suivante, d'origine purement expérimentale (ou empirique) :

$$\lambda_{(nm)} \approx 364{,}6 \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad \text{(formule de Balmer)}$$

où n est un **entier** supérieur à 2.

• L'énergie des photons se déduit de cette formule :

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \approx \frac{6{,}63 \,.\, 10^{-34} \times 3 \,.\, 10^{8}}{364{,}6 \,.\, 10^{-9}}\left(1 - \frac{4}{n^2}\right)$$

d'où : $E_{(\mathrm{J})} \approx 5{,}46 \,.\, 10^{-19}\left(1 - \frac{4}{n^2}\right)$ ou $E_{(\mathrm{eV})} \approx 3{,}4\left(1 - \frac{4}{n^2}\right)$.

• En 1890, le physicien danois Johannes Robert Rydberg (1854-1919) a proposé d'écrire la relation précédente sous la forme :

$$E_{(\mathrm{eV})} \approx 13{,}6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{(formule de Rydberg)} .$$

c) Autres raies du spectre.

• Quelques années plus tard, à l'incitation de Niels Bohr, on a découvert d'autres raies dans le spectre, situées dans l'ultra-violet ou l'infra-rouge. L'énergie des photons correspondants peut être calculée par une formule qui généralise la précédente :

$$E_{(\mathrm{eV})} \approx 13{,}6\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

où p est un **entier** inférieur à l'**entier** n. Il est tout à fait étonnant, et remarquable, que cette formule fasse intervenir deux **entiers.**

• A chaque valeur entière de p correspond une série de raies auxquelles on a donné le nom du savant qui les a découvertes.
— Pour $p = 1$, c'est la série ultra-violette de Th. Lyman (1906).
— Pour $p = 2$, on retrouve la série de Balmer.
— Pour $p = 3$, 4 ou 5, on a les séries infra-rouges de Paschen (1909), Brackett (1922) et Pfund (1924).

• Il nous reste maintenant à interpréter l'intervention de ces nombres entiers.

II. États stationnaires d'un atome.

1. Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

a) Zéro conventionnel de l'énergie de l'atome.

• Considérons un atome d'hydrogène constituant d'une molécule de gaz pris à température ordinaire. Cet atome se trouve dans son état habituel, non excité ; on dit aussi qu'il est dans son **état fondamental.**

• Nous pouvons exciter cet atome en lui fournissant de l'énergie. Nous savons (page 455) qu'il ne peut alors accepter que certains quantas d'énergie autorisés, jusqu'à ce que l'atome soit **ionisé.**

• L'ion et son électron séparés, infiniment loin l'un de l'autre, possèdent donc plus d'énergie que lorsque l'atome est dans son état fondamental. Cependant, on **convient** que l'énergie du système {ions-électrons, séparés} est nulle, (cela est possible, puisque l'énergie est définie à une constante additive près). Il en résulte que **l'énergie de l'atome dans son état fondamental est négative.**

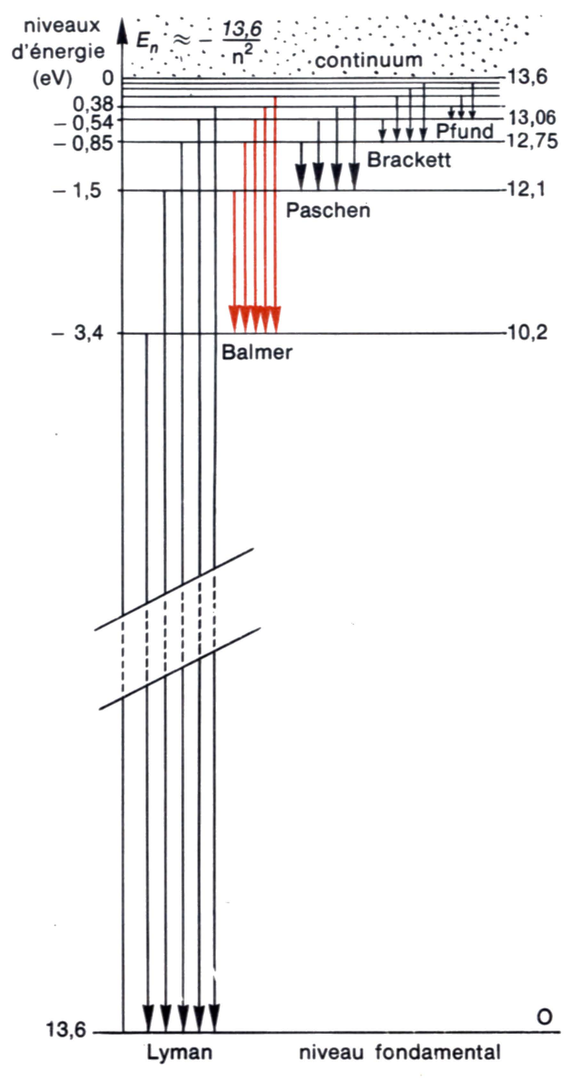
b) Énergie d'ionisation de l'hydrogène.

• D'après la formule de Rydberg, l'énergie maximale quantifiée que peut accepter l'atome sans s'ioniser est obtenue lorsque p est l'entier positif le plus petit possible ($p = 1$) et n l'entier le plus grand (∞) : $E_0 = 13{,}6$ eV.
E_0 représente donc l'énergie minimale qu'on doit fournir à l'atome pour tout juste l'ioniser ; on l'appelle **énergie d'ionisation** de l'atome H.

• L'énergie d'ionisation de l'atome H peut être déterminée par d'autres méthodes. On trouve qu'il faut fournir 1 310 kJ à une mole d'atomes H pour l'ioniser. Cela donne bien :

$$\frac{1{,}31 \,.\, 10^{6}}{6 \,.\, 10^{23} \times 1{,}6 \,.\, 10^{-19}} \approx 13{,}6 \text{ eV} .$$

• Avec nos conventions précédentes, **l'énergie de l'atome** H, **dans son état fondamental, vaut donc − 13,6 eV.**



9. Représentation des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. Les flèches verticales vers le bas indiquent des transitions où l'atome perd de l'énergie en émettant des photons de Lyman, Balmer, Paschen, etc. Les valeurs indiquées à droite donnent les valeurs des niveaux d'énergie lorsque l'on convient d'attribuer la valeur 0 à l'état fondamental.

c) Interprétation de la formule de Rydberg.

• La relation $E = 13{,}6\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ donne, pour $p = 1$ et $n = 2$, le premier quantum d'énergie absorbable par l'atome H dans son état fondamental : $E_1 = 13{,}6\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 10{,}2$ eV. Corrélativement, son énergie passe de $-13{,}6$ eV à $-13{,}6 + 10{,}2 = -3{,}4$ eV, qui correspond au premier état excité.

• Plus généralement, lorsqu'un atome H passe de l'état fondamental à un état quelconque excité, son énergie devient :

$$-13{,}6 + 13{,}6\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\frac{13{,}6}{n^2}.$$

Ainsi, les **énergies permises** à l'atome d'hydrogène sont données par $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$, où $E_0 \approx 13{,}6$ eV est **l'énergie d'ionisation :**
cette relation fournit les **niveaux d'énergie** autorisés pour l'atome H.

• La formule de Rydberg, qui donne les énergies possibles des photons émis (ou captés), peut s'écrire :

$$E = -\frac{13{,}6}{n^2} - \left(-\frac{13{,}6}{p^2}\right) = E_n - E_p.$$

Sous cette forme, elle montre que **les quanta d'énergie que l'atome H peut émettre ou capter correspondent aux différences d'énergie entre les différents niveaux autorisés.**

Par exemple, lorsque l'atome passe du niveau 3 au niveau 2, $E_3 - E_2 = -\frac{13{,}6}{9} + \frac{13{,}6}{4} \approx +1{,}89$ eV qui est l'énergie du photon émis.
La **variation** (valeur finale — valeur initiale) de l'énergie de l'atome est $E_2 - E_3 = -1{,}89$ eV ; elle est bien négative, conformément aux conventions de la thermodynamique : on compte négativement les pertes d'un système.

• Lorsqu'un atome passe d'un niveau d'énergie à un autre, on dit qu'il subit une **transition.** Lorsqu'il se trouve à l'un des niveaux autorisés, on dit qu'il est dans un **état stationnaire** (par analogie avec les ondes du même nom).

d) Diagrammes des niveaux d'énergie.

• On représente habituellement les niveaux d'énergie par des segments horizontaux dont l'ordonnée indique le niveau (figure 9). L'intérêt d'un tel diagramme est qu'il redonne, par lecture directe, l'énergie des différents photons émis par suite du passage de l'atome d'un niveau d'énergie à un autre, inférieur. On indique cette **émission** par une flèche orientée **vers le bas.**

• Inversement, une flèche **vers le haut** indique une transition où l'atome **absorbe** un quantum d'énergie (photon ou autre), de valeur égale à la différence entre les deux niveaux concernés.

• Remarquons enfin que le nombre de niveaux d'énergie est nettement inférieur au nombre de quanta prévisibles. Par exemple, à partir de 6 niveaux seulement, on peut retrouver 15 énergies de photons que l'atome H peut émettre.

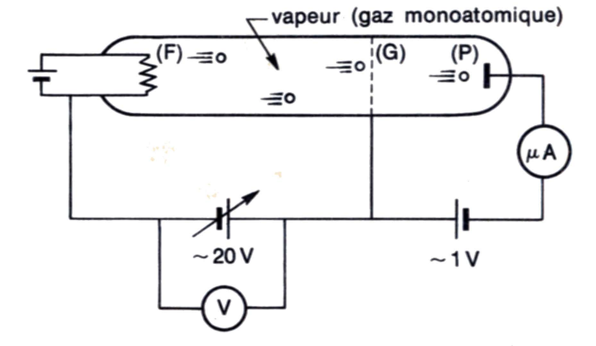
• **Remarque :** Dans un spectre d'absorption, on n'observe en général que les transitions à partir du niveau fondamental. Ces spectres sont en effet le plus souvent obtenus à température ordinaire, où pratiquement tous les atomes sont dans l'état fondamental.

2. Cas des autres atomes.

On conçoit que l'interprétation des spectres d'atomes plus compliqués que ceux de l'hydrogène doit être plus complexe. Ce sont cependant les mêmes concepts généraux, de niveaux d'énergie et d'énergie d'ionisation, qui servent de guide pour ces interprétations.

a) Détermination des niveaux d'énergie d'un atome.

• **Dispositif** (figure 10). Des électrons, émis par un filament chaud, sont attirés par une grille (G) portée à un potentiel accélérateur $U = V_G - V_F$, réglable de 0 à quelques dizaines de volts. Les trous de la grille laissent passer la majeure partie des électrons. Une plaque (P), légèrement négative par rapport à la grille ($V_G - V_P \sim 1$ V), mais positive par rapport au filament, freine les électrons ; elle les capte quand même si leur énergie est suffisante par suite de l'accélération qu'ils ont subie entre (F) et (G). Un micro-ampèremètre mesure l'intensité du courant de plaque. On introduit dans l'ampoule une vapeur monoatomique (sodium, mercure...), sous pression réduite, dont certains atomes sont choqués par les électrons.



10. Dispositif utilisable pour déterminer les niveaux d'énergie d'une vapeur monoatomique (vapeur métallique ou gaz rare). Ce dispositif peut être utilisé pour les gaz polyatomiques, mais l'interprétation des résultats devient plus délicate, car l'énergie des électrons peut alors servir à dissocier les molécules, et pas seulement à modifier les niveaux d'énergie des atomes.

Les atomes ne peuvent absorber ou émettre que des quanta d'énergie qui les font passer d'un niveau d'énergie à un autre.

11. Spectres du cadmium et du mercure, ainsi que quelques-uns de leurs niveaux d'énergie. Les valeurs affectées aux flèches marquant les transitions vers le bas, indiquent les longueurs d'ondes correspondantes (en nm): voir page ci-contre . Les analogies entre les diagrammes permettent de retrouver les raies qui se correspondent dans les deux spectres (certaines ont été signalées à la figure 6. Vous pouvez en trouver d'autres).

- **Interprétation des phénomènes observés.**
- **Courant de plaque :**

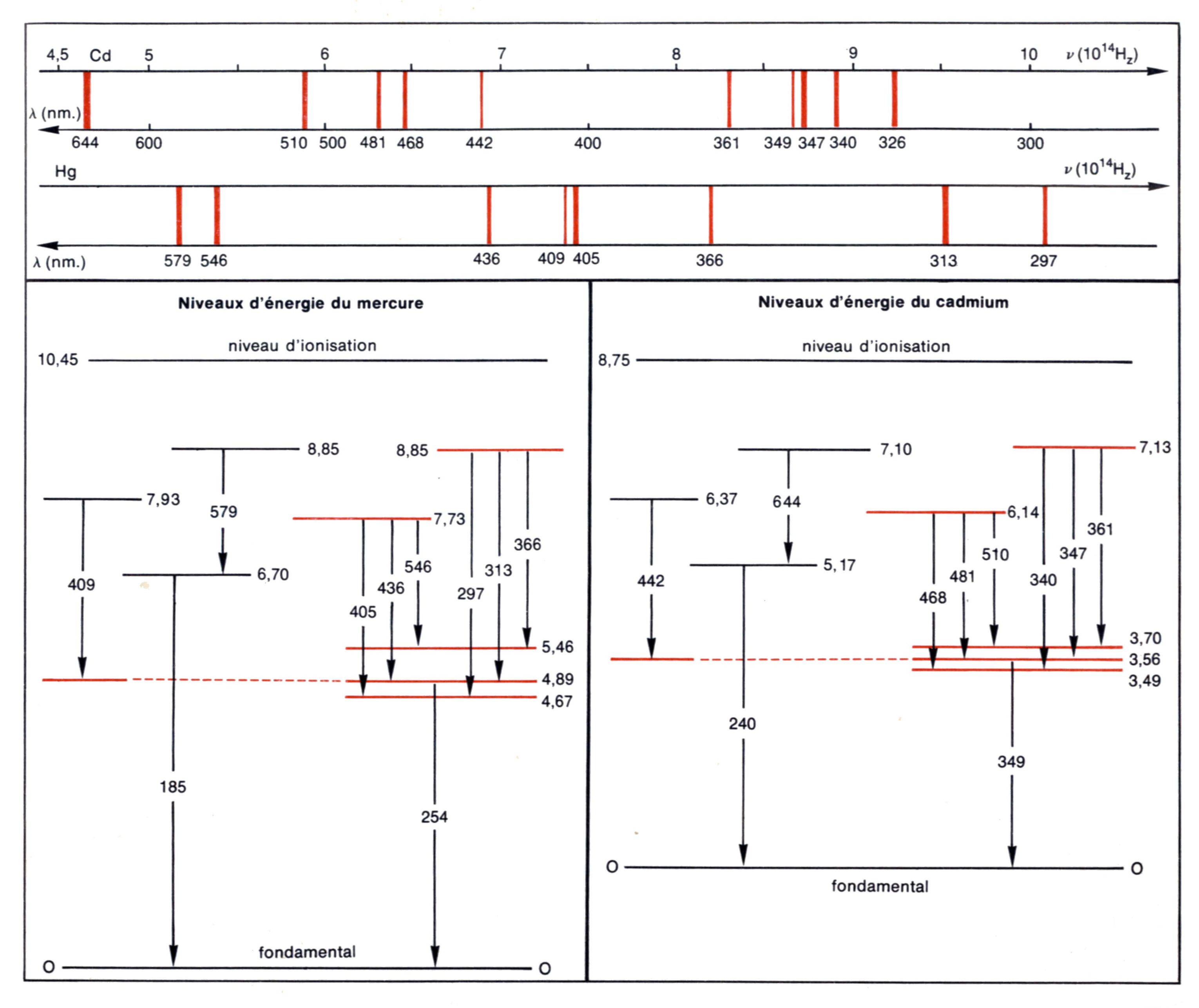
— En faisant croître la tension accélératrice U, on augmente l'intensité du courant (à condition que U soit supérieure à $V_G - V_P$) : les électrons sont de plus en plus nombreux à atteindre la plaque (P) et, même si certains d'entre eux viennent choquer les atomes de vapeur, ils rebondissent sur eux de façon élastique (en conservant pratiquement leur énergie cinétique, car les atomes choqués sont beaucoup plus massifs qu'eux) et finissent sur la plaque.
— L'intensité subit ensuite une première **chute** assez brusque lorsque l'énergie des électrons devient égale au quantum nécessaire pour faire passer l'atome de vapeur à son premier état excité. Le choc est alors inélastique, car l'électron cède une partie de son énergie à un atome qui a changé d'état. L'électron projectile ne possède plus assez d'énergie pour atteindre (P), qui ne reçoit plus que les électrons qui n'ont pas choqué les atomes, moins abondants.
— La tension continuant à croître, on observe des chutes successives d'intensité correspondant chacune à une transition du niveau fondamental vers un niveau excité. De la tension mesurée pour chaque chute d'intensité, on déduit les niveaux d'énergie de l'atome.
— L'expérience peut être poursuivie jusqu'à ce que l'**ionisation** de l'atome se produise.

- **Lumière émise par le gaz bombardé.**

— Lorsque les atomes du gaz bombardé ont absorbé un quantum d'énergie, ils l'émettent de nouveau rapidement (au bout d'environ 10^{-8} s) sous forme d'un photon de même énergie. Un spectroscope, analysant la lumière émise, donne une mesure précise de l'énergie de ces photons (que l'on trouve bien égale à l'énergie eU correspondant à une chute de tension, mesurée moins précisément).
— En augmentant l'énergie des électrons, on voit au spectroscope apparaître de plus en plus de raies, d'où l'on déduit les différents niveaux d'énergie.

- **Exemples de résultats.** La figure 11 rappelle les spectres du cadmium et du mercure, et donne certains niveaux d'énergie de ces atomes. Le niveau zéro a été attribué à l'état fondamental. Les analogies entre les deux atomes apparaissent encore plus clairement sur les diagrammes que sur les spectres.

Par rapport à l'atome d'hydrogène, une complication doit être introduite : nous observons que **toutes les transitions d'un niveau à un autre ne sont pas permises** ; elles obéissent à des **règles de sélection** que nous n'étudierons pas ici.



4,5 Cd 5 6 7 8 9 10 ν (10^14 Hz)
λ (nm.)
644 600 510 500 481 468 442 400 361 349 347 340 326 300
Hg
ν (10^14 Hz)
λ (nm.)
579 546 436 409 405 366 313 297
Niveaux d'énergie du mercure
niveau d'ionisation
10,45
8,85
8,85
7,93
579
7,73
6,70
409
366
546
313
436
297
405
5,46
4,89
4,67
185
254
fondamental
O
O
Niveaux d'énergie du cadmium
niveau d'ionisation
8,75
7,10
7,13
6,37
644
6,14
361
510
347
5, 17
442
481
340
468
3,70
3,56
3,49
240
349
O
O
fondamental

b) Énergie de première ionisation.

• **Définition.** L'énergie de première ionisation est l'**énergie minimale qu'il faut fournir à un atome pour arracher l'électron le moins lié.**

• **Principe de sa détermination.**

— Par **bombardement électronique** d'un gaz monoatomique, on se rend compte que l'atome s'ionise lorsque le spectre de la lumière émise devient continu. En mesurant la longueur d'onde limite, on en déduit la fréquence, puis l'énergie du niveau d'ionisation.

— On peut remplacer les électrons projectiles par des **photons** ultraviolets ou des photons X, plus énergiques. En choquant les atomes, ils sont absorbés et en arrachent les électrons. On recueille ces électrons, auxquels on fait subir des déflexions électriques et magnétiques, d'où l'on déduit leur énergie cinétique E_c.
L'énergie $h\nu$ des photons incidents (connue) sert à extraire les électrons (ce qui absorbe l'énergie d'ionisation cherchée E_i) et à communiquer de l'énergie cinétique (mesurée) aux électrons :

$$h\nu = E_i + E_c, \quad \text{d'où} \quad E_i .$$

Le phénomène est **analogue à l'effet photo-électrique.** Cependant, E_i est légèrement supérieure à l'énergie d'extraction des électrons hors d'un métal à l'état solide, dans lequel les électrons sont moins liés aux atomes (page 428).

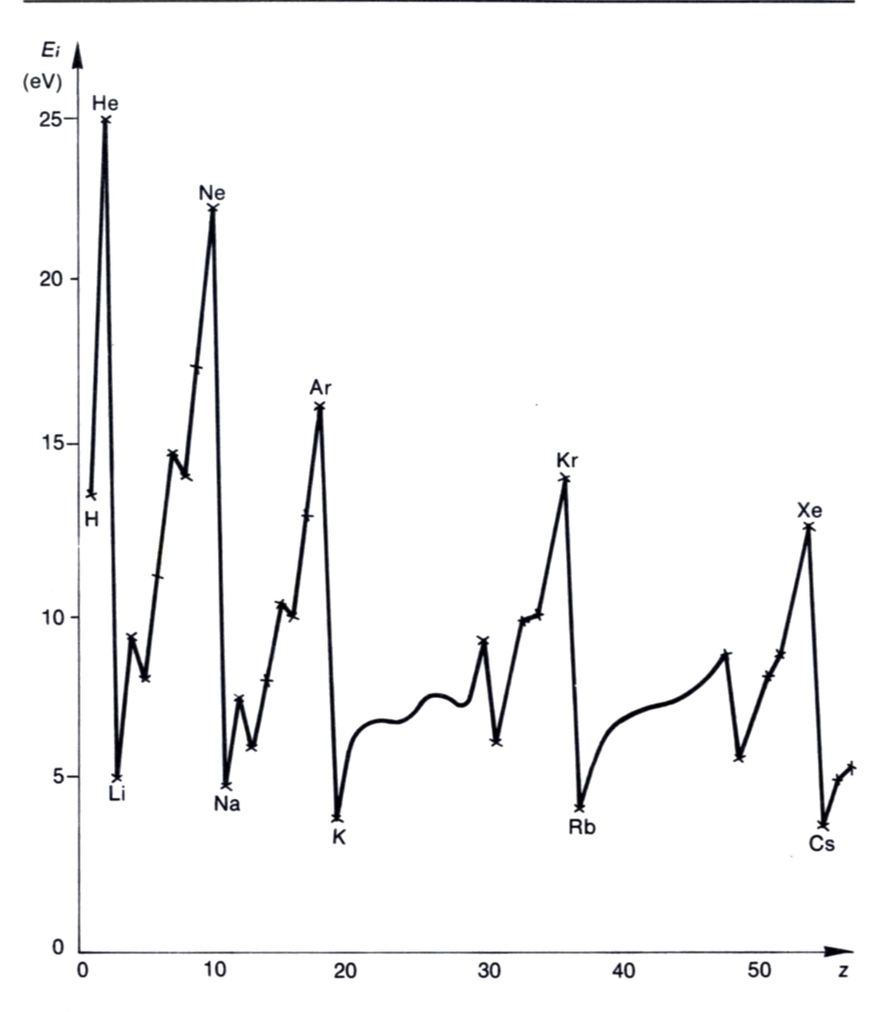
• **Relations entre l'énergie d'ionisation et les propriétés chimiques.** Le graphique de la figure 12 donne les valeurs de l'énergie de première ionisation d'éléments pris à l'état gazeux, en fonction du nombre atomique Z. On y retrouve une périodicité comparable à celle qui s'observe dans la Classification Périodique :

— **Les gaz inertes sont les plus difficiles à ioniser,** ce qui est en accord avec leur manque de réactivité chimique. Leurs énergies d'ionisation décroissent avec Z : les électrons périphériques sont moins liés aux noyaux quand les atomes sont plus gros.

— **Les métaux de la première colonne de la classification, appelés alcalins, sont les plus faciles à ioniser.** Cela interprète leur caractère métallique marqué. Les ions Na^+, K^+, ... sont stables.

— L'interprétation complète de la croissance, parfois irrégulière, de l'énergie d'ionisation lors du passage d'un atome d'un gaz inerte au suivant fait intervenir la configuration de l'environnement électronique

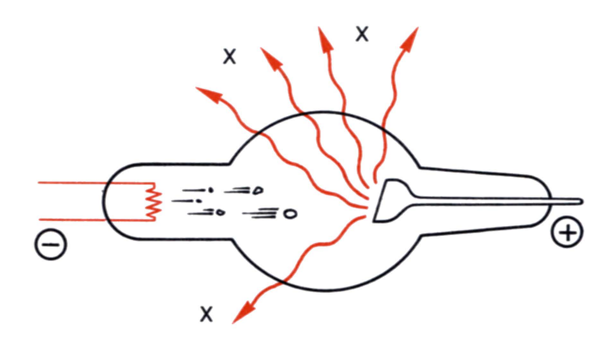
des atomes. Nous nous contenterons d'indiquer que l'énergie d'ionisation augmente à cause de la croissance de la charge du noyau (attraction coulombienne plus importante), mais cette croissance est tempérée par l'existence d'électrons répulsifs proches du noyau. Ces derniers jouent le rôle d'un **écran** entre le noyau et les électrons périphériques.



12. Énergie de première ionisation des éléments pris à l'état gazeux. Les relations avec la Classification Périodique apparaissent de façon quasi évidente.

III. Généralité du concept de niveau d'énergie.

Le concept de niveau d'énergie, particulièrement fécond, intervient dans la description de nombreux phénomènes physiques, dont voici quelques exemples.



13. Tube de « Coolidge » pour la production de rayons X. Des électrons, fortement accélérés, viennent frapper la matière qui émet les rayons X dans toutes les directions.

1. Spectroscopie X.

a) Obtention des rayons X.

Les photons X, ainsi appelés parce que leur nature est restée pendant quelques années inconnue, sont obtenus en bombardant la matière par des électrons de grande énergie cinétique. La figure 13 schématise un appareil producteur. **L'énergie des photons est de l'ordre de 10 keV,** et non plus de 1 eV comme celle des photons lumineux.

b) Spectres d'émission.

En mesurant les longueurs d'ondes des rayons X émis par une substance, on constate l'existence d'un **spectre continu limité** du côté des hautes fréquences, auquel se superpose un **spectre discontinu.**

• **Mesure des longueurs d'ondes.** Les longueurs d'onde des rayons X sont mesurées par **diffraction** sur réseaux. Il est impossible d'utiliser les réseaux habituels car les traits, qui doivent être distants d'environ une longueur d'onde, devraient être tracés à environ 10^{-10} m (ou 1 Å) l'un de l'autre. **Les réseaux utilisés sont des cristaux,** dont les ions jouent le rôle des traits (dans un cristal de chlorure de sodium, la distance entre deux ions voisins est un peu moindre que 3 Å ; c'est bien l'ordre de grandeur désiré).

• **Spectre discontinu.** Plusieurs mécanismes peuvent intervenir dans la production des photons X :
— Les atomes choqués par les électrons absorbent un quantum d'énergie et passent à un niveau supérieur. Ils émettent des photons X de grande énergie en revenant à leur état fondamental.
— Le plus souvent, les électrons projectiles possèdent assez d'énergie pour arracher un électron proche du noyau dans l'atome. Le trou ainsi laissé vacant est rapidement comblé par un électron moins profond. Cette transition s'accompagne de l'émission d'un photon X.

• On désigne habituellement les niveaux d'énergie des électrons d'un atome par les lettres *K, L, M, N, O* ... Le niveau *K* correspond aux

Limites très approximatives du spectre X :

$$10 \text{ pm} < \lambda < 10 \text{ nm}$$
$$10^{16} \text{ Hz} < \nu < 10^{19} \text{ Hz}$$
$$100 \text{ eV} < E < 100 \text{ keV}$$

électrons les plus proches du noyau. Vous avez appris en Chimie que ces niveaux peuvent contenir au maximum 2, 8, 18, ... $2n^2$ électrons (mais il n'y en a jamais plus de 8 au niveau correspondant aux électrons périphériques).

La figure 14 est un diagramme des niveaux d'énergie de l'atome, simplifié en ce sens que chaque niveau se décompose en plusieurs sous-niveaux, ce que n'indique pas la figure. Les transitions signalées correspondent à des émissions de photons X.

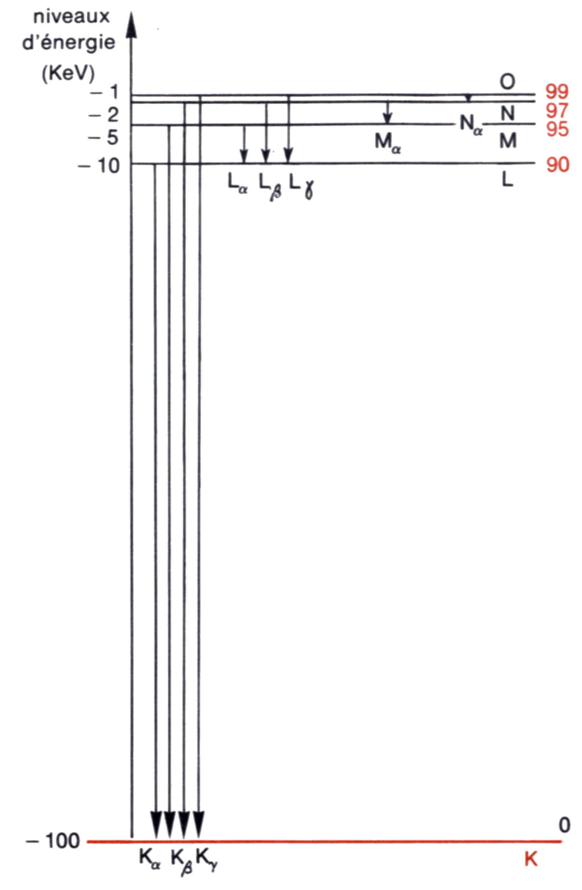
- **Fond spectral continu limité.**
- Les électrons projectiles sont décélérés par la matière qu'ils bombardent. Il en résulte, comme pour toute charge qui subit une variation d'énergie, un rayonnement dit « de freinage ». Comme ces électrons sont libres, leurs énergies ne sont pas quantifiées et le spectre est continu.
- La limite à ce spectre s'interprète en remarquant que les photons X émis ne peuvent avoir une énergie supérieure à l'énergie cinétique eU des électrons incidents : $h\nu \leqslant eU$.

D'où la fréquence limite : $\nu \leqslant \frac{e}{h} U$.

Remarque : ce mode de production des rayons X peut passer pour le phénomène inverse de l'effet photo-électrique.

c) Absorption des photons X.

- Une substance absorbe les photons X dont l'énergie est égale aux quantas autorisés par les niveaux d'énergie de ses atomes. Le phénomène est analogue à l'absorption des radiations lumineuses, mais ce sont maintenant des électrons internes dans l'atome qui sont impliqués.
- Les substances dont le numéro atomique Z est élevé possèdent de nombreux niveaux d'énergie, ce qui leur donne la propriété d'absorber des radiations du fond continu bien plus nombreuses encore. Ce fait est mis à profit en **radiographie :** les os contiennent des éléments (P, Ca) plus absorbants que la chair (C, H, O, N).
- Si les photons X ont une grande énergie, leur absorption peut s'accompagner de l'expulsion d'un électron profond. Connaissant l'énergie du photon, mesurant l'énergie cinétique de l'électron extrait, on en déduit l'**énergie de liaison** de l'électron à l'atome. La mesure des énergies de liaison d'**un** électron d'atome uni à divers autres atomes fournit des renseignements fins sur la liaison chimique.



14. Diagramme simplifié des niveaux d'énergie d'un atome. Les valeurs indiquées en ordonnée correspondent à des ordres de grandeur : elles varient d'un atome à l'autre en augmentant (en valeur absolue) avec la complexité de l'atome. On désigne les radiations X émises par K_α, K_β, ... M_α ... A cette échelle, les niveaux d'énergie des « électrons optiques » sont trop serrés pour apparaître.

Les spectres d'émission des rayons X présentent des discontinuités sur un fond continu limité du côté des hautes fréquences.

Exercice résolu : interprétation quantique sommaire de la loi de Moseley.

• Nous avons écrit plus haut les niveaux d'énergie de l'atome H sous la forme $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ (n entier positif). Nous pouvons nous attendre à une expression plus compliquée pour les atomes polyélectroniques. Essayons d'en prévoir la forme.

• Il y a Z protons dans le noyau. L'énergie due à la contribution du noyau doit être environ Z fois plus élevée que dans le cas de l'hydrogène. Cela doit être approximativement vrai pour chacun des électrons et, comme il y en a aussi Z, les niveaux d'énergie doivent être donnés par une expression de la forme :

$$E_n \approx -Z \cdot \frac{ZE_0}{n^2} = -Z^2 \frac{E_0}{n^2}.$$

• En fait, cela est trop simple : nous ne tenons pas compte ainsi des interactions dans le nuage électronique. Les électrons plus extérieurs subissent bien une attraction de la part des Z protons, mais aussi une répulsion de la part des électrons profonds : tout se passe pour eux comme s'il y avait moins de Z protons pour les attirer (disons : $Z - b$).

L'expression des niveaux d'énergie devient alors $E_n \approx -(Z - b)^2 \frac{E_0}{n^2}$.

• Si nous ne nous intéressons qu'aux électrons les plus proches du noyau (ceux qui sont impliqués dans les radiations K_α ... de la figure 14), il n'y a qu'un seul autre électron au niveau K qui puisse faire écran. Nous écrivons donc, pour les niveaux de l'atome relatifs à cet électron :

$$E_n \approx -\frac{(Z-1)^2 E_0}{n^2}.$$

• La fréquence de l'émission X (K_α) est donnée par :

$$h\nu = E_2 - E_1 = (Z-1)^2 E_0 \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3}{4} E_0 (Z-1)^2.$$

D'où, avec $E_0 \approx 13{,}6$ eV $\approx 2{,}18 \cdot 10^{-18}$ J et $h \approx 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J . s,

$$\nu \approx 2{,}5 \cdot 10^{15} (Z-1)^2 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\nu} \approx 5 \cdot 10^7 (Z-1).$$

• Cette relation, découverte empiriquement en 1913 par le jeune physicien anglais Henry Moseley (1887-mort à la guerre en 1915) a été d'une importance considérable : elle permet, par mesure d'une fréquence X, de **calculer le nombre atomique** entier Z d'un élément. C'est ce qui a permis de donner à la Classification Périodique sa forme actuelle.

Remarque. Même si la loi de Moseley semble ainsi établie de façon théorique, notre point de départ $\left(E_n \approx -\frac{E_0}{n^2}\right)$ est encore, **pour nous,** empirique.

2. Spectroscopie γ.

Les noyaux des atomes peuvent eux aussi occuper des niveaux d'énergie, fondamental et excités. L'écart entre les niveaux devient alors de l'ordre du MeV. Les transitions vers les plus bas niveaux correspondent à l'émission de **photons** γ par les noyaux. Nous aurons l'occasion d'y revenir à propos de l'étude de la radioactivité.

3. Spectroscopie moléculaire.

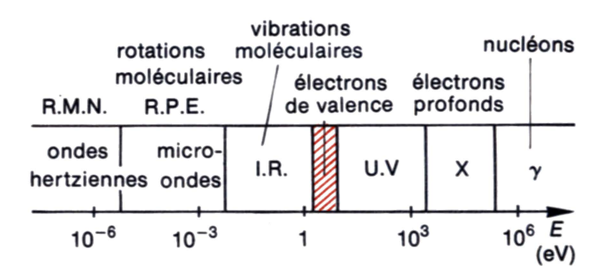
• Les transitions électroniques autorisées dans un atome se font toujours entre niveaux distants au moins d'environ 0,5 eV. Cela correspond à des émissions ou absorptions de photons dans le proche infra-rouge.

• On constate pourtant que la matière émet ou absorbe dans l'infra-rouge beaucoup plus lointain. Les spectres d'absorption montrent des **bandes** que des spectrographes appropriés, de haute résolution, décomposent en fines raies très rapprochées : nous retrouvons des **niveaux d'énergie.**

• Ces phénomènes sont attribués à des **vibrations** et des **rotations quantifiées** des molécules. Les transitions correspondent à des niveaux dont les distances sont de l'ordre de 10^{-2} eV pour les vibrations, et 10^{-4} eV pour les rotations (on atteint donc ici le domaine des micro-ondes).

4. « *R.M.N.* » et « *R.P.E.* ».

Signalons pour terminer qu'il est possible de trouver dans la matière des niveaux d'énergie encore plus rapprochés. Comme pour un cadre parcouru par un courant, on peut attribuer un **moment magnétique** aux électrons des atomes ou aux nucléons de leurs noyaux. Ces moments magnétiques sont, eux aussi, quantifiés. Les interactions des ondes électromagnétiques avec la matière provoquent des transitions distantes d'environ 10^{-5} eV en « **résonance paramagnétique électronique** ***(R.P.E.)*** **»**, et 10^{-6} eV pour la « **résonance magnétique nucléaire** **(*R.M.N.*) ».**
Nous avons donc, dans cette partie du cours, envisagé des transitions mettant en jeu des quantas d'énergie allant de 10^{-6} eV à 10^{+6} eV. La figure 15 résume les régions du spectre électromagnétique affectées.



15. Régions du spectre électromagnétique affectées par les transitions mettant en jeu des énergies dont les ordres de grandeur sont indiqués en eV, en relation avec les particules impliquées dans ces transitions.

IV. Conclusion.

Ce chapitre vous a montré comment la Mécanique Quantique interprète l'existence des spectres, grâce à la notion très générale de niveaux d'énergie. Vous avez pu être surpris par l'empirisme apparent de cette Mécanique qui semble basée sur les formules de Balmer ou de Rydberg, au fond assez étranges. Sachez que tous les résultats précédents, et en particulier l'étonnante intervention de nombres entiers, se retrouvent naturellement et théoriquement à partir de lois générales. Vous en aurez un bref aperçu dans l'étude du dernier chapitre de ce cours.

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

- L'ensemble des ______ d'un atome ne peut occuper que certains ______ . Dans son ______, l'atome occupe le niveau d'énergie le plus bas.
- Les phénomènes qui provoquent les transitions entre les différents ______ présentent des analogies avec ceux qui créent les ondes ______.
- Une ______ d'un niveau d'énergie vers un autre plus bas se traduit par l' ______ d'un photon dont l' ______ $h\nu$ est égale à la ______ entre les deux ______. La fréquence associée au photon est égale à l'une des ______ de vibration des électrons de la substance émissive.
- Une ______ d'un niveau d'énergie vers un autre plus haut correspond à l' ______ d'un ______ d'énergie, qui peut être fourni :

— par des ______ absorbés lorsque leur ______ est précisément ______ à ce quantum ;

— par des corpuscules dont l'énergie ______ est au moins égale au quantum absorbé.

- Les rayons X sont créés en bombardant la matière par des ______ très rapides. Le rayonnement de freinage se traduit par l'émission d'un spectre ______ limité du côté des ______ fréquences. Les atomes choqués passent à un ______ supérieur et, lorsqu'ils retournent à leur niveau ______ (en passant éventuellement par des ______) ils émettent des ______ dont le spectre est ______.

Petites questions.

1. Que signifie le mot « empirique » ?

2. La fente d'entrée d'un spectroscope peut-elle être rendue aussi fine que l'on veut ?

3. Sur un diagramme de niveaux d'énergie, les flèches qui représentent les transitions sont-elles d'autant plus longues que les longueurs d'ondes associées aux photons absorbés ou émis sont plus grandes ?

4. A la température ordinaire, les spectres d'absorption de l'hydrogène présentent des raies seulement dans l'ultra-violet. Justifiez.

5. Peut-on ioniser un atome H en lui fournissant moins de 13,6 eV ?

6. Dans le dispositif représenté à la figure 10 (page 461), les électrons ont-ils partout dans le tube la même énergie ? Les atomes de vapeur peuvent-ils subir une transition à n'importe quel endroit du tube ?

7. A votre avis, pendant combien de temps les spectroscopistes ont-ils dû travailler pour déterminer les différents niveaux d'énergie d'un atome complexe : 3 mois ? 3 ans ? 30 ans ?

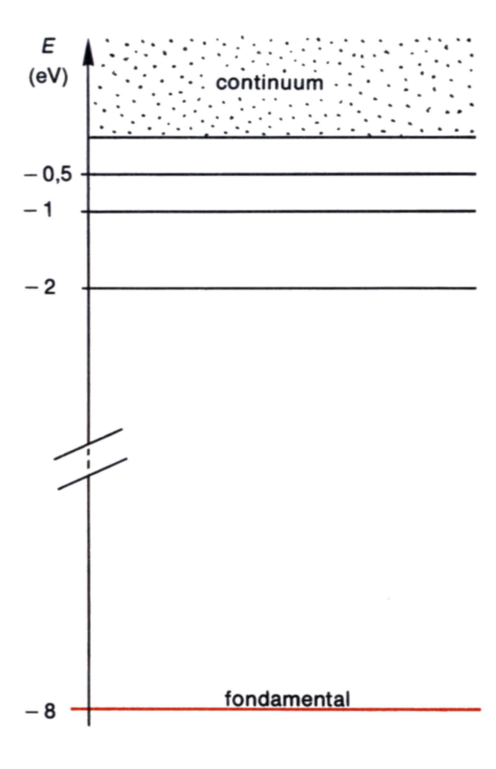
Réponse : 30 ans (environ).

8. Un photon, dont l'énergie diffère de 10 % de la différence entre le niveau fondamental et le premier niveau excité d'un atome, est-il en général absorbé par cet atome ? Peut-il arriver qu'il le soit ?

Applications immédiates.

9. Calculer, en nanomètre, les longueurs d'ondes associées aux photons de Lyman, Balmer et Paschen (on rappelle que les niveaux d'énergie de l'atome H sont donnés par $E_{n(\mathrm{eV})} = -\dfrac{13,6}{n^2}$). A quelle(s) série(s) les longueurs d'ondes indiquées dans le tableau 7 (page 457) appartiennent-elles ?

10. Les niveaux d'énergie les plus bas d'un atome sont donnés par le diagramme ci-dessous. En supposant toutes les transitions permises, calculer les énergies des photons qu'il peut émettre, ainsi que les fréquences et les longueurs d'ondes associées à ces photons.



11. Que se passe-t-il lorsque l'atome, dont les niveaux d'énergie sont indiqués dans l'exercice précédent, subit dans son état fondamental un choc de la part d'un photon ou d'un électron :

a) d'énergies égales à 2 eV ?
b) d'énergies égales à 6,5 eV ?
c) d'énergies égales à 7 eV ?
d) d'énergies égales à 10 eV ?

Réponses :

a) Rebonds élastiques.

b) Rebond élastique du photon ;
choc inélastique de l'électron qui garde une énergie de 0,5 eV ;
émission d'un photon de 6 eV.

c) Photon absorbé ;
électron au repos ;
émission de photons d'énergies 6 eV et 1 eV, ou 7 eV.

d) Photon absorbé : ionisation.

12. A partir des données indiquées dans le tableau 4, utilisez de la couleur pour représenter le spectre continu de la lumière de telle sorte que les abscisses, pour les diverses couleurs, soient proportionnelles :

a) aux fréquences des radiations ;

b) aux longueurs d'ondes des radiations.
Conservez ces documents, agréables à regarder...

13. Décalquez les raies spectrales du cadmium et du mercure (figure 11) et représentez, sur fond noir, les raies ultra-violettes par des lignes blanches et les raies lumineuses à l'aide de crayons de couleurs (reportez-vous au tableau 4).

14. Les électrons d'un appareil de télévision sont accélérés sous une tension de 18 000 V. Quelles sont l'énergie et la fréquence maximales des rayons X émis lors de leur impact sur l'écran ?

Réponses : 18 keV ; 4,3 . 10^{18} Hz.

15. Quelles sont les valeurs des niveaux d'énergie de l'atome H si l'on prend le premier niveau excité comme référence (énergie nulle). Se reporter à la figure 9, page 460.

16. En étudiant les niveaux d'énergie des atomes de cadmium et de mercure (figure 11, page 463) établir une correspondance aussi complète que possible entre les diverses raies des deux spectres.

Approfondissement.

17. Le rapport du nombre N_n d'atomes d'un gaz, dans l'état excité d'énergie E_n, au nombre N_0 d'atomes dans l'état fondamental E_0,

est donné par : $\dfrac{N_n}{N_0} = e^{-\frac{E_n - E_0}{kT}}$

où k désigne la « constante de Boltzmann » ($k \approx 8{,}6 \cdot 10^{-5}$ eV/K).

a) Interprétez cette formule en justifiant qualitativement la dépendance de N_n avec la température.

b) Calculer le rapport $\dfrac{N_1}{N_0}$ à température ordinaire (300 K) pour l'atome H (chercher dans le cours les données nécessaires).

c) A quelle température y aurait-il un million de fois plus d'atomes dans l'état fondamental que dans le premier état excité ?

d) Existe-t-il une température pour laquelle il y a autant d'atomes dans l'état fondamental et dans le premier état excité.

Réponses : **b)** $10^{-172} \approx 0$; **c)** 20 000 K environ ; **d)** Non.

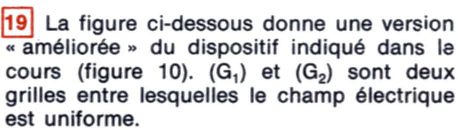
18. On appelle « corpuscules hydrogénoïdes » ceux dont les noyaux sont entourés d'un seul électron. Leurs niveaux d'énergie sont donnés par une relation de la forme $E_n = -\dfrac{E_i}{n^2}$, où n est un entier et E_i l'énergie d'ionisation.

a) Montrez que les ions He^+ et Li^{2+} sont des corpuscules hydrogénoïdes. Combien de protons leurs noyaux comportent-ils ?

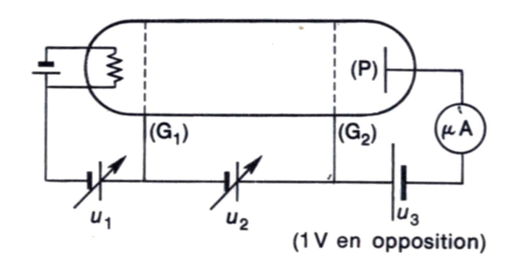
b) Les énergies d'ionisation de He^+ et Li^{2+} valent respectivement 54,4 eV et 122,4 eV. Comparez ces valeurs à l'énergie d'ionisation de l'atome H, en formant leurs rapports. Quelle relation cela vous suggère entre les énergies d'ionisation des hydrogénoïdes, leur numéro atomique Z, et l'énergie d'ionisation E_0 de l'atome H. Justifiez qualitativement cette relation.

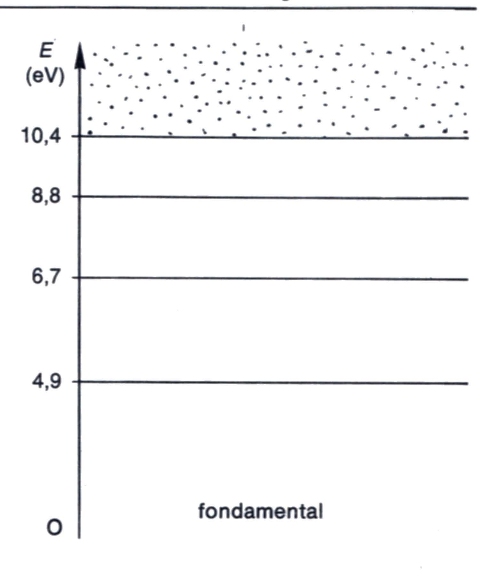
c) Calculez les valeurs des quatre premiers niveaux d'énergie de He^+ et Li^{2+}. En déduire :
— les énergies des photons qu'ils doivent absorber pour quitter leur état fondamental,
— les énergies des photons qu'ils peuvent émettre.

Réponse : **b)** $E_i = Z^2 E_0$.



19 La figure ci-dessous donne une version « améliorée » du dispositif indiqué dans le cours (figure 10). (G_1) et (G_2) sont deux grilles entre lesquelles le champ électrique est uniforme.
La tension U_3 est fournie par un générateur de f.é.m. 1 V dont la borne négative est reliée à la plaque (P). L'ampoule contient de la vapeur de mercure.
L'appareil permet donc d'étudier les niveaux d'énergie de l'atome de mercure, qui sont représentés dans le diagramme suivant. Les deux grilles (G_1) et (G_2) sont distantes de 20 cm.





a) Pour $U_1 = 0$ volt et $U_2 = 5{,}5$ volts, dans quelle région de l'espace entre les deux grilles les électrons peuvent-ils faire passer le mercure de l'état fondamental au premier état excité ? Les électrons qui ont subi un choc sont-ils décelés par le micro-ampèremètre ?

b) Pour $U_1 = 0$ V et $U_2 = 7{,}5$ V, dans quelles régions de l'espace entre les deux grilles les électrons feront-ils passer le mercure de l'état fondamental à l'un des deux premiers états excités ? Quels électrons atteindront la plaque (P ?).

c) Pour $U_1 = 10$ V et $U_2 = 0$, dans quelles régions s'effectuent les transitions des atomes de mercure ? Quels électrons atteignent la plaque ?

20. On désire que de l'hydrogène à température ordinaire, bombardé par des photons, émette de la lumière de longueur d'onde $\lambda \approx 656{,}3$ nm (première raie de Balmer). Quelle doit être la longueur d'onde maximale de ces photons ? (Cherchez dans le cours les données nécessaires.)

Réponse : 102,7 nm.

21. La mesure des longueurs d'ondes des rayons X (K_α) émis par certains éléments bombardés par des électrons énergiques a donné les résultats indiqués par le tableau suivant :

Élément	λ (Å)	Z
Mg	9,90	12
S	5,34	16
Ca	3,33	20
Cr	2,28	24
Zn	1,43	30
Rb	0,93	37

a) Calculez les fréquences ν de chacune de ces radiations.

b) Représentez graphiquement les variations de $\sqrt{\nu}$ en fonction de Z. En déduire la relation numérique donnant la longueur d'onde λ (exprimée en Å) en fonction de Z.

c) Le cuivre, bombardé par des électrons énergiques, émet des rayons X (K_α) de 1,53 Å de longueur d'onde. Combien de protons contient le noyau d'un atome de cuivre ?

22 **a)** Un atome immobile, d'énergie de masse E_0, reçoit l'énergie d'ionisation E_i nécessaire pour qu'il se forme un ion et un électron au repos. Quelle relation existe-t-il entre E_0, E_i et les énergies de masse E' de l'ion formé et E_e de l'électron ? D'après les ordres de grandeur que vous connaissez sur ces énergies, est-il nécessaire de conserver E_i dans cette relation ?

b) Un photon est absorbé par un atome dont la quantité de mouvement était juste opposée à celle du photon immédiatement avant l'absorption. Calculez, en utilisant les lois de conservation de la Mécanique Relativiste, l'énergie de masse E de l'atome excité formé, en fonction de l'énergie $h\nu$ du photon et de l'énergie de masse E_0 de l'atome initial.

c) L'atome excité au repos émet un électron. Il se forme un ion d'énergie de masse E'. Exprimer les énergies relativistes totales de l'électron et de l'ion après cette expulsion, en fonction des énergies de masse E de l'atome excité, E_e de l'électron expulsé, et E' de l'ion formé (non excité).

d) Exprimez les énergies cinétiques des deux particules finales en fonction de l'énergie du photon, de leurs énergies au repos (E' ou E_e) et de l'énergie au repos E de l'atome excité.

e) *Application numérique :* un atome d'hydrogène (masse : 938,791 MeV/c^2) reçoit un photon d'énergie 50 keV. Calculez, dans les conditions précédentes, les vitesses de l'électron et du proton formé (de masse 938,280 MeV/c^2).

Réponses :
a) $E_0 + E_i = E' + E_e$; $E_0 \approx E' + E_e$;
b) $E = h\nu + \sqrt{(h\nu)^2 + E_0^2}$;
c) Énergies totales :

$$\frac{E^2 + E_e^2 - E_e'^2}{2E} \text{ (électron)}$$

$$\frac{E^2 + E'^2 - E^2}{2E} \text{(ion)} ;$$

d) $E_{c_e} = h\nu\left(1 - \frac{E_e}{E}\right)$ $E_c' = h\nu\left(1 - \frac{E'}{E}\right)$;
e) Électron : 0,4 c ; Proton : 76 km/s.

23. Un bon miroir réfléchit 80 % de la lumière qu'il reçoit. On fait l'hypothèse suivante : chaque photon perd, en rebondissant sur le miroir, 20 % de son énergie.

a) Quelle serait, selon cette hypothèse, la variation relative de fréquence du photon ?

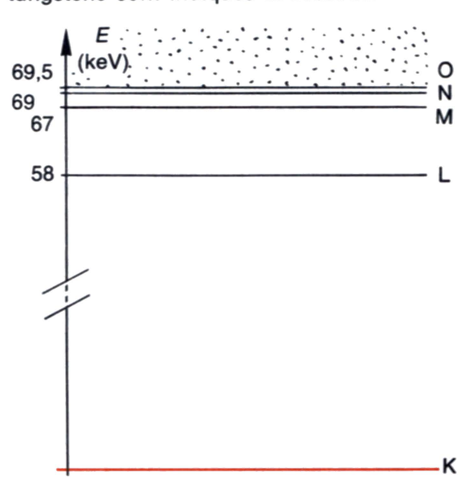
b) Quelle serait la fréquence d'un photon de lumière initialement rouge (fréquence 4 . 10^{14} Hz) après rebond sur le miroir ? Verrait-on cette réflexion ? La voit-on ?

c) Quelle serait la couleur de la lumière réfléchie si les photons avaient une énergie de 3,2 eV (ultra-violet) ?

d) L'hypothèse proposée est-elle correcte ? Quelle interprétation donnez-vous de ce phénomène ?

24. **a)** On envoie sur une électrode de tungstène des électrons accélérés sous tension $U = 80$ kV.
Ces électrons sont-ils relativistes ?

b) Les niveaux d'énergie (simplifiés) du tungstène sont indiqués ci-dessous.



Calculer les diverses fréquences du rayonnement émis.

c) Calculez la fréquence limite du spectre X continu.

Réponses : **a)** oui ; **b)** 1,68 . 10^{16} ; 1,67 . 10^{16} ; 1,62 . 10^{16} ; 1,40 . 10^{16} ; 2,78 . 10^{15} ; 2,65 . 10^{15} ; 2,17 . 10^{15} ; 6,03 . 10^{14} ; 4,83 . 10^{14} ; 1,21 . 10^{14} Hz ;
c) $\nu < 1,93 . 10^{19}$ Hz.

25. On bombarde un petit cristal de cuivre par des photons dont la longueur d'onde associée est $\lambda = 9,95 . 10^{-10}$ m.

a) Calculez, en eV, l'énergie de ces photons.

b) On fait subir aux électrons ainsi arrachés au cuivre une déviation dans un champ magnétique de valeur $B = 0,2$ mT. Ils décrivent des cercles de rayons 51,5 cm et 52,0 cm. Calculez les énergies cinétiques des deux familles d'électrons.

c) Calculez les énergies de liaison qui correspondent.

26 L'énergie potentielle effective du système { proton + électron } est donnée par $E = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$ (p est la quantité de mouvement de l'électron dans la direction perpendiculaire à la droite qui joint les centres des particules ; m est la masse de l'électron ; e, la charge élémentaire ; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ la constante des interactions électriques). En Mécanique Quantique, on admet que la quantité de mouvement p de l'électron augmente selon la loi $p = \frac{h}{r}$, lorsqu'il s'approche à la distance r du noyau (h désigne la constante de Planck réduite).

a) Exprimez l'énergie potentielle du système en fonction de la variable r et de diverses constantes fondamentales.

b) Représentez graphiquement les variations de cette énergie en fonction de $x = \frac{1}{r}$. Pour quelle valeur de x le système est-il le plus stable ?

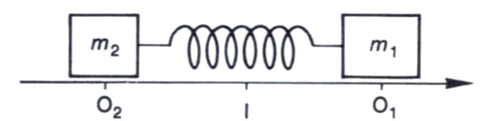
c) Calculez la valeur numérique de la distance électron-proton qui confère au système son énergie minimale. Calculez cette énergie en eV.

Réponses : **a)** $E = \frac{1}{2}\frac{h^2}{mr^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$;

b) $x = \frac{1}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{m}{h^2}$;

c) $r_0 \approx 0{,}53$ Å, $E_0 \approx -13{,}6$ eV.

27 **1)** Sur une règle à air horizontale, deux mobiles de masses m_1 et m_2, reliés par un ressort de raideur k, oscillent en opposition de phase autour de leurs positions d'équilibre O_1 et O_2. Le centre d'inertie I du système reste fixe. Les positions des deux mobiles sont repérées par leurs abscisses $x_1 = l_{o_1}$ et $x_2 = l_{o_2}$. A l'équilibre, $x_1 = l_1$ et $x_2 = -l_2$.



a) Donnez les lois horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en fonction de la pulsation ω commune aux deux mouvements, des amplitudes a_1 et a_2, de l_1 et l_2.

b) Que peut-on dire des vecteurs quantités de mouvement des deux solides à tout instant ? En déduire une relation entre les amplitudes a_1 et a_2 et les masses des solides.

c) Déterminez l'expression de l'allongement (ou du raccourcissement) Δl du ressort en fonction du temps et de diverses constantes. En déduire l'expression de l'énergie potentielle d'origine élastique du système.

d) Exprimez l'énergie mécanique du système. Justifiez sa constance. En déduire une relation entre la pulsation ω, la raideur du ressort et les masses des deux mobiles.

2) On donne les fréquences de vibration ν_1 et ν_2 des molécules HCl et HF : $\nu_1 = 8{,}7 \cdot 10^{13}$ Hz et $\nu_2 = 1{,}2 \cdot 10^{14}$ Hz.

a) Calculez les raideurs des ressorts fictifs qui, unissant les deux atomes, modéliseraient leurs liaisons chimiques.

b) En réalité, la raideur du ressort fictif ne peut être considérée comme constante qu'au voisinage de la stabilité ; elle décroît rapidement lorsque la distance d entre les atomes augmente. Si l'on suppose que l'énergie potentielle de liaison est mieux donnée par $E_p = \frac{1}{2}k\left(\frac{d_0}{d}\right)^2 \cdot \Delta l^2$ où d_0 est la distance entre les centres des atomes à l'équilibre, représenter graphiquement les variations de E_p en fonction de d. Quelle signification physique attribuez-vous à l'asymptote horizontale de cette courbe ?

c) Calculez, moyennant l'hypothèse précédente, l'énergie qu'il faut fournir aux molécules HF ou HCl en équilibre pour éloigner indéfiniment les deux atomes. (On donne : $d_0 = 127$ *pm* pour HCl, 92 *pm* pour HF). Comparez aux valeurs mesurées des énergies de dissociation de ces molécules (4,5 eV pour une molécule HCl, 5,9 eV pour une molécule HF). Conclusion ?

Réponses partielles :

1) **d)** $\omega = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}$;

2) **a)** 484 N/m (HCl) ; 900 N/m (HF) ;

c) Ordres de grandeur corrects. Loi de variation plus compliquée.

24 Réactions nucléaires

I. Le noyau atomique.

1. Données relatives au noyau.
2. Stabilité des noyaux.
3. Énergie de liaison nucléaire.
4. Niveaux d'énergie d'un noyau stable.

II. Réactions nucléaires spontanées : radioactivité.

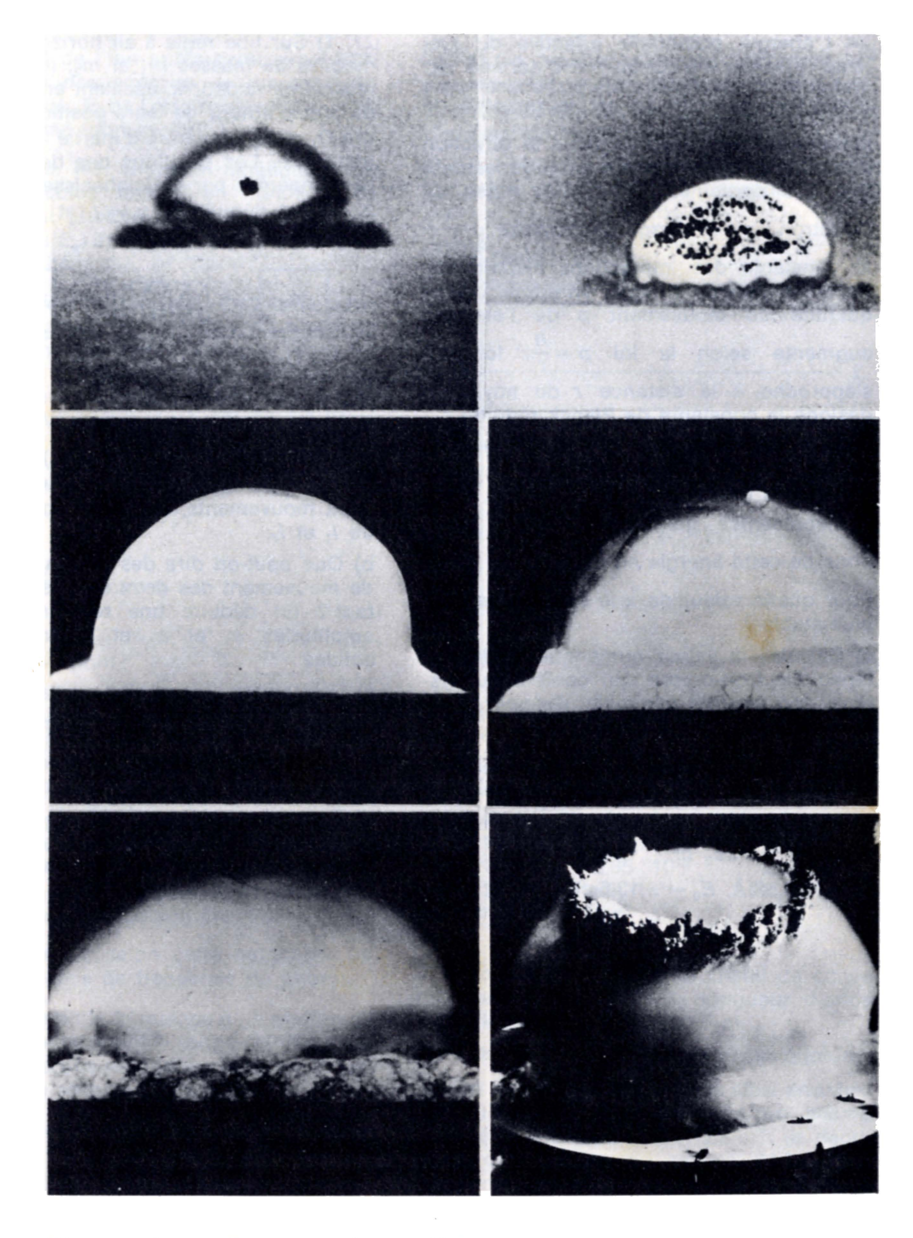
1. Caractères généraux du phénomène de radioactivité.
2. Radioactivité α.
3. Radioactivité β^-.
4. Radioactivité β^+.
5. Familles radioactives.

III. Réactions nucléaires provoquées.

1. Transmutations.
2. Fissions nucléaires.
3. Fusion thermonucléaire.

IV. Applications.

1. Centrales nucléaires.
2. Effets biologiques.
3. Utilisation en chimie.
4. Datation.



Diverses phases d'une explosion nucléaire

Le noyau, qui constitue le cœur de l'atome, est responsable de réactions très exo-énergétiques dont les bilans confirment la validité des lois générales de la Mécanique Relativiste.

I. Le noyau atomique.

L'atome, considéré longtemps comme insécable (c'est l'étymologie du mot), possède en fait une structure complexe que les physiciens commencent à bien connaître : il s'agit d'un corpuscule neutre, constitué d'un **noyau chargé positivement entouré d'électrons négatifs.**

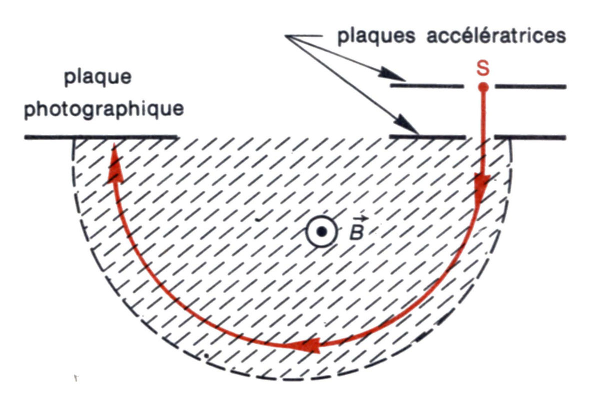
1. Données relatives au noyau.

a) Constituants d'un noyau.

- **Les nucléons** sont les particules des noyaux : **protons,** chacun porteur d'une charge positive élémentaire e, et **neutrons** non chargés.
- On désigne habituellement par A le **nombre de nucléons** dans un noyau, et par Z le **nombre de protons.** La charge positive du noyau est donc égale à Ze et, puisque l'atome est neutre, son cortège électronique est constitué de Z électrons : Z est aussi appelé **nombre de charge** de l'atome. Un noyau comporte $N = A - Z$ neutrons.
- **La masse des protons** a été déterminée avec précision en leur faisant subir des actions électriques ou magnétiques. La figure 1 donne le principe d'un **spectrographe de masse** utilisé à cette fin.
- **La masse des neutrons** est connue à partir de bilans énergétiques de réactions nucléaires. Elle est à peine supérieure à celle des protons.

b) Éléments ; nucléides.

- L'hydrogène peut être extrait de l'eau ainsi que de la plupart des composés organiques et de nombreux composés minéraux : tous ces corps contiennent l'**élément** hydrogène. Un élément est l'entité matérielle commune à un corps pur simple et à ses combinaisons.
- **Dans la Classification Périodique,** chaque élément est placé dans une case dont le numéro d'ordre est appelé **nombre atomique** de l'élément. De nombreux travaux, en particulier ceux de Moseley (page 468), ont prouvé que **le nombre atomique s'identifie au nombre de charge Z.** Ainsi, **un élément est caractérisé par son nombre de charge Z.**



1. Principe du spectrographe de masse. Il est associé à une source de protons (ou plus généralement d'ions). Les plaques accélératrices communiquent aux ions non relativistes une vitesse telle que :

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU.$$

Les ions pénètrent dans un champ magnétique uniforme, où ils décrivent une trajectoire circulaire telle que $p = mv = qBR$.

On en déduit la masse $m = \frac{(mv)^2}{mv^2}, = \frac{qB^2R^2}{2U^2}$.

		Neutron	Proton	Electron
Charge (C)		0	c = 1,602 189 . 10^{19}	− e
Masse	(kg)	1,674 96 . 10^{-27}	1,672 65 . 10^{-27}	9,109 53 . 10^{-31}
	(u)	1,008 665	1,007 276 5	0,000 548 6
Énergie au repos (MeV)		939,573	938,280	0,511 003

2. Valeurs comparées des grandeurs caractéristiques des constituants de l'atome. Le nombre de chiffres significatifs indique la précision avec laquelle ces données sont connues. L'unité de masse u sera définie plus loin dans ce chapitre.

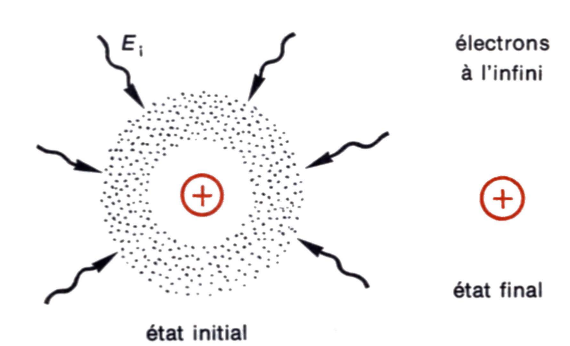
Notation d'un nucléide : $^A_Z X$.
Z définit l'élément.
Z et A définissent le nucléide.

• Lorsque l'on veut préciser la composition d'un noyau, il est nécessaire de donner à la fois son nombre de charge Z et son nombre de nucléons A. On appelle **nucléide** un noyau d'une espèce bien déterminée, **défini par les données de A et Z.** Un nucléide, associé à l'élément X, est noté $^A_Z X$.

• Un élément occupe la case n° Z dans la Classification Périodique. Les noyaux de ses atomes ont tous Z protons mais ils peuvent différer par le nombre de neutrons. On dit que ces noyaux appartiennent à l'ensemble des **isotopes** de l'élément envisagé (du grec : isos, égal et topos, place : ils occupent même place dans la Classification Périodique). La figure 3 schématise trois noyaux d'isotopes de l'hydrogène. Autre exemple : $^{35}_{17}Cl$ et $^{37}_{17}Cl$.



3. Représentation schématique des trois noyaux de l'hydrogène (hydrogène, deutérium et tritium).



4. Représentation schématique de l'ionisation complète d'un atome : il reçoit l'énergie E_i ; le noyau et les électrons sont supposés obtenus au repos.

c) Dimensions des noyaux.

• On a pu se faire une idée de la dimension des noyaux en les bombardant par diverses particules chargées (protons, électrons, noyaux d'hélium...) et dont on étudie les déviations subies. D'autres méthodes donnent des résultats concordants.

• Le rayon R d'un noyau, supposé sphérique, dépend du nombre A de ses nucléons ; il est donné par la formule empirique :

$$R \approx R_0 \sqrt[3]{A}$$

où $R_0 \approx 1{,}33$ fermi (1 fermi $= 10^{-15}$ m $= 1$ femtomètre fm). R_0 représente le rayon du proton ($A = 1$), supposé sphérique. Dans le cas du noyau de cuivre, par exemple, $A = 64$ et $R \approx 1{,}33 \times 4 \approx 5{,}3$ fm.

• Les nucléons sont donc confinés dans un volume extrêmement petit : le rayon du noyau est environ 10^5 fois plus petit que celui de l'atome (qui est de l'ordre de 10^{-10} m). Dans ces conditions, les répulsions coulombiennes extrêmement intenses entre protons, devraient conduire à l'explosion du noyau. Puisqu'il n'en est rien, on en déduit que les nucléons, très proches les uns des autres, sont unis par **interactions fortes,** de très courte portée, qui l'emportent à courte distance sur les répulsions.

d) Masse des noyaux.

• Considérons un atome immobile auquel on fournit l'énergie E_i tout juste suffisante pour lui ôter ses électrons : E_i est l'**énergie d'ionisation** complète de l'atome. Les électrons et le noyau formés sont supposés au repos (figure 4).

• La loi de conservation de l'énergie totale, appliquée dans ce cas à des corpuscules au repos, s'écrit :

$$\underset{\text{(atome au repos)}}{E_0} + E_i = \underset{\text{(noyau au repos)}}{E'_0} + \underset{\text{(électrons au repos)}}{Ze_0}$$

• Le tableau 5 donne, en eV, les valeurs des énergies d'ionisation successives mesurées pour quelques éléments, ainsi que l'énergie d'ionisation complète E_i et l'énergie d'ionisation moyenne $\frac{E_i}{Z}$ par électron ôté. Cette dernière n'atteint pas le keV. Or l'énergie au repos de l'électron vaut $e_0 \approx 0{,}511$ MeV = 511 keV. $\frac{E_i}{Z}$ est alors tout à fait négligeable vis-à-vis de e_0 et, donc, E_i est négligeable devant Ze_0.

D'où : $E_0 \approx E'_0 + Ze_0$.

• Revenant aux masses ($E_0 = Mc^2$), il vient, en divisant par c^2 :

$$M_{\text{(atome)}} \approx M_{\text{(noyau)}} + Zm_{e\ \text{(électron)}}.$$

Ainsi, la masse d'un noyau est très sensiblement égale à la masse de l'atome diminuée de la masse des Z électrons du nuage.

• Un raisonnement analogue montre que la relation précédente s'applique, avec une approximation encore meilleure, au cas des ions chargés n fois :

$$M_{\text{(ion)}} \approx M_{\text{(atome)}} \mp nm_e$$

(le signe + est à utiliser lorsque l'ion est négatif).

• **La masse des ions** se détermine avec une **grande précision** à l'aide de **spectrographes de masses** (figure 1, page 477). On en déduit les masses des atomes, des noyaux ou des divers isotopes d'un élément en utilisant les relations précédentes.

• Le kilogramme est une unité mal adaptée aux besoins de la physique nucléaire : son emploi conduit à des valeurs numériques très petites. On utilise **l'unité de masse atomique** (symbole : u). **L'unité de masse atomique est égale au douzième de la masse d'un atome de carbone 12.** En d'autres termes, un atome de ^{12}C a une masse **exactement** égale à 12 u. La fraction 1/12 a été choisie pour que la masse du plus petit atome (celui d'hydrogène) soit très **voisine** de 1 u.

• La masse d'un atome de ^{12}C est extrêmement petite. Pour obtenir des valeurs accessibles à nos balances, il faut envisager une quantité de matière bien plus grande.

n	H	He	C	N	O	Na
1	13,6	24,6	11,3	14,5	13,6	5,2
2		54,1	24,9	30,1	35,3	47,9
3			47,8	47,8	55,2	71,8
4			64,5	78,0	78,0	98,9
5			393	97,8	115	139
6			492	555	138	172
7				669	742	209
8					876	265
9						301
10						1468
11						1653
E_i(eV)	13,6	78,7	1 033	1 492	2 053	4 431
$\frac{E_i}{Z}$	13,6	39,3	172	249	293	403

5. Énergies de n-ième ionisation de quelques atomes. Les valeurs sont en eV par électron arraché.

Constante d'Avogadro :
$\mathcal{N}_A = 6{,}022\,098 \,.\, 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$.

$1\ \text{eV} \approx 1{,}6 \,.\, 10^{-19}\ \text{J}$.

Par définition, $12 \,.\, 10^{-3}$ kg de carbone 12 réalisent une quantité de matière égale à une mole d'atomes de ^{12}C. Cette mole contient un nombre énorme d'atomes : $6{,}02 \,.\, 10^{23}$. La masse d'un atome de ^{12}C vaut donc $\dfrac{12 \,.\, 10^{-3}}{6{,}02 \,.\, 10^{23}} \approx 2{,}0 \,.\, 10^{-26}$ kg. **Le douzième de cette masse est l'unité de masse atomique :**

$$1\ \text{u} = \frac{1 \,.\, 10^{-3}}{6{,}02 \,.\, 10^{23}} \approx 1{,}66 \,.\, 10^{-27}\ \text{kg}.$$

• L'unité de masse atomique correspond à une énergie au repos $mc^2 \approx 1{,}66 \,.\, 10^{-27} \times (3 \,.\, 10^8)^2 \approx 1{,}43 \,.\, 10^{-10}\ \text{J} \approx 931{,}5$ MeV.
On écrit aussi, en abrégé, $1\ \text{u} \approx 931{,}5\ \text{MeV}/c^2$.

• **Remarque :** Du fait de la présence des isotopes ^{13}C et ^{14}C, la masse atomique molaire du carbone naturel est légèrement supérieure à $12 \,.\, 10^{-3}$ kg ($12{,}011\,150 \,.\, 10^{-3}$ kg).

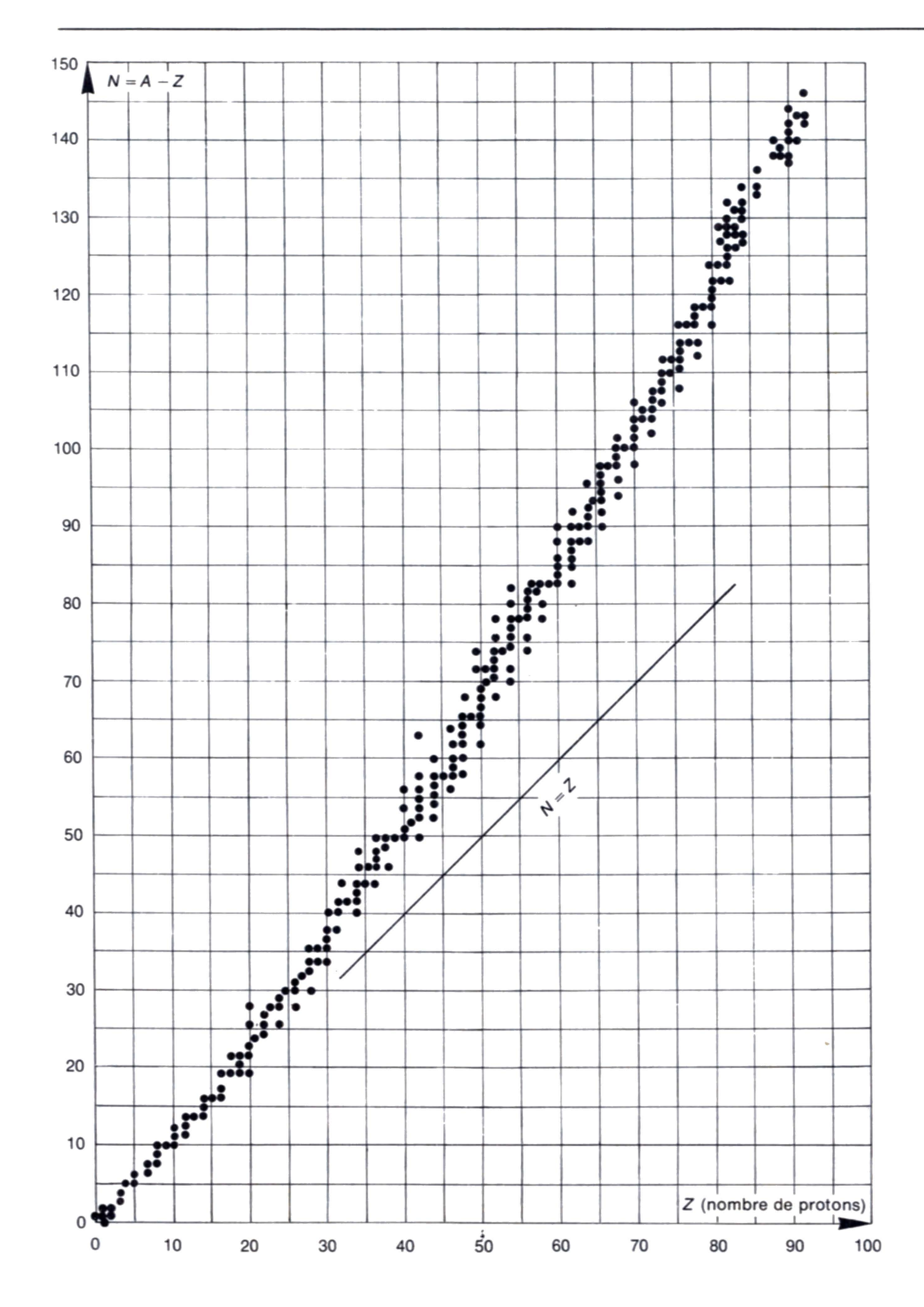
2. Stabilité des noyaux.

• Les noyaux qui ne subissent au cours du temps aucune modification spontanée sont qualifiés de **stables.** La plupart des **noyaux naturels** sont stables. Cependant, certains d'entre eux peuvent se transformer en émettant diverses particules : ils sont naturellement **radioactifs.**

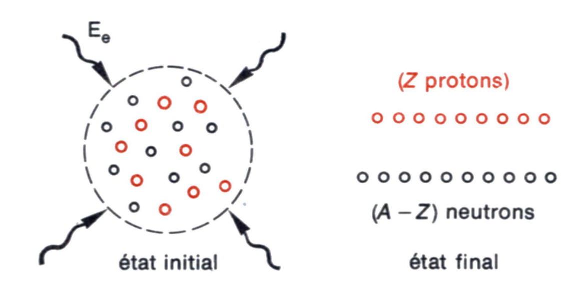
• Lorsqu'on bombarde des noyaux à l'aide de projectiles divers (protons, neutrons...) des **noyaux artificiels** nouveaux sont parfois créés, par capture du projectile ou par cassure de la cible. Ces noyaux nouveaux sont généralement instables, radioactifs.

• La stabilité des noyaux est liée à la proportion relative des protons et des neutrons qu'ils renferment. Chaque point du diagramme de la figure 6 indique la composition d'un noyau stable : le nombre de neutrons $N = A - Z$ figure en ordonnées ; le nombre Z de protons est en abscisses. Ce graphique montre l'étroite corrélation entre N et Z.

• Le diagramme montre que les éléments dont le nombre atomique Z est inférieur à environ 30 sont groupés autour de la droite $N = Z$: ces noyaux contiennent à peu près autant de protons que de neutrons. Pour les noyaux plus massifs, le nombre de neutrons l'emporte sur celui des protons et, dans les plus gros noyaux, la proportion est d'environ trois neutrons pour deux protons.



6. Diagramme de stabilité des noyaux. Chaque point de ce diagramme indique la composition d'un noyau stable. Pour une centaine d'éléments connus, on dénombre, en raison de l'existence des isotopes, environ 300 noyaux stables.



7. Représentation très schématique du passage du noyau (nucléons liés) à l'état de nucléons séparés (et, en principe, infiniment loin les uns des autres).

3. Énergie de liaison nucléaire.

a) Relation entre les masses d'un nucléide et celles de ses nucléons.

• Soit un noyau au repos, constitué de Z protons et $(A - Z)$ neutrons, tous unis par interactions fortes. Supposons que l'on fournisse au noyau l'énergie E_l juste nécessaire pour séparer les nucléons et les obtenir au repos (figure 7) : E_l est appelée **énergie de liaison** du noyau.

• D'après la loi relativiste de conservation de l'énergie totale, encore appliquée ici à des corpuscules au repos, il vient :

$$\underset{\text{(nucléide au repos)}}{E_0} + E_l = \underset{\text{(protons au repos)}}{ZE_{p_0}} + \underset{\text{(neutrons au repos)}}{(A - Z)\, E_{n_0}}$$

ou, en divisant par c^2 :

$$\underset{\text{(nucléide)}}{M} + \frac{E_l}{c^2} = \underset{\text{(protons)}}{Zm_p} + \underset{\text{(neutrons)}}{(A - Z)\, m_N}.$$

Cette relation montre que la masse d'un nucléide est inférieure $\left(\text{de } \frac{E_l}{c^2}\right)$ **à la somme des masses des nucléons séparés.**

• Inversement, si un nucléide est supposé se former à partir de nucléons séparés, l'énergie libérée est égale à l'énergie de liaison.

b) Exemple de calcul d'énergie de liaison.

• Calculons l'énergie de liaison du nucléide $^{12}_{6}C$. Sa masse est 12 u, ce qui équivaut à une énergie au repos égale à $12 \times 931{,}5 = 11\,178$ MeV. Il vient successivement :

Énergie au repos de l'atome ^{12}C :		11 178 MeV
Énergie au repos de 6 électrons :	$6 \times 0{,}511 \approx$	3 MeV
Énergie au repos du noyau (nucléide $^{12}_{6}C$)		11 175 MeV
Énergie au repos de six protons :	$6 \times 938{,}3 \approx$	5 630 MeV
Énergie au repos de six neutrons :	$6 \times 939{,}6 \approx$	5 637 MeV
Énergie au repos des nucléons séparés :		11 267 MeV

Ainsi, l'énergie de liaison de tous les nucléons d'un noyau d'atome ${}^{12}_{6}C$ vaut 11 267 − 11 175 = 92 MeV. Elle n'est pas négligeable vis-à-vis de la masse d'un nucléon.

• Des calculs analogues peuvent être repris pour tous les nucléides, dont les masses précises se déduisent de mesures effectuées au spectrographe de masse.

• Si, en première approximation, on néglige l'énergie de liaison vis-à-vis de l'énergie au repos du nucléide, on obtient, en tenant compte de ce que $m_P \approx m_N \approx 1$ u :

$$\underset{\text{(nucléide)}}{M} \approx Z \times 1\ \text{u} + (A - Z) \times 1\ \text{u} = A \times 1\ \text{u}.$$

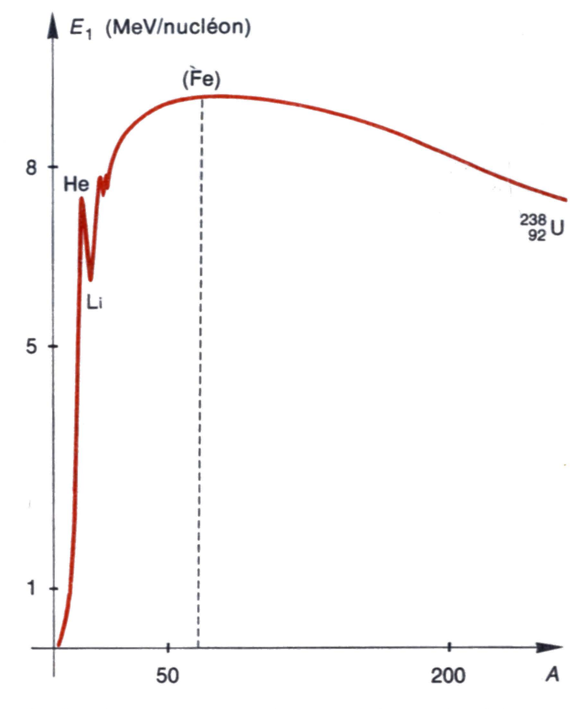
Cela montre que la masse du nucléide (ou, à cette approximation, celle de l'atome) s'exprime en u par un nombre voisin du nombre de nucléons A. Par exemple, la masse de l'atome ${}^{16}_{8}O$ est 15,995 u. C'est pour cette raison que A est aussi appelé **nombre de masse** de l'atome.

c) Énergie de liaison par nucléon.

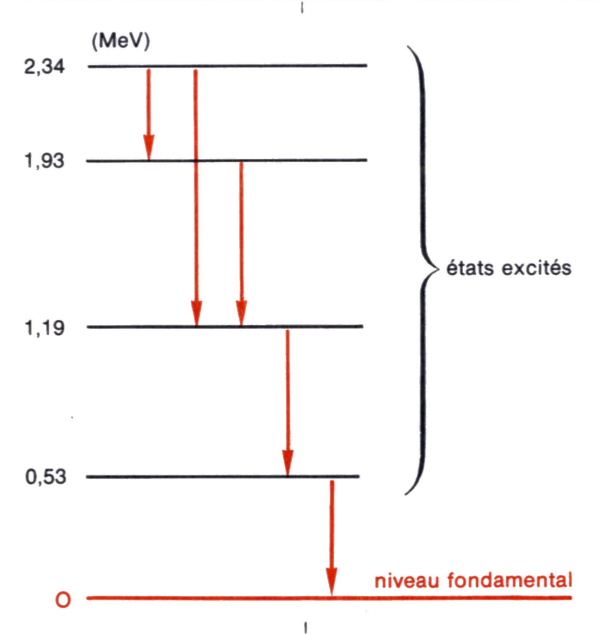
• Lorsqu'on calcule l'énergie de liaison des différents nucléides, on trouve qu'elle augmente avec le nombre A de nucléons. Cela ne signifie pas que les nucléons sont mieux liés dans les gros noyaux : pour savoir si les nucléons sont plus ou moins bien liés dans un noyau, on détermine **l'énergie moyenne de liaison par nucléon :** $E_1 = \dfrac{E_l}{A}$. Dans le cas de l'atome de carbone, elle vaut $E_1 = \dfrac{92}{12} \approx 7{,}7$ MeV par nucléon.

• On trouve de même que, pour presque tous les atomes, **l'énergie moyenne de liaison par nucléon est voisine de 8 MeV/nucléon.** Elle est au maximum de 8,7 MeV/nucléon. Cependant, elle est plus faible pour les petits noyaux (1,1 MeV par nucléon du deutérium ${}^{2}_{1}H$; 5,3 MeV par nucléon de ${}^{6}_{3}Li$...) ainsi que pour les très gros noyaux (7,6 MeV par nucléon pour l'uranium).

• En reportant sur un graphique les valeurs des énergies E_1 des différents nucléides en fonction de leur nombre de masse A, les divers points obtenus se situent, sauf pour les faibles valeurs de A, sur une courbe régulière indiquée à la figure 8. Les noyaux dans lesquels les nucléons sont les mieux liés sont ceux du fer et des éléments voisins.



8. Courbe traduisant les variations de l'énergie moyenne de liaison par nucléon, en fonction du nombre de masse A.



9. Niveaux d'énergie du nucléide $^{130}_{54}Xe$. Les flèches représentent quelques-unes des transitions possibles accompagnées d'émission de photons γ.

4. Niveaux d'énergie d'un noyau stable.

Dans ce qui suit, nous supposerons les atomes isolés et au repos.

a) État fondamental, états excités d'un noyau.

- Les noyaux stables existent le plus souvent à leur niveau d'énergie le plus bas : on dit qu'ils sont dans leur **état fondamental.**
- Par suite de collisions avec des protons ou d'autres particules d'énergie convenable, il arrive que ces noyaux acquièrent de l'énergie. Ils se trouvent alors dans un de leurs **états excités** possibles.
- La recherche des valeurs des différents niveaux d'énergie d'un noyau fait l'objet de la **spectroscopie nucléaire.**
- Les diagrammes de niveaux d'énergie nucléaire ressemblent à ceux que l'on obtient pour les électrons des atomes (revoir chapitre 23, page 461). Dans les deux cas, ces niveaux sont **quantifiés.** Cependant, pour les noyaux, **l'écart entre les niveaux d'énergie est de l'ordre du MeV,** et non plus de l'eV comme dans le cas des électrons.

b) Transitions ; émission de photons γ.

- Soit un noyau, supposé au repos, dans un état initial excité d'énergie E_i. Il ne reste dans cet état qu'un temps très court (10^{-14} seconde en moyenne : de 10^{-22} s à quelques jours selon les noyaux). Il revient à son état fondamental en passant éventuellement par l'intermédiaire d'un ou de plusieurs états excités.
- Comme dans le cas des électrons, une **transition** d'un niveau d'énergie E_i vers un niveau final E_f inférieur est accompagnée de l'**émission d'un photon.** Les photons émis, sont des **photons** γ dont l'énergie $h\nu$ de l'ordre du MeV, est égale à la différence entre celles des deux niveaux :

$$h\nu = E_i - E_f .$$

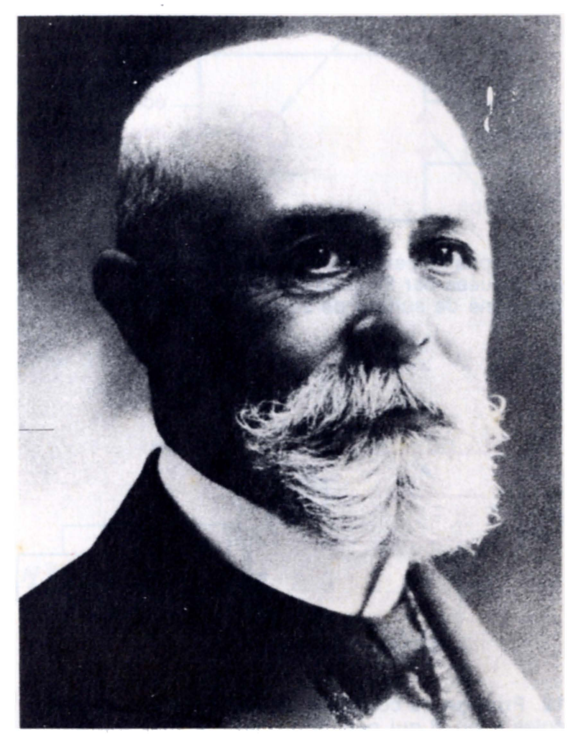
La figure 9 indique quelques transitions possibles pour le noyau de xénon 130.

- **Remarque.** Pour satisfaire à la loi de conservation de la quantité de mouvement, le noyau doit avoir acquis après l'émission une quantité de mouvement opposée à celle du photon, de valeur $p = \dfrac{h\nu}{c}$.

L'énergie pc associée à cette quantité de mouvement, de l'ordre du MeV, est très inférieure à l'énergie au repos du noyau (plusieurs GeV) : ce dernier n'est pas du tout relativiste et reste pratiquement au repos.

II. Réactions nucléaires spontanées : radioactivité.

La radioactivité a été découverte en 1896 par Henri Becquerel, qui remarqua que des plaques photographiques, situées au voisinage de composés d'uranium, avaient été impressionnées bien que protégées par du papier opaque.



Henri Becquerel (1852-1908).

1. Caractères généraux de la radioactivité.

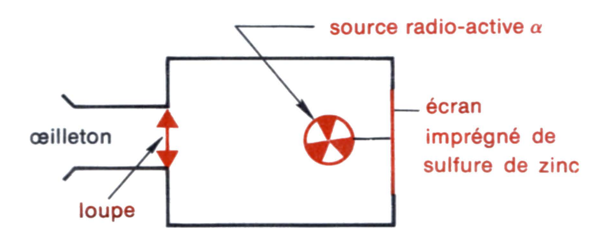
Les phénomènes radioactifs consistent en une **émission, par certains noyaux atomiques, de particules chargées ou non.**

a) Identification des particules chargées.

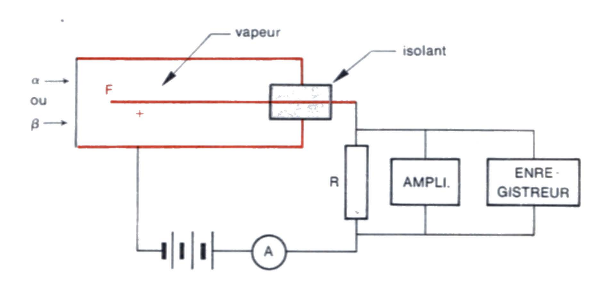
- En faisant subir des déviations électriques ou magnétiques aux corpuscules chargés expulsés par les atomes radioactifs, on déduit leurs charges massiques $\frac{q}{m}$ et leurs vitesses. On a mis ainsi en évidence deux groupes de particules : les **particules** α et les **particules** β.
- Lorsqu'on enferme un corps radioactif α dans une enceinte de verre, l'analyse spectrale décèle au bout de quelques temps les raies d'absorption de l'hélium. La mesure de la charge des particules α montre qu'elles portent deux charges élémentaires positives ($2\,e$). Leur charge massique $\frac{2\,e}{m}$ étant connue, on en déduit leur masse, égale à 4 u. Cela permet d'identifier les particules α à des **noyaux d'hélium** $^4_2He^{2+}$.
- L'interprétation des expériences qui permettent de connaître la nature des particules β est plus délicate. On trouve qu'il s'agit d'**électrons.** Il existe en fait deux types de radioactivité β. Les atomes radioactifs β naturels émettent des électrons négatifs (particules β^-). On sait aussi fabriquer des éléments artificiels radioactifs qui émettent des **antiélectrons** (particules β^+). Ils diffèrent des électrons par le signe de leur charge (positive) mais ont la même masse.
- Le tableau 10 résume quelques-unes des caractéristiques des corpuscules α ou β. Nous reviendrons plus loin sur ces deux types de radioactivité (pages 491 et 493).

	α	β^-	β^+
Masse (u)	4	$5{,}5 \cdot 10^{-4}$	$5{,}5 \cdot 10^{-4}$
Énergie au repos (MeV)	3 726	0,5	0,5
Charge	$2\,e$	$-\,e$	e
Vitesse	$< 0{,}1\,c$	$\sim 0{,}9\,c$	$\sim 0{,}9\,c$
Nature	Noyaux d'hélium	Électrons	Anti-électrons

10. Caractéristiques des particules chargées émises par les noyaux radioactifs.



11. Dispositif permettant d'observer les scintillations provoquées par l'impact de particules α sur un écran imprégné de sulfure de zinc.



12. Principe du compteur de Geiger-Muller. Les particules α ou β qui pénètrent dans ce tube ionisent la vapeur qu'il contient. Le fil (F) capte les ions formés, d'où un courant bref que l'on amplifie. Le dispositif enregistreur peut être un haut-parleur ou un compteur d'impulsions.

La radioactivité est un phénomène nucléaire spontané.

b) Détection des particules α ou β.

Divers moyens peuvent être mis en œuvre pour détecter les particules :

- Les particules α ou β impressionnent les **films photographiques.**
- Un écran, imprégné de sulfure de zinc, scintille aux endroits où il reçoit des particules α. L'observation à la loupe de ces scintillations (figure 11), montre que les émissions de la source radioactive sont **aléatoires.**
- Le **compteur de Geiger-Muller,** dont le principe est indiqué à la figure 12, permet de dénombrer surtout les particules α ou β émises en direction du compteur. Il détecte aussi environ 1 % des photons γ.
- Les **chambres de Wilson** fonctionnent selon un principe analogue à celui des chambres à bulles : elles contiennent une vapeur saturante que l'on refroidit brusquement par détente. Les particules chargées α ou β laissent dans ces chambres à bulles une trace matérialisée par une succession de minuscules gouttelettes liquides (elles provoquent la condensation de la vapeur sur leur passage).

c) La radioactivité, phénomène nucléaire spontané.

- Les particules α, dans lesquelles deux protons et deux neutrons sont associés, ne peuvent provenir que des noyaux des atomes.
- Les bilans énergétiques de la radioactivité β montrent que **les électrons émis proviennent eux aussi des noyaux** et non pas du nuage électronique. Comme il n'existe pas d'électron en permanence dans un noyau, on admet que ce sont les nucléons qui subissent une modification de structure sur laquelle nous reviendrons (page 491).
- Les transformations subies par les noyaux sont appelées **désintégrations radioactives.**
- L'origine nucléaire des rayonnements est confirmée par le fait que la radioactivité d'un atome n'est pas altérée lorsqu'il se trouve engagé dans différents composés chimiques (quand il est par exemple constituant d'un oxyde, d'un sulfate ou d'un nitrate...)
- Plus généralement, on ne dispose d'aucun moyen pour modifier le rythme ou la nature des émissions radioactives d'un échantillon donné. En particulier, la pression et la température n'interviennent pas de façon sensible : la radioactivité est un phénomène **spontané** lié seulement à la composition et à la stabilité des noyaux atomiques.

d) Période radioactive ; vie moyenne.

- Un échantillon contenant de nombreux nucléides radioactifs, ou **radionucléides,** émet de façon continue : ses noyaux ne se désintègrent pas tous en même temps.
- Lorsqu'on envisage **un** noyau isolément, on ne peut pas prévoir à quelle date il va se désintégrer. Il reste inchangé jusqu'à ce que, **brusquement,** il se transforme en émettant une particule. On dit aussi qu'**un noyau ne vieillit pas,** car « il meurt » d'un seul coup sans avoir subi de modifications progressives.
- Par contre, **on peut prévoir avec précision l'évolution statistique d'un grand nombre de radionucléides.** Désignons par N_0 le nombre de noyaux radioactifs existant dans un échantillon à la date $t = 0$. Peu de temps après (dt seconde plus tard), un certain nombre dN de noyaux sont désintégrés : il en reste encore $N_0 - dN$ qui sont radioactifs. En d'autres termes, le nombre de radionucléides a varié de $-dN$ pendant la durée dt.

On obtient **la loi de décroissance radioactive** en écrivant que la variation $-dN$ du nombre de radionucléides pendant la durée dt est proportionnelle à cette durée et au nombre actuel N de radionucléides présents dans l'échantillon :

$$-dN = \lambda N \, dt$$

La constante de proportionnalité λ est appelée **constante radioactive** du nucléide émetteur.

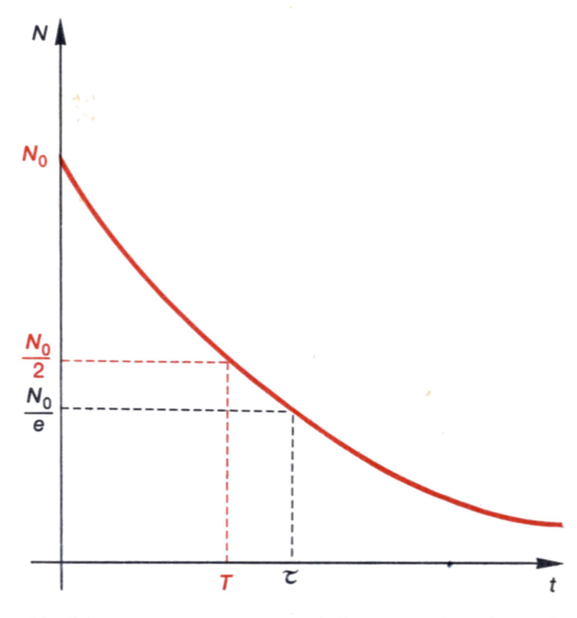
La relation précédente s'écrit aussi $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$, d'où l'on déduit le nombre N de radionucléides existant encore à la date t :

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_{0}^{t} dt, \quad \text{ou} \quad \text{Log} \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

(Log désigne le logarithme népérien). Ce résultat montre que **λt est un nombre,** et n'est donc pas affecté d'une unité. Par suite, la constante radioactive λ est homogène à l'inverse d'un temps. En unités SI, on l'exprime en s^{-1}. En passant aux exponentielles, il vient :

$$\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}}.$$

Ainsi, le nombre de radionucléides d'un échantillon décroît exponentiellement avec le temps (figure 13).



13. Décroissance exponentielle, en fonction du temps, du nombre de nucléides actifs existant dans un échantillon radioactif. T désigne la période ; τ, la vie moyenne.

• On détermine la constante λ en comptant le nombre ΔN d'émissions produites pendant un intervalle de temps Δt assez court pour que la décroissance radioactive ne soit pas trop marquée. Le nombre N de radionucléides présents actuellement peut se déduire de la mesure de la masse d'un échantillon pur. D'où : $\lambda = \dfrac{\Delta N}{\Delta t} \cdot \dfrac{1}{N}$.

• **λ est caractéristique du radionucléide émetteur,** et varie considérablement de l'un à l'autre ($2{,}3 \cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$ pour le polonium $^{212}\mathrm{Po}$; $0{,}18\ \mathrm{s}^{-1}$ pour le radon $^{219}\mathrm{Rn}$; $2{,}2 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{s}^{-1}$ pour le thorium $^{232}\mathrm{Th}$, $1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{an}^{-1}$ pour le « carbone 14 » $^{14}_{6}\mathrm{C}$ etc...).

• Lorsque $\lambda t = 1$, c'est-à-dire à la date $t = \dfrac{1}{\lambda}$, il ne reste plus que $N = N_0\, e^{-1} \approx \dfrac{N_0}{2{,}72\ldots} \approx \dfrac{N_0}{3}$ noyaux non désintégrés : environ les deux tiers ont disparu. L'intervalle de temps $\tau = t - 0 = \dfrac{1}{\lambda}$, lui aussi caractéristique du nucléide émetteur, est appelé **vie moyenne** (ou « durée de vie ») de l'échantillon.

• **Par définition, la période radioactive est l'intervalle de temps T au bout duquel la moitié des atomes s'est désintégrée** ($T < \tau$). A la date $t = T$, on doit donc avoir $\dfrac{N_0}{2} = N_0\, e^{-\lambda T}$,

$$\text{d'où :} \quad \mathrm{Log}\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T \quad \text{et} \quad T = \frac{\mathrm{Log}\, 2}{\lambda} \approx \frac{0{,}693}{\lambda} = 0{,}693\ \tau .$$

Remarques. Le mot « période » n'indique pas ici qu'il s'agit d'un phénomène répétitif.

La période radioactive s'appelle aussi « demi-vie » de l'échantillon.

e) Lois générales de conservation.

Les phénomènes radioactifs s'interprètent de façon très satisfaisante par application des lois générales de conservation, qu'ils ont d'ailleurs contribué à établir.

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons les lois suivantes :

il y a **conservation — du nombre A de nucléons,**
— de la charge électrique,
— de la quantité de mouvement,
— de l'énergie totale.

1 H																	2 He
3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Ba	57 La	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra	89 Ac	104 Ku	105 Ha													
			58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu	
			90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr	

Classification Périodique des éléments.

2. Radioactivité α.

a) Étude qualitative.

- La radioactivité α s'observe surtout pour les **noyaux massifs** dont le nombre de masse $A = Z + N$ est supérieur à environ 200. On connaît à peu près 160 noyaux émetteurs de particules α.
- Le schéma de réaction s'écrit, en tenant compte de la conservation du nombre de nucléons et de la charge électrique :

$$\boxed{{}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{A-4}_{Z-2}Y}$$

La particule α, ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, est notée aussi parfois ${}^{4}_{2}\alpha$.

- **Dans la Classification Périodique,** on passe donc de l'élément X à l'élément Y en **reculant de deux cases** (figure 14).

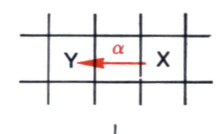
Dans le diagramme $Z \rightarrow N = A - Z$, Y se déduit de X en diminuant l'abscisse et l'ordonnée de X de deux unités, **ce qui rapproche du diagramme de stabilité** (figure 17, page 491).

- Les mesures montrent que les énergies cinétiques des particules α émises sont en général **quantifiées,** c'est-à-dire que ces particules sont éjectées avec différentes vitesses bien déterminées (on dit aussi que le spectre d'énergie des particules α est discontinu).
- Le nucléide Y formé se trouve en général dans un **état excité.** Il regagne son niveau fondamental, éventuellement par l'intermédiaire d'autres états excités, **en émettant des photons γ.** Cette **radioactivité γ** est donc un phénomène secondaire.
- La figure 15 montre, sur l'exemple du bismuth ${}^{212}\mathrm{Bi}$, plusieurs désintégrations α conduisant à la formation d'un nucléide de thallium (${}^{207}_{81}\mathrm{Tl}$) dans plusieurs états excités possibles, ainsi que les transitions γ corrélatives.

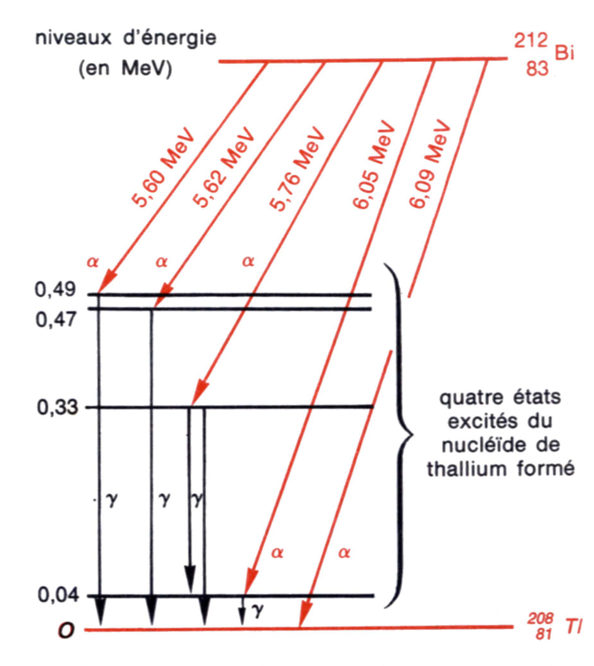
b) Étude quantitative de la réaction X → Y + α.

- Soit un nucléide X **au repos,** qui émet une particule α dont l'énergie cinétique est de quelques MeV (5 MeV par exemple). Puisque l'énergie de masse du noyau d'hélium vaut $E_0 \approx 3\,726$ MeV, son énergie totale $E = E_c + E_0$ est de 3 731 MeV. Sa quantité de mouvement est donc telle que : $pc = \sqrt{E^2 - E_0^2} = \sqrt{(3\,731)^2 - (3\,726)^2} \approx 193$ MeV,

ce qui est faible vis-à-vis de son énergie au repos :
la particule α n'est donc pas relativiste.



14. Passage de l'élément X à l'élément Y, dans la Classification Périodique, par suite d'une émission α.



15. Représentation schématique des bilans énergétiques pour la réaction nucléaire schématisée par ${}^{212}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + {}^{208}\mathrm{Tl}$. Les valeurs indiquées le long des flèches rouges donnent les différentes énergies cinétiques des particules α émises. Les transitions indiquées par les flèches noires correspondent à l'émission secondaire des photons γ.

Les particules α sont des noyaux d'hélium.

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}\,.$$

$$\vec{p}c = \frac{\vec{V}}{c}E\,.$$

Sa vitesse V est telle que : $\beta = \frac{V}{c} = \frac{pc}{E} \approx \frac{193}{3\,731}$: $V \approx 0{,}05\ c$.

• **La loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit**

$$M_X \vec{V}_X = \vec{0} = M_Y \vec{V}_Y + M_\alpha \vec{V}_\alpha\,.$$

Elle impose que **le nucléide formé « recule »** avec une vitesse initiale $\vec{V}_Y = -\frac{M_\alpha}{M_Y}\vec{V}_\alpha$. Ensuite, le noyau est rapidement freiné par les atomes voisins. Environ 50 fois plus massif que la particule α non relativiste éjectée, ce noyau n'est pas non plus, **a fortiori,** relativiste.

• L'énergie cinétique initiale de recul du nucléide Y s'écrit :

$$E_{c_Y} = \frac{1}{2} M_Y V_Y^2 = \frac{1}{2} M_Y \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} V_\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{M_\alpha}{M_Y} M_\alpha V_\alpha^2 = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{c_\alpha}\,.$$

Elle est de l'ordre de 2 % de l'énergie cinétique de la particule α

$$\left(\frac{M_\alpha}{M_Y} \approx \frac{4\ \text{u}}{200\ \text{u}} = \frac{2}{100}\right).$$

• **La loi de conservation de l'énergie totale donne**

$$E_{0_X} = (E_{0_\alpha} + E_{c_\alpha}) + (E_{0_Y} + E_{c_Y})\,.$$

$$E = E_0 + E_c\,.$$

(On pourrait négliger E_{c_Y} vis-à-vis de E_{c_α}, en première approximation.)
L'énergie cinétique apparue est appelée **l'énergie de désintégration Q** de cette réaction :

$$Q = E_{c_\alpha} + E_{c_Y} = E_{0_X} - (E_{0_\alpha} + E_{0_Y}) = (M_X - M_\alpha - M_Y)\,c^2\,.$$

Elle correspond à une **disparition de masse ;** cela implique que la masse M_X soit supérieure à $M_\alpha + M_Y$. La somme Q, somme de deux énergies cinétiques, est en effet nécessairement positive.
En résumé : **l'énergie libérée par une désintégration α, de l'ordre de quelques MeV, apparaît essentiellement sous forme d'énergie cinétique des particules α émises.**

Remarque : l'énergie cinétique de recul, E_{c_Y}, est absorbée par le réseau d'atomes voisins du nucléide formé, d'où un **échauffement** de ce réseau.

3. Radioactivité β^-.

a) Étude qualitative.

- Les nucléides radioactifs β^- sont ceux qui, par rapport aux nucléides stables, possèdent un **excès de neutrons.** Ils émettent des électrons, notés ${}_{-1}^{0}e$.

Le schéma de réaction est le suivant :

$$\boxed{{}_{Z}^{A}\mathrm{X} \rightarrow {}_{-1}^{0}e + {}_{Z+1}^{A}\mathrm{Y}},$$

Ce schéma assure la conservation du nombre de nucléons et de la charge électrique.

- **Dans la Classification Périodique,** on passe de l'élément X à l'élément Y **en avançant d'une case** (figure 16). Sur le diagramme $Z \rightarrow N$, les nucléides radioactifs β^-, riches en neutrons, sont situés au-dessus de l'ensemble des nucléides stables. On passe de X à Y en augmentant Z d'une unité et en diminuant N d'une unité (figure 17 ci-contre) ; cela rapproche le point du diagramme de stabilité correspondant au nucléide formé. Plusieurs désintégrations β^- sont possibles jusqu'à ce que le nucléide formé soit stable.

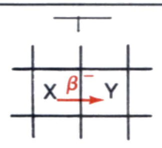
- Les mesures montrent qu'en général les électrons possèdent toutes les énergies cinétiques possibles comprises entre 0 et une valeur maximale E_{c_M} : **ces énergies ne sont pas quantifiées** (le spectre d'énergie des électrons est **continu**).

- Le nucléide Y formé se trouve souvent dans un **état excité,** surtout si les noyaux sont gros. Le retour au niveau fondamental s'accompagne alors de l'émission d'un ou de plusieurs photons γ dont le spectre d'énergie est **discontinu.** Là encore, la radioactivité γ intervient en tant que phénomène secondaire.

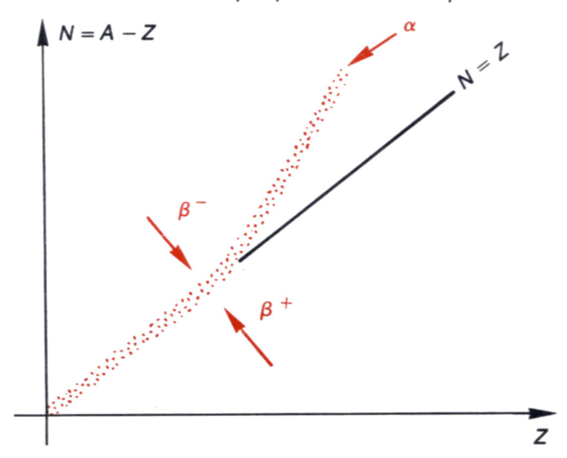
- La figure 18 montre le passage du niobium ^{93}Nb au molybdène ^{93}Mo. Dans ce cas, l'énergie cinétique **maximale** des électrons expulsés est du même ordre que celle des photons γ (moins de 1 MeV).

- Qualitativement, l'origine de l'électron s'interprète par la transformation de l'un des neutrons en proton :

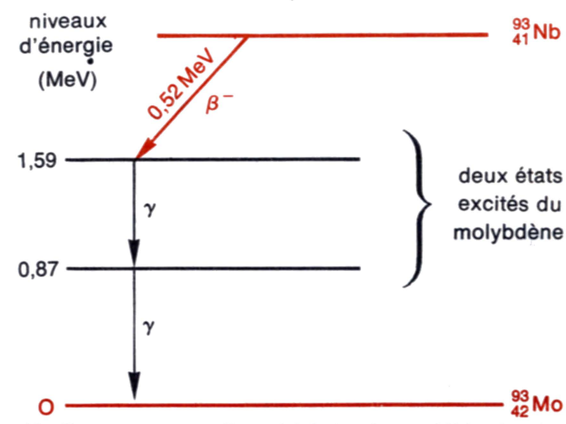
$${}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{1}^{1}p^{+} + {}_{-1}^{0}e^{-}.$$



16. Passage de l'élément X à l'élément Y, dans la Classification Périodique par radioactivité β^-.



17. Quel que soit le type de radioactivité, le nucléide final est plus proche du diagramme de stabilité que le nucléide initial.



18. Passage par radioactivité β^- du nucléide de niobium 93 au nucléide de molybdène 93. La valeur indiquée le long de la flèche rouge traduisant la transition β^-, est l'énergie cinétique maximale des électrons émis.

b) Étude quantitative sommaire de la réaction X → Y + β^-.

• Les mesures montrent que l'énergie cinétique maximale des électrons émis varie de quelques dizièmes à quelques dizaines de MeV. Envisageons le cas d'un électron d'énergie cinétique $E_c = 5$ MeV soit environ 10 fois son énergie au repos.
L'énergie totale de cet électron vaut :

$$E = E_c + E_0 \quad 5 + 0{,}5 = 5{,}5 \text{ MeV}.$$

Sa quantité de mouvement est telle que

$$pc = \sqrt{E^2 - E_0^2} = \sqrt{5{,}5^2 - 0{,}5^2} \approx 5{,}48 \text{ MeV},$$

ce qui est largement supérieur à son énergie au repos :
Cet électron est très relativiste

$$\left(\beta = \frac{pc}{E} = \frac{5{,}48}{5{,}5} \text{ d'où } V \approx 0{,}99\, c\right).$$

• **La conservation de la quantité de mouvement** s'écrit, en supposant le nucléide X au repos et l'électron doté de l'énergie cinétique maximale autorisée par la réaction :

$$\vec{0} = \vec{p_Y} + \vec{p_e}.$$

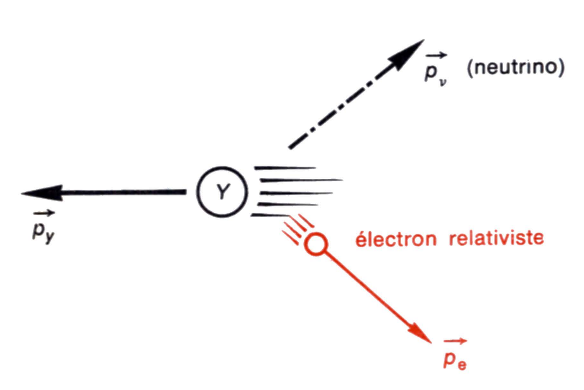
La quantité de mouvement du nucléide Y, opposée à celle de l'électron, a une valeur telle que $p_Y c = 5{,}48$ MeV, elle est cette fois négligeable vis-à-vis de l'énergie au repos du nucléide Y (celle d'un seul proton est de 940 MeV), qui n'est donc pas relativiste.

• On a observé expérimentalement que la quantité de mouvement du nucléide Y n'est pas, en général, opposée à celle de l'électron émis (figure 19).
C'est l'une des raisons qui a fait admettre en 1930 par le physicien italien Enrico Fermi l'existence d'une particule neutre, nommée « **neutrino** », que l'on note ${}_0^0\nu$.

• Nous devons donc compléter le bilan de la radioactivité β^- en écrivant la relation suivante :

$${}_Z^AX \rightarrow {}_{-1}^{0}e + {}_{Z+1}^{A}Y + {}_0^0\nu\,.$$

L'étude énergétique de la radioactivité β^- montre que **le neutrino a une masse nulle. Sa vitesse est donc égale à la célérité de la lumière.**



19. L'existence du neutrino permet d'interpréter que la quantité de mouvement du nucléide formé par radioactivité β^- n'est pas en général opposée à celle de l'électron.

• La **loi de conservation de l'énergie totale** conduit, dans ces conditions, à la relation suivante :

$$E_{0_X} = (E_c + E_0)_e + (E_c + E_0)_Y + E_\nu .$$

(nucléide initial au repos) (électron) (nucléide formé) (neutrino)

Nous pouvons, dans cette expression, négliger l'énergie cinétique du nucléide Y formé et écrire :

$$E_{c_e} + E_\nu = E_{0_X} - E_{0_Y} - E_{0_e} = (M_X - M_Y - M_e)\, c^2 = \Delta M \,.\, c^2 .$$

Ainsi, lors du passage par radioactivité β d'un nucléide X à un autre nucléide Y dans un état donné, la somme $E_{c_e} + E_\nu$ doit être égale à $\Delta M \,.\, c^2$.
Cette valeur représente aussi l'énergie cinétique **maximale** des électrons émis (dans le cas où $E_\nu = 0$: il ne se forme pas de neutrino). L'électron peut être aussi obtenu pratiquement au repos ; c'est alors le neutrino qui emporte toute l'énergie.
Entre ces deux extrêmes, tous les cas pour que $E_{c_e} + E_\nu$ soit constant sont possibles : **l'existence du neutrino, dont l'énergie peut prendre toutes les valeurs, explique aussi la continuité du spectre d'énergie du rayonnement β^-.**

L'existence de neutrinos assure les lois de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie totale.

4. Radioactivité β^+.

• Elle s'observe pour des **nucléides artificiels,** qui présentent un **défaut de neutrons** par rapport aux nucléides stables. Elle consiste en une **émission d'anti-électrons,** notés ${}^{\;0}_{+1}e$ (appelés parfois **positons**).

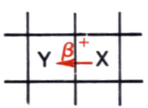
• Le schéma de réaction s'écrit

$$\boxed{{}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{\;0}_{+1}e + {}^{\;\;\;A}_{Z-1}\mathrm{Y}} .$$

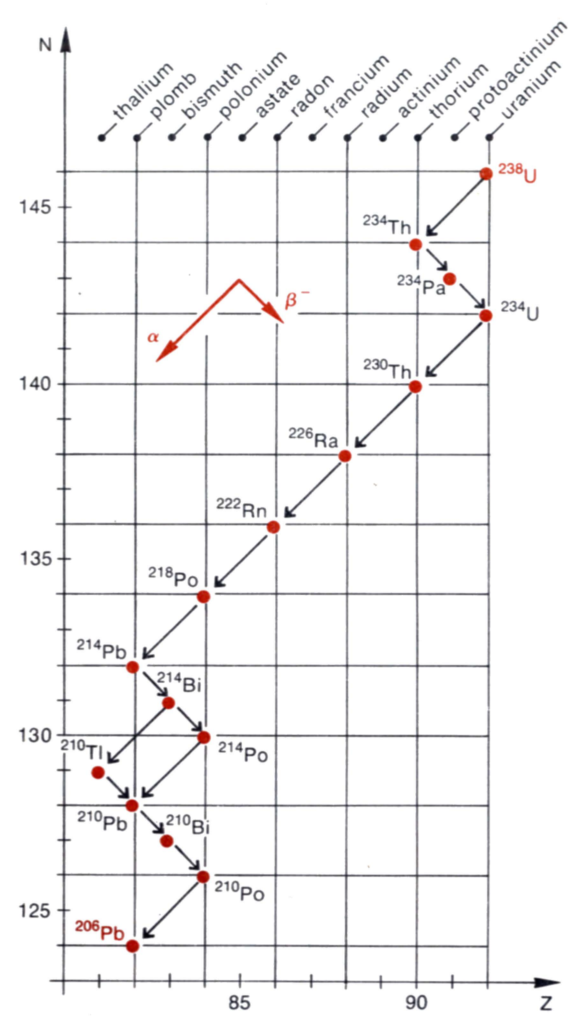
Dans la Classification Périodique, on passe de l'élément X à l'élément Y **en reculant d'une case** (figure 20). Dans le diagramme $Z \rightarrow N$, on se rapproche encore de courbe la stabilité (figure 17, page 491).

• L'émission de l'anti-électron s'interprète par la transformation d'un des protons en neutron :

$$p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu .$$



20. Par radioactivité β^+, on passe d'un élément X à l'élément Y en reculant d'une case dans la Classification Périodique.



21. Diagramme $Z \rightarrow N$ indiquant la filiation des descendants de l'uranium.

Le neutrino assure les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie.

• Il peut arriver que l'anti-électron rencontre un électron du nuage : il se produit alors une **annihilation** de matière, avec émission d'au moins deux photons :

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \,.$$

Si l'on observe cette annihilation dans le repère où les deux électrons ont des quantités de mouvement opposées, les deux photons doivent avoir eux aussi des quantités de mouvement opposées. Il faut donc au moins deux photons pour que la quantité de mouvement du système reste nulle.

Remarque. Le cobalt 56 est radioactif β^+.

$$^{56}_{27}\mathrm{Co} \rightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{56}_{26}\mathrm{Fe} \quad \text{(stable)}\,.$$

Un atome de fer 56 formé peut être aussi obtenu à partir d'un atome de cobalt 56 par **capture d'un électron** provenant en général du niveau K du même atome de cobalt :

$$^{0}_{-1}e + {}^{56}_{27}\mathrm{Co} \rightarrow {}^{56}_{26}\mathrm{Fe}\,.$$

Un électron vient ensuite remplacer, sur le niveau K, celui qui a été capturé par le noyau, et provoque l'émission d'un **photon X** moins énergique qu'un photon γ.

5. Familles radioactives.

• Il arrive fréquemment que la désintégration d'un noyau instable produise un autre noyau instable qui se désintègre par la suite : on obtient ainsi une série, ou famille radioactive constituée d'une suite de nucléides radioactifs α ou β^-.

• La figure 21 montre la filiation de la **famille de l'uranium** $^{238}_{92}\mathrm{U}$, représentée dans un diagramme $Z \rightarrow N$. Certains nucléides, comme le bismuth $^{210}_{83}\mathrm{Bi}$, sont à la fois radioactifs α et β^-.

• Si l'on part d'un échantillon de radium pur $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$, qui est un élément radioactif α appartenant à cette famille, ses descendants ($^{222}_{86}\mathrm{Rn}$, $^{218}_{84}\mathrm{Po}$, $^{214}_{82}\mathrm{Pb}$...) se forment plus ou moins rapidement selon les périodes radioactives correspondantes. Parmi ces descendants, certains sont radioactifs α, d'autres β^- : au bout de quelques heures, on observe les rayonnements α, β^- et, secondairement, γ en **émissions simultanées.**

III. Réactions nucléaires provoquées.

Les physiciens disposent maintenant de nombreux moyens pour modifier la structure des noyaux. Ces réactions nucléaires sont appelées **transmutations, fusions** ou **fissions.**

1. Transmutations.

• **Une transmutation** est une réaction nucléaire au cours de laquelle **deux nucléides interagissent pour en former deux nouveaux,** avec éventuellement création d'autres particules élémentaires.

• La première transmutation a été réalisée en 1919 par Lord Ernest Rutherford of Nelson, en bombardant des noyaux d'azote avec des particules α (issues d'une source radioactive).
Le bilan de cette réaction s'écrit :

$$ {}_{2}^{4}\mathrm{He} + {}_{7}^{14}\mathrm{N} \rightarrow {}_{8}^{17}\mathrm{O} + {}_{1}^{1}\mathrm{H}\,, $$

où ${}_{1}^{1}\mathrm{H}$ représente un proton. Vous vous assurerez que cette réaction conserve bien le nombre de nucléons et la charge électrique.

• De même, en bombardant de l'aluminium par des particules α, Irène et Frédéric Joliot-Curie ont obtenu en 1934 le premier **isotope radioactif artificiel :** le phosphore 30. Le bilan de la réaction est

$$ {}_{13}^{27}\mathrm{Al} + {}_{2}^{4}\mathrm{He} \rightarrow {}_{15}^{30}\mathrm{P} + {}_{0}^{1}n\,. $$

Ce phosphore possède un défaut de neutrons par rapport au phosphore stable ${}_{15}^{31}\mathrm{P}$. Il est radioactif β^{+} et se transforme en silicium :

$$ {}_{15}^{30}\mathrm{P} \rightarrow {}_{+1}^{0}e + {}_{14}^{30}\mathrm{Si}\,. $$

• **Les bilans énergétiques** des transmutations s'effectuent, comme d'habitude, en faisant intervenir les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Il convient de tenir compte ici de l'énergie cinétique des projectiles (neutrons, protons, deutons, particules α, etc...), lorsqu'elle n'est pas négligeable.

La fission est la partition d'un noyau massif, consécutive au choc d'un neutron.

2. Fissions nucléaires.

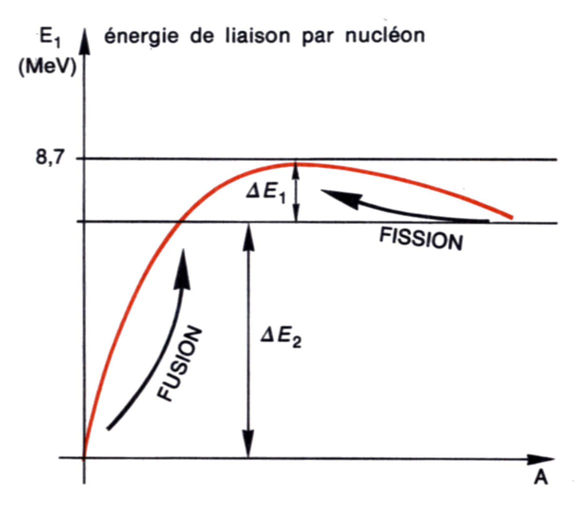
a) Généralités.

- Certains noyaux atomiques massifs ont la propriété de se scinder en deux fragments, en général inégaux, lorsque diverses particules viennent les choquer. Quand cette scission est provoquée par un neutron, la réaction porte le nom de **fission.**
- Un nucléide qui subit la fission, même si le neutron projectile possède une très faible énergie cinétique, est qualifié de **fissile.**
- Dans les centrales nucléaires, deux nucléides fissiles sont actuellement utilisés : l'uranium $^{235}_{92}U$, qui existe en faibles proportions à l'état naturel, et le plutonium $^{239}_{94}Pu$, obtenus artificiellement à partir de l'uranium le plus abondant naturellement : $^{238}_{92}U$. On cherche à fabriquer $^{239}_{94}Pu$ dans les « surrégénérateurs » ; sa formation s'effectue par l'intermédiaire de deux nucléides radiactifs β^-, selon les schémas successifs :

$$^{238}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{239}_{92}U \qquad ^{239}_{92}U \rightarrow ^{0}_{-1}e + ^{239}_{93}Np \qquad ^{239}_{93}Np \rightarrow ^{0}_{-1}e + ^{239}_{94}Pu\,.$$

Le nucléide $^{238}_{92}U$ initial, qui engendre ainsi le plutonium fissile, est qualifié de **fertile.**

Remarque. L'uranium 235 et le plutonium 239 sont par ailleurs radioactifs α, de périodes respectives 7,2 . 10^8 ans et 24 400 ans.



22. D'après le diagramme simplifié indiquant l'énergie moyenne de liaison par nucléon en fonction du nombre de masse *A*, on peut produire de l'énergie en cassant des noyaux massifs (fission : ΔE_1) ou en unissant des petits noyaux (fusion ΔE_2).

b) Bilans énergétiques.

- D'après le diagramme donnant l'énergie moyenne E_1 de liaison par nucléon, rappelé à la figure 22, la partition d'un noyau massif en deux noyaux moyens correspond à une **libération d'énergie.**

On peut en effet envisager les transformations fictives suivantes :
— Le noyau massif, absorbant en moyenne relativement peu d'énergie par nucléon, est transformé en nucléons séparés.
— Les nucléons séparés forment deux noyaux, avec libération relativement importante d'énergie moyenne par nucléon.
L'énergie libérée l'emporte donc sur celle qui est théoriquement absorbée ; le bilan par nucléon est indiqué sur la figure 22 (ΔE_1).

- Voici deux exemples, parmi beaucoup d'autres, de réactions de fissions observées pour l'uranium 235 :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{95}_{42}Mo + ^{139}_{57}La + 2\,^{1}_{0}n + 7\,^{0}_{-1}e$$

et

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{91}_{40}Zr + ^{142}_{58}Ce + 3\,^{1}_{0}n + 6\,^{0}_{-1}e\,.$$

Les diverses réactions possibles libèrent, en moyenne, environ 2,5 neutrons **rapides** par réaction.

• En général, il se forme des noyaux intermédiaires excités, qui sont à l'origine de l'émission d'électrons et de neutrinos par radioactivité β^-, et de photons γ par retour à l'état fondamental. Un bilan plus complet de la première réaction, par exemple, peut donc s'écrire (sans préciser le nombre de neutrinos ${}^0_0\nu$ et de photons ${}^0_0\gamma$ formés) :

$${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0 n \rightarrow {}^{95}_{42}\text{Mo} + {}^{139}_{57}\text{La} + 2\,{}^1_0 n + 7\,{}^{0}_{-1}e + ({}^0_0\nu + {}^0_0\gamma)\,.$$

• Étudions plus précisément cette réaction. Elle n'est déclenchée que par des neutrons relativement **lents,** dont l'énergie cinétique est de l'ordre de 0,1 MeV (ce qui est négligeable vis-à-vis de leur énergie au repos). En supposant le noyau d'uranium 235 immobile lors de l'impact du neutron, la loi de conservation de l'énergie totale s'écrit :

$$\underset{\text{(Uranium 235)}}{E_{0_u}} + \underset{\text{(neutron)}}{(E_0 + E_c)_n} = \underset{\text{(Molybdène)}}{(E_0 + E_c)_{\text{Mo}}} + \underset{\text{(Lanthane)}}{(E_0 + E_c)_{\text{La}}} +$$

$$+ \ \underset{\text{(neutrons)}}{2\,(E_c + E_0)_n} + \underset{\text{(électrons)}}{7\,(E_c + E_0)_e} + \underset{\text{neutrinos et photons}}{(E_\nu + E_\gamma)}.$$

$$E = E_0 + E_c\,.$$

L'énergie ΔE libérée par la réaction est constituée par l'énergie cinétique des corpuscules matériels formés, et par l'énergie des neutrinos et des photons γ. Elle vaut

$$\Delta E = E_{c_{\text{Mo}}} + E_{c_{\text{La}}} + 2\,E_{c_n} + 7\,E_{c_e} + E_\nu + E_\gamma$$

ou, d'après l'égalité précédente,

$\Delta E = (E_{0_U} + E_{0_n}) - (E_{0_{\text{Mo}}} + E_{0_{\text{La}}} + 2\,E_{0_n} + 7\,E_{0_e})$ et, après avoir regroupé les énergies au repos E_{0_n} des neutrons,

$$\Delta E = [M_{\text{U}} - (M_{\text{Mo}} + M_{\text{La}} + M_n + 7\,M_e)]\,.\,c^2 = \Delta M\,.\,c^2\,.$$

• Les masses des noyaux sont données avec précision, dans les tables. On y trouve $M_{\text{U}} = 234{,}993\,517$ u, $M_{\text{Mo}} = 94{,}882\,704$ u etc...

D'où $\Delta M = 234{,}993\,517 - (94{,}882\,704 + 138{,}874\,824 + 1{,}008\,665 + 70{,}000\,548) = 0{,}223\,488$ u

Considérant que 1 u $\approx 931{,}5$ MeV/c^2 : $\Delta E \approx 208$ MeV.
Ce résultat est bien de l'ordre de grandeur admis pour l'énergie libérée par la fission de l'uranium 235 : **En moyenne, l'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium 235 est de 200 MeV.**

• On a pu préciser la répartition de l'énergie libérée entre les divers fragments de fission. En voici des valeurs moyennes approximatives :

Énergie cinétique des deux « gros » fragments	:	166 MeV
Énergie des neutrinos	:	12 MeV
Énergie des photons	:	11 MeV
Énergie cinétique des électrons	:	7 MeV
Énergie cinétique des neutrons	:	4 MeV
Total	:	200 MeV.

Dans un réacteur nucléaire, cette énergie apparaît sous forme désordonnée : elle augmente **l'énergie interne** du réacteur. Cependant, l'énergie des neutrinos (environ 6 %) est perdue, car ils n'interagissent que très faiblement avec la matière : sur 10^{12} neutrinos qui traversent la Terre, un seul est absorbé !

3. Fusion thermonucléaire.

a) Généralités.

• Le diagramme de la figure 22 (page 496) montre que l'on peut aussi libérer de l'énergie en unissant des petits noyaux pour en former des plus gros. Ces réactions sont appelées **fusions nucléaires** (dans le sens de « fusionner »).

• Pour réaliser une fusion, il faut réussir à mettre les noyaux en contact, malgré les répulsions coulombiennes qui augmentent rapidement au fur et à mesure que la distance internucléaire décroît. Cela implique d'opérer à des **températures élevées** (supérieures à 10^8 K !) pour provoquer une agitation thermique suffisante : on parle de **fusion thermonucléaire.**
A ces températures, les électrons ont quitté les noyaux ; la matière est à l'état de **plasma.** L'énergie cinétique d'agitation thermique des particules est de l'ordre de 0,1 MeV.
De telles températures ne peuvent pas être réalisées actuellement, sauf au cours d'une réaction explosive (une fission) ou dans des dispositifs expérimentaux qui consomment plus d'énergie qu'ils n'en libèrent.

• Ce sont des réactions de fusion nucléaire qui sont à l'origine de l'énergie stellaire, en particulier celle du Soleil.

b) Bilans énergétiques.

- Envisageons l'une des réactions déjà produite dans les « bombes H » que l'on cherche actuellement à réaliser de façon non explosive.

Il s'agit de la fusion de noyaux de deutérium et de tritium, selon le schéma :

$${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n\,.$$

- L'énergie cinétique des particules initiales (environ 0,1 MeV) est négligeable vis-à-vis de leur énergie au repos, de sorte que la loi de conservation de l'énergie totale s'écrit :

$$E_{0_\mathrm{D}} + E_{0_\mathrm{T}} = (E_0 + E_c)_{\mathrm{He}} + (E_0 + E_c)_n\,.$$

L'énergie dégagée apparaît sous forme d'énergie cinétique des particules formées, et vaut

$$Q = E_{c_{\mathrm{He}}} + E_{c_n} = (E_{0_\mathrm{D}} + E_{0_\mathrm{T}}) - (e_{0_{\mathrm{He}}} + E_{0_n})$$
$$= [(M_\mathrm{D} + M_\mathrm{T}) - (M_{\mathrm{He}} + M_n)]\,.\,c^2 = \Delta M\,.\,c^2\,.$$

- Les valeurs précises des masses des noyaux se trouvent dans les tables de constantes :

$$M_\mathrm{D} + M_\mathrm{T} = 2{,}013\,554 + 3{,}015\,501 = 5{,}029\,055\ \mathrm{u}$$
$$M_{\mathrm{He}} + M_n = 4{,}001\,507 + 1{,}008\,665 = 5{,}010\,172\ \mathrm{u}$$
$$\text{Différence :}\quad \Delta M = 0{,}018\,883\ \mathrm{u}$$

Énergie de masse équivalent à 1 u : 931,5 MeV.

D'où : $Q = 0{,}018\,883 \times 931{,}5 \approx 17{,}6$ MeV.

- La réaction précédente met en jeu 5 nucléons : l'énergie libérée vaut en moyenne $\frac{17{,}6}{5} = 3{,}5$ MeV par nucléon intervenant. Dans le cas de la fission de l'uranium 235, qui fait apparaître 200 MeV, cette énergie « n'était que » de $\frac{200}{236} \approx 0{,}85$ MeV par nucléon. Partant du même nombre de nucléons, c'est-à-dire sensiblement de la même masse de matière, la libération d'énergie par fusion est donc environ quatre fois plus importante que par fission. En d'autres termes : **la perte relative de masse $\frac{\Delta M}{M}$, associée à une libération d'énergie nucléaire, est environ quatre fois plus importante lors d'une fusion que lors d'une fission.**

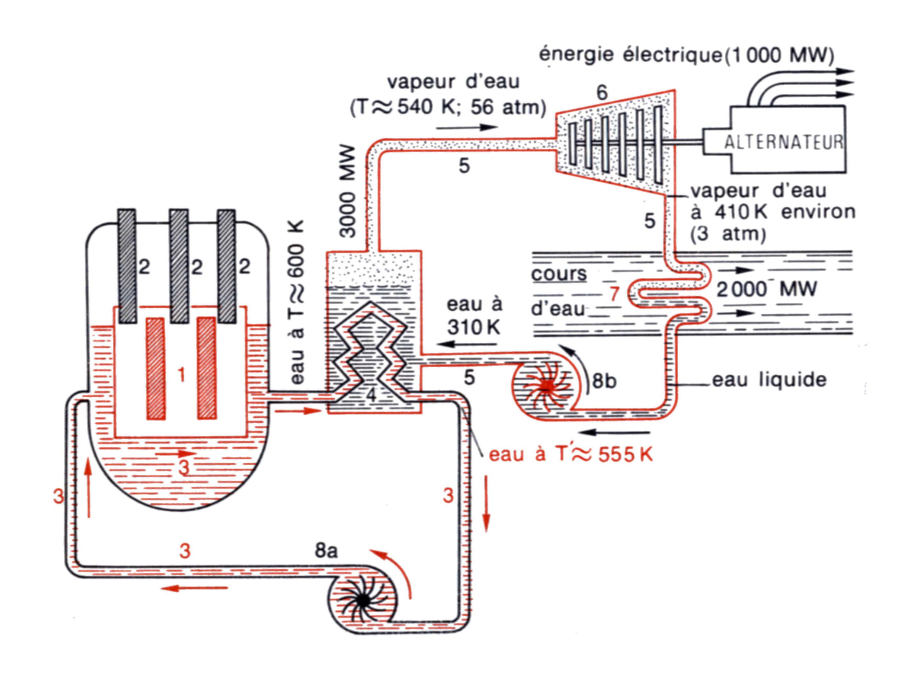
IV. Applications.

Outre les informations qu'elles fournissent sur les noyaux, les réactions nucléaires ont de nombreuses applications que nous ne pouvons pas toutes citer.

1. Centrales nucléaires.

• Le principe de fonctionnement des centrales nucléaires a été indiqué dans le cours de Première : l'énergie des particules formées dans le cœur du réacteur est utilisée, à l'exception de celle des neutrinos, pour échauffer le **fluide caloporteur** d'un circuit primaire. Ce fluide chaud fait passer l'eau d'un circuit secondaire à l'état de vapeur, qui fait tourner des turbines reliées à des alternateurs.

• Dans les **centrales à eau sous pression,** le combustible est de l'**uranium enrichi** en uranium 235, qui ne subit la fission que sous l'impact de neutrons **lents.**



23. Schéma de principe d'une centrale nucléaire à eau sous pression (l'échelle des dimensions n'est pas respectée).
1. Cœur du réacteur (contenant des barreaux d'oxyde d'uranium enrichi).
2. Barres de commande (en cadmium, absorbeur de neutrons).
3. Circuit primaire (eau sous pression : 155 atm).
4. Échangeur de température (chaudière).
5. Circuits secondaires.
6. Turbine (faisant tourner l'alternateur).
7. Condensateur (refroidisseur ; dépresseur).
8. Pompes de circulation (a : 13 tonnes par seconde' seconde b : 4 tonnes par seconde). Les valeurs numériques indiquées correspondent à peu près à la centrale Bugey 2 (Ain).

Les neutrons libérés par fission sont rapides ; ils sont ralentis par l'eau du circuit primaire, qui joue ainsi le rôle supplémentaire de fluide **modérateur.** Pour éviter l'emballement du réacteur, il faut aussi **absorber** les neutrons excédentaires : ce rôle est dévolu à des barres de cadmium qui pénètrent automatiquement plus ou moins profondément dans le cœur du réacteur.

• **Dans les centrales surrégénératrices,** le combustible est le plutonium 239, allié à l'uranium 238 (le plus abondant à l'état naturel) sous forme d'oxydes.
La fission du plutonium 238 libère 2 ou 3 neutrons **rapides** captés par ^{238}U, ce qui le transforme en ^{239}Pu. Dans ce cas, les neutrons lents n'agissent pas : l'eau du circuit primaire (fluide modérateur) doit être remplacée par un liquide qui n'interagit pas avec les neutrons et ne les freine pas ; on utilise le sodium liquide.
Lorsqu'un nucléide $^{239}_{93}$Pu se désintègre, il s'en crée à partir de $^{238}_{92}$U, en moyenne, plus d'un autre, d'où le qualificatif de surrégénératrices donné à ces centrales, qui créent des noyaux fissiles en consommant des noyaux fertiles.

• Les **centrales thermonucléaires** sont encore à l'état du projet. On cherche actuellement (1980) à provoquer la fusion deutérium-tritium en rapprochant les noyaux sous l'impact de rayons lasers.

2. Effets biologiques des radiations.

• Les rayons α, β et surtout γ sont dangereux pour le corps humain car ils détériorent les cellules. On peut s'en protéger, au moins partiellement, par des parois absorbantes en plomb.

• L'unité d'activité radioactive est le **becquerel** (symbole : Bq), qui correspond à une désintégration par seconde ; on utilise aussi le **Curie** (1 Ci = 3,7 . 10^{10} Bq).

• **Le röntgen** (symbole : R) est l'unité de dose de rayonnement γ (ou X) : 1 R fait apparaître environ 2 . 10^9 paires d'ions dans 1 cm^3 d'air pris dans les conditions normales.

• **Le rem** est la dose radioactive qui produit, chez l'homme, autant d'effets destructeurs que l'absorption de 1 röntgen de rayons γ.

• Les radiations ont aussi des applications bénéfiques. Les photons γ émis par les « bombes au cobalt » sont utilisés pour détruire les cellules

cancéreuses. L'absorption de certains éléments est parfois spécifique de certains tissus vivants (iode par la thyroïde, phosphore par le cerveau...). En introduisant dans l'organisme des isotopes radioactifs de ces éléments, on peut contrôler le fonctionnement de la thyroïde ou l'étendue de certaines tumeurs cérébrales... L'injection de sodium radioactif dans le sang permet de localiser un caillot dans un vaisseau sanguin etc...

3. Utilisation en chimie et en métallurgie.

- En « marquant » certains atomes, c'est-à-dire en les rendant radioactifs, on a pu suivre leur évolution lors de réactions dont on a ainsi élucidé le mécanisme.
- La photographie par des rayons γ ayant traversé une pièce métallique épaisse, montre les éventuelles imperfections de structure.

4. Datation.

Les radionucléides disparaissent peu à peu d'un échantillon radioactif ; on détermine son âge approximatif en mesurant sa radioactivité actuelle.

- Les âges inférieurs à environ 10 000 ans s'évaluent en dosant le **carbone 14,** radioactif β^-, contenu dans les résidus animaux ou végétaux.
- L'âge des roches anciennes (jusqu'à quelques centaines de millions d'années) a été évalué en mesurant leur radioactivité naturelle résiduelle. Les plus anciennes roches terrestres ont environ 3 milliards d'années. L'âge des plus vieux météorites tombés sur Terre est d'environ $5 \,.\, 10^9$ ans.
- L'analyse spectrale montre que l'hydrogène est l'élément le plus abondant du système solaire et que l'abondance relative des éléments dans l'Univers a tendance à décroître avec leur nombre atomique. Certains en ont tiré argument pour supposer que tous les éléments ont été créés à partir d'hydrogène, de fusion en fusion. L'étude de ces fusions, qui se poursuivent dans les étoiles, fait évaluer à quelque dix milliards d'années l'âge de l'Univers...

Assez curieusement, ce chapitre, qui a débuté à une échelle subatomique ($\Delta x \sim 10^{-15}$ m) s'achève par une évaluation spéculative de l'âge de l'Univers ($\Delta t \sim 10^{17}$ s).

Lecture.

La course aux dix-sept atomes.

Comment nous avons obtenu le mendélévium, le nouvel élément destiné à occuper la case 101, dans le tableau de classification des éléments chimiques ? Ce fut en bombardant l'einsteinium 99 avec des noyaux d'hélium, mais cette expérience donna lieu à une véritable course d'obstacles que nous allons raconter.

La réaction nucléaire est simple : $^{253}_{99}E + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{256}_{101}Md + ^{1}_{0}n$

et nous l'avons obtenue dans un cyclotron aménagé de telle façon que le faisceau d'hélium puisse frapper avec précision une toute petite cible.

La cible était un rond minuscule découpé dans une feuille d'or au dos de laquelle on a fixé par gavalnisation une couche d'einsteinium, mince au point d'être invisible : pas plus de quelques milliards d'atomes...

L'aimant du cyclotron qui maintenait les noyaux d'hélium accélérés dans leur orbite spirale était assez puissant pour maintenir un tournevis en position verticale ou pour suspendre dans l'air de lourds objets en fer.

Quant au jet de noyaux d'hélium, on pouvait le voir sous l'apparence d'un mince faisceau de lumière bleue quand on le laissait s'échapper dans l'air autour de la cible. On pouvait alors le photographier à travers une cuve d'eau de cinq pieds qui tenait lieu de fenêtre d'observation sur la pièce où le cyclotron était logé. C'est ce faisceau qui frapperait la cible et, avec un peu de chance, fixerait deux protons d'hélium sur les 99 protons d'einsteinium de la cible et produirait le mendélévium.

Au cours de notre expérience, toute la pièce du cyclotron était scellée pendant le bombardement de la cible. Bernard Harvey et Albert Ghierso se tenaient derrière la porte ; celle-ci était faite d'une grande cuve d'eau montée sur roulettes.

Toute l'équipe attendait le coup d'envoi de cette épreuve inhabituelle. La première expérience devait fournir **un** *atome de mendélévium, deux tout au plus ! Cet atome, il fallait le séparer des milliards d'atomes d'einsteinium et l'identifier — le tout en moins d'une demi-heure.*

Aussitôt que le signal all clear *fut donné, Harvey et Ghierso ouvrirent la porte et se ruèrent à l'intérieur. Harvey prit rapidement le cadre, Ghierso enleva la deuxième feuille d'or avec des pinces et la plaça dans un tube à essais. A toute vitesse il parcourut les étroits couloirs et monta l'escalier qui menaient à un laboratoire provisoire où il donna le tube à Gregory Choppin qui le chauffa dans une solution pour dissoudre l'or. Il obtint ainsi une solution contenant l'or, quelques autres éléments divers et* **peut-être** *quelques atomes de ce mendélévium que nous voulions découvrir. Les autres opérations chimiques devaient être effectuées à une distance d'une lieue, sur « la colline » au laboratoire des radiations. Et la course folle reprit. Ghierso attendait au volant d'une voiture de course à l'extérieur du bâtiment du cyclotron. Nous espérions avoir obtenu quelques atomes de Mendélévium 101 ;*

il fallait à tout prix les isoler et les identifier, avant qu'ils fussent tous désintégrés. En effet, le mendélévium a une période si courte que la moitié de tout échantillon se désintègre en une demi-heure environ, devenant un isotope du fermium qui, à son tour, se désintègre par fission spontanée.

Les quelques gouttes de la solution qui contenaient ces précieux atomes furent transportées en un temps record au bâtiment de chimie nucléaire sur la colline. Harvey et Choppin se ruèrent dans le labo où Stanley Thompson les attendait avec l'appareillage nécessaire pour séparer l'élément 101 de l'einsteinium, de l'or et de tout autre élément qui aurait pu se trouver dans la solution.

Le liquide fut d'abord aspiré à travers une colonne d'échanges d'ions pour le débarrasser de l'or. L'or est retenu dans la colonne tandis que la solution contenant le mendélévium s'égoutte par le bas.

Les gouttes ainsi recueillies furent séchées et redissoutes. Ensuite Thompson les fit passer par une deuxième colonne pour séparer l'élément 101 de tous les autres éléments présents dans la solution. Cette fois, à la sortie de la colonne, les gouttes furent placées une par une sur de petites plaques en platine et séchées sous une lampe de chauffage. Ces plaques furent portées dans une chambre de comptage où Ghierso les soumit à des compteurs spéciaux : une goutte par compteur.

S'il y avait du mendélévium dans les gouttes examinées, la désintégration devait le révéler. Chaque fois qu'un atome du nouvel élément se désintégrerait, les fragments de fission successifs provoqueraient une gerbe explosive d'ionisation et cette impulsion de courant s'inscrirait sur la bande enregistreuse, sous forme d'une discontinuité.

Ce qui caractérise les atomes d'éléments lourds évasifs, c'est qu'ils ne peuvent être identifiés de façon certaine qu'au moment où ils cessent d'être cet élément et deviennent quelque chose d'autre. C'est un peu comme l'homme qui ne compte son argent que lorsqu'il le dépense.

A la première expérience, nous attendîmes plus d'une heure avant que la plume enregistreuse s'élève à mi-hauteur et retombe. Ainsi fut marquée la désintégration du premier atome de mendélévium connu.

Comme il s'agissait évidemment d'un événement peu ordinaire dans la vie du laboratoire des radiations, nous avions relié le compteur au signal d'alarme d'un poste d'incendie dans le hall, de sorte que la sonnerie fut déclenchée chaque fois qu'un atome de l'élément 101 fut désintégré. C'était une façon très efficace d'annoncer un événement nucléaire, mais nous dûmes la remplacer par des moyens plus silencieux, sur la recommandation expresse des pompiers.

Nous trouvâmes seulement un ou deux atomes de mendélévium par expérience ; nous la répétâmes une douzaine de fois, obtenant un total de 17 atomes du nouvel élément. C'était le prix de ces courses contre la montre.

G. T. SEABORG et E. G. VALENS (1955)

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

• Un noyau est constitué par A ________ (Z ________ et N ________). A est aussi appelé « ________ » et Z « ________ ».

• La masse d'un atome est pratiquement égale à la somme des masses du ________ et des ________. Par contre, la masse du noyau est ________ à la somme des masses des ________ qui le constituent.

• Un noyau stable se trouve en général dans son état ________, mais il peut aussi se trouver dans des ________. Par retour vers le niveau ________, il émet des ________, dont l'énergie est de l'ordre du ________.

• Dans un échantillon radioactif, le nombre de ________ décroît ________ avec le ________. La durée T au bout de laquelle la moitié des ________ s'est ________ est appelée ________. La constante ________ λ s'exprime en ________ dans le système international d'unités.

• La radioactivité α consiste en une émission de noyaux d' ________ par les noyaux dont le ________ A est en général ________ à 200.

• La radioactivité β^- consiste en une émission d' ________ par les noyaux. On l'observe pour les noyaux relativement riches en ________.

• En radioactivité β^+, un ________ émet un ________, dont les caractéristiques sont les mêmes que celles des ________ (sauf pour la ________, qui est en ce cas ________).

• Comme effet secondaire de la radioactivité β, il y a, comme pour la radioactivité α, émission de ________ par les noyaux formés dans un état ________. Il y a, de plus, émission de ________, ce qui assure la conservation de l' ________ et de la ________.

• Lors d'une fission, la cassure d'un gros ________ en deux fragments s'effectue avec libération d'________. A masses initiales égales, la ________ de petits noyaux libère encore plus d'________.

Le tableau suivant rappelle quelques données numériques nécessaires pour la résolution de certains exercices.

Masses (en u)	
Électron	0,000 548
Neutron	1,008 665
Proton	1,007 277
Alpha	4,001 506

Petites questions.

1. Les noyaux des atomes de deux éléments différents peuvent-ils avoir le même nombre de protons ? de neutrons ? de nucléons ?

2. La masse d'un noyau est-elle la même lorsqu'il est dans son état fondamental ou dans un état excité ?

3. Dans le diagramme $Z \rightarrow N$, où est situé un ensemble de noyaux possédant le même nombre de nucléons ?

4. Une émission γ accompagne-t-elle nécessairement chaque désintégration α, β^- ou β^+ ?

5. Dans une réaction nucléaire, y a-t-il conservation du nombre de charge ? du nombre de masse ? du nombre de neutrons ?

6. L'électron et l'anti-électron sont notés ${}_{-1}^{0}e$ et ${}_{+1}^{0}e$. Peut-on dire que leur nombre atomique est égal à ∓ 1 ?

7. Le radium est radioactif α. Au bout de quelques heures, un échantillon de radium initialement pur devient aussi émetteur β^-. Interprétez.

8. Une fission peut-elle être considérée comme une transmutation ?

Applications immédiates :

9. On rappelle que le rayon d'un noyau, supposé sphérique, est donné par $R \approx R_0 \sqrt[3]{A}$, où $R_0 = 1{,}33$ fm et A désigne le nombre de masse.

a) Déterminez l'expression donnant en m³ la valeur numérique du volume d'un noyau, en fonction de A.

b) En déduire une propriété de la masse volumique des noyaux.

10. Calculez les masses d'un noyau de cobalt 60 et d'un noyau de nickel 60. Les masses d'un atome associé à ces nucléides ${}_{27}^{60}Co$ et ${}_{28}^{60}Ni$ sont respectivement 59,933 806 u et 59,930 783 u.

Réponses : 59,919 010 u et 59,915 439 u.

11. a) Calculez le rapport des rayons des trajectoires de deux ions de même charge évoluant dans le champ magnétique d'un spectrographe de masse dont le principe a été donné à la figure 1 (page 477).

b) Si un ion ${}_{17}^{35}Cl^-$ décrit un cercle de 50,0 cm de rayon, quel sera le rayon du cercle décrit par un ion ${}_{17}^{37}Cl^-$? Les masses des atomes correspondants sont 34,968 9 u et 36,965 9 u.

Réponse : **b)** 51,4 cm.

12. a) La masse de l'atome de bore est 11,009 305 u. Calculez la masse du noyau ${}_{5}^{11}B$ (en u) et son énergie au repos (en MeV).

b) La figure ci-dessous représente quelques transitions γ entre niveaux d'énergie du noyau de bore. Déterminer les énergies des divers photons émis.

c) Le bore, supposé au repos, émet le photon d'énergie maximale. En le supposant libre de reculer, calculer sa quantité de mouvement de recul, son énergie totale et sa vitesse (exprimée en fraction de la célérité de la lumière).

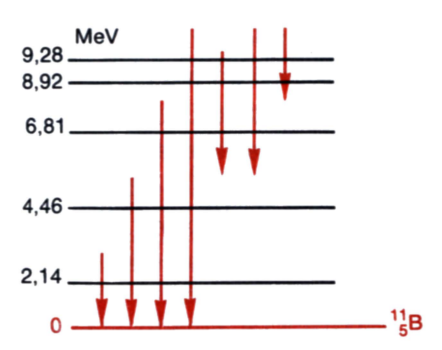
Réponses :

a) 11,006 565 u ;

b) $E_0 = 10\,252{,}4$ MeV.

c) $pc = 9{,}28$ MeV ; $E \approx E_0$;

$\beta = \frac{pc}{E} \approx 9 \cdot 10^{-4}\ c.$



13. a) Transformez le diagramme $Z \rightarrow N$ de la figure 21 (page 494) en un diagramme $Z \rightarrow A$.

b) Le nombre de nucléons de tous les nucléides de cette famille peut s'exprimer par une relation de la forme $\alpha n + \beta$, où α et β sont deux petits nombres entiers, et n un entier dépendant des noyaux envisagés. Déterminez α et β.

14. Un noyau de bismuth ${}_{83}^{212}Bi$ au repos émet une particule α dont l'énergie cinétique est 6,09 MeV (sans émission γ secondaire).

a) Calculez l'énergie totale, la quantité de mouvement et la vitesse de la particule α.

b) Calculez la quantité de mouvement, l'énergie totale, l'énergie cinétique et la vitesse initiale de recul du noyau de thallium ${}_{81}^{208}Tl$ formé.

Les masses des noyaux sont les suivantes : 211,945 713 u et 207,937 541 u.

Réponses : **a)** $E \approx 3\,733{,}4$ MeV ; $pc \approx 213{,}2$ MeV ; $\beta \approx 0{,}057\ c$.
b) $pc \approx 213{,}2$ MeV ; $E \approx 193\,689{,}8$ MeV ; $E_c \approx 0{,}12$ MeV ; $\beta \approx 10^{-3}\ c$.

15. Calculez l'énergie totale de liaison et l'énergie de liaison par nucléon pour le nucléide $^{16}_{8}$O. La masse de l'atome correspondant est 15,994 915 u.

Réponses : 127,62 MeV ; 7,98 MeV/nucléon.

16. Un noyau de cobalt 60 émet, par radioactivité β^-, un électron d'énergie cinétique 0,30 MeV, sans émission de neutrino.

a) Écrire le schéma de réaction.

b) En supposant le noyau émetteur au repos, calculez les énergies totales et cinétiques, les quantités de mouvement et les vitesses des particules formées.
On donne les masses des noyaux : $^{60}_{27}$Co (59,919 010 u) et $^{60}_{28}$Ni (59,915 439).

Réponses : **b)** Électron : $E \approx 0{,}81$ MeV ; $pc \approx 0{,}63$ MeV ; $\beta \approx 0{,}78\ c$.
Nickel : $pc \approx 0{,}63$ MeV ;

$E \approx E_0 \approx 55\,810{,}0$ MeV ;

$E_c \approx \dfrac{1}{2}\dfrac{(pc)^2}{E_0} \approx 3{,}6$ eV ; $V \approx 3{,}4$ km/s.

17. Une substance radioactive de période $T = 100$ s émet, à partir de la date $t = 0$, $2{,}0 \,.\, 10^7$ particules α par seconde.

a) Calculez la constante radioactive et la vie moyenne de cet échantillon.

b) Calculez le nombre N_0 de radionucléides présents dans la substance à la date $t = 0$.

c) Combien de nucléides radioactifs reste-t-il dans la substance au bout d'une minute ? d'une heure ? de 12 heures ?

Réponses : **a)** $\lambda \approx 6{,}9 \,.\, 10^{-3}\ \text{s}^{-1}$; $\tau \approx 144$ s.

b) $N_0 = \dfrac{1}{\lambda} \,.\, \dfrac{\Delta N}{\Delta t} \approx 2{,}9 \,.\, 10^9$.

c) $2{,}8 \,.\, 10^9$; $2{,}4 \,.\, 10^8$; $1{,}1 \,.\, 10^4$.

18. Complétez les schémas de réaction suivants, en écrivant la nature du nucléide X.

$$^{4}_{2}\text{He} + {}^{14}_{6}\text{C} \longrightarrow \text{X} + {}^{1}_{1}\text{H}$$
$$\text{X} + {}^{14}_{7}\text{N} \longrightarrow {}^{15}_{8}\text{O} + {}^{1}_{0}n$$
$$\text{X} + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{27}_{12}\text{Mg} + {}^{1}_{1}\text{H}$$
$$^{0}_{0}\gamma + {}^{27}_{13}\text{Al} \longrightarrow \text{X} + 2\,{}^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{0}n$$
$$\text{X} \longrightarrow {}^{13}_{6}\text{C} + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu$$
$$^{4}_{2}\text{He} + \text{X} \longrightarrow {}^{57}_{27}\text{Co} + 2\,{}^{1}_{0}n$$
$$^{22}_{10}\text{Ne} + {}^{242}_{94}\text{Pu} \longrightarrow \text{X} + 4\,{}^{1}_{0}n$$
$$^{16}_{8}\text{O} + {}^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow \text{X} + 5\,{}^{1}_{0}n$$

19. Quelle doit être l'énergie minimale d'un photon γ pour déclencher la réaction

$$\gamma + {}^{24}_{12}\text{Mg} \rightarrow {}^{23}_{12}\text{Mg} + {}^{1}_{0}n \ ?$$

Les masses des atomes sont : 23,985 04 *u* pour ^{24}Mg et 22,994 12 u pour ^{23}Mg.

Réponse : 16,5 MeV.

20. Calculez l'énergie libérée par atome U par la fission suivante :

$$^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{91}_{40}\text{Zr} + {}^{142}_{58}\text{Ce} + 3\,{}^{1}_{0}n + 6\,{}^{0}_{-1}e + ({}^{0}_{0}\nu + {}^{0}_{0}\gamma)\,.$$

On donne les masses des atomes : 235,043 9 u ; 90,905 3 u ; 141,909 0 u.

Réponse : 194,6 MeV.

21. Calculez l'énergie libérée par atome H par la fusion suivante :

$$^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{2}_{1}\text{H}\,.$$

On donne les masses des atomes : 1,007 825 u pour ^{1}H et 2,014 102 u pour ^{2}H.

Réponse : 2,23 MeV.

Approfondissement.

22. Évaluez le volume moyen offert à un nucléon dans un noyau.

Réponse : environ 10^{-44} m^3.

23. Dans le noyau ^{35}Cl, l'énergie de liaison vaut 8,51 MeV par nucléon. Calculez, en u, la masse de l'atome de chlore 35. (Voir les données dans le tableau, en tête.)

24. On donne les masses des atomes suivants :

15,994 9 u pour l'oxygène 16 ;
15,003 0 u pour l'oxygène 15 ;
15,000 1 u pour l'azote 15.

Calculez les énergies minimales qu'il faut fournir pour enlever un proton ou un neutron à $^{16}_{8}$O.

Réponses : 12,1 MeV ; 15,6 MeV.

25. Le neutron isolé n'est pas stable : il subit, en moyenne au bout de 1 000 s, une désintégration β^-.

a) Écrire le schéma de réaction.

b) Le neutron, supposé au repos, expulse un électron dont l'énergie cinétique est égale à l'énergie au repos (0,51 MeV) et le proton formé « recule » avec une quantité de mouvement p telle que $pc = 0{,}50$ MeV. Calculez l'énergie du neutrino émis dans ce cas.

c) Calculez les valeurs des quantités de mouvement du neutrino et de l'électron.

d) Calculez (par exemple en utilisant la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \text{A}$) les écarts angulaires entre les trajectoires du proton, de l'électron et du neutrino. Faire un schéma, à une échelle que vous préciserez pour les quantités de mouvement, de la situation après désintégration.

26. Les désintégrations successives subies par la famille de l'uranium 238 (figure 21) peuvent être résumées par le bilan suivant :

$$^{238}_{92}U \rightarrow 8\ ^{4}He + ^{206}_{82}Pb\,.$$

La période de l'uranium, largement supérieure à celle de tous ses descendants, vaut 4,5 . 10^9 ans.

a) Calculez le nombre de noyaux de plomb formé, en un an, dans 1 kg d'uranium. Calculez la masse de plomb ainsi obtenue.

b) Déterminez la masse et le volume d'hélium dégagé chaque année.

27 Ayant découvert un minerai d'uranium dans votre jardin, vous vous proposez d'en déterminer l'âge.

a) Par des méthodes chimiques, vous constatez que le minerai contient 5,0 . 10^{-5} kg de plomb pour 1 kg d'uranium 238. En déduire le rapport actuel $\frac{N_{Pb}}{N_U}$ du nombre de noyaux de plomb au nombre de noyaux d'uranium.

b) Ayant constaté que les minerais non uranifères voisins du vôtre ne contiennent pas de plomb, vous déduisez que tout le plomb formé provient probablement des N_0 noyaux d'uranium initiaux existant lors de la formation du minerai à la date $t = 0$. Exprimez, en fonction du temps, les nombres actuels de noyaux d'uranium et de plomb formé (vous supposerez que les noyaux d'uranium disparus sont pratiquement tous passés à l'état de plomb).

c) En utilisant l'approximation $\text{Log}_e(1 + x) \simeq x$ (pour $x \simeq 0$), exprimez (en années) l'âge t de votre minerai, en fonction de la constante radioactive λ

et du rapport $\frac{N_{Pb}}{N_U}$.

d) La demi-vie de l'uranium 238 est de 4,5 . 10^9 ans (ce qui est très largement supérieur à celles de tous ses descendants). Calculez l'âge de votre minerai.

28. Dans les théories statistiques, on considère que la probabilité pour qu'un radionucléide, envisagé isolément, soit désintégré au bout d'un intervalle de temps t, est $\mathcal{P} = 1 - e^{-\lambda t}$ (λ est la constante radioactive).

a) Quelle est la probabilité de désintégration immédiate ?

b) Quelle est la probabilité de non-désintégration au bout du même intervalle de temps ?

c) Au bout de combien de temps a-t-on une chance sur deux pour que l'atome soit désintégré ?

d) Quelle est la probabilité pour que l'atome, intact à la date $t = 0$, se désintègre au bout d'un intervalle de temps très court ($\lambda \Delta t \ll 1$). On rappelle que $e^x \simeq 1 + x$ lorsque x est voisin de zéro. En déduire une interprétation de la constante radioactive.

29. On rappelle que la fission d'un noyau d'uranium 235 libère en moyenne 200 MeV.

a) Calculez la puissance d'un réacteur qui consomme 1 kg d'uranium 235 par jour en fonctionnant continûment. La transformation en énergie électrique se fait avec un rendement de 30 %. Quelle est la puissance électrique de la centrale ?

b) Une tonne de charbon peut fournir une énergie électrique de 10^{10} joules. Quelle masse de charbon faut-il brûler par jour pour disposer de la même énergie ?

30. Par suite de réactions de fusion nucléaire, le Soleil rayonne à chaque seconde une énergie évaluée à 4 . 10^{26} J.

a) Calculez la diminution de la masse en un an ?

b) En supposant un taux de diminution constant, pendant combien de temps le Soleil (de masse actuelle 2 . 10^{30} kg) pourrait-il rayonner ?

31. a) Lorsque, dans la haute atmosphère, un neutron faisant partie du rayonnement cosmique rencontre un noyau d'azote $^{14}_{7}N$, la réaction donne naissance à du carbone $^{14}_{6}C$, isotope radioactif du carbone $^{12}_{6}C$.
Écrire le bilan de la réaction ; précisez la nature de la particule apparue au second membre avec le carbone $^{14}_{6}C$.
Le noyau $^{14}_{6}C$ se désintègre en émettant une particule β^- : écrire le bilan de la réaction de désintégration.

b) Des végétaux absorbent le dioxyde de carbone de l'atmosphère provenant indifféremment du carbone 14 — de période (ou demi-vie) $T = 5\,570$ ans — et du carbone 12. La proportion de ces deux isotopes est la même dans les végétaux et dans l'atmosphère.
Lorsque la plante meurt, elle cesse d'absorber le gaz carbonique, et le carbone 14 qu'elle contient se désintègre alors sans être renouvelé.
Au bout de combien de temps après la mort d'une plante, la quantité de carbone 14 qu'elle contenait lors de sa mort aura-t-elle diminué de moitié ?
Si N_0 est le nombre d'atomes de carbone 14 contenu dans la plante au moment de sa mort, montrer que le nombre N d'atomes de carbone 14 restant au bout du temps t est donné par la relation :

$$N = N_0 \,.\, e^{-0{,}693t/T}\,.$$

Application : On compare l'émission β^- d'un spécimen de bois trouvé dans une tombe égyptienne et celle d'un spécimen analogue, encore vivant, contenant la même quantité de carbone. Le rapport des indications du compteur est $r = 0{,}56$.
Sachant que l'indication du compteur de particules β^- est proportionnelle au nombre des noyaux qui se désintègrent en un temps donné ;
calculer l'âge du spécimen égyptien.

Baccalauréat expérimental : Juin 1979.

32. Une étoile utilise 10^9 kg d'hélium par seconde pour réaliser une fusion dont le bilan est :

$$3\ {}^4_2He \rightarrow {}^{12}_6C.$$

Calculez la puissance de l'émission stellaire (masse de l'atome ^4He : 4,002 60 u).

Réponse : 5,7 . 10^{22} W.

33. a) Montrer que le nombre ΔN de noyaux qui se désintègrent à la date *t*, pendant un court intervalle de temps Δt, est tel que $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N_0\, e^{-\lambda t}$ (où N_0 désigne le nombre de radionucléides présents à la date $t = 0$; $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ est l'activité de la substance).

b) A l'aide d'un détecteur approprié, on enregistre (à diverses dates *t* indiquées dans le tableau 1 suivant) le nombre d'impulsions par minute, fournies par une substance radioactive.

Représentez graphiquement les variations de l'activité $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ de la substance en fonction du temps.

c) Représentez graphiquement les variations de $\text{Log}_e \frac{\Delta N}{\Delta t}$ en fonction du temps (Log_e désigne le logarithme népérien). En déduire, par une méthode graphique, la valeur de la constante radioactive λ (exprimée en min^{-1}).

d) Calculez la période et la vie moyenne de l'échantillon.

Réponses : **a)** Dériver ; **c)** pente de la droite : 0,50 . 10^{-2} min^{-1} ; **d)** 137 min ; 198 min.

34 Le radium est un élément radioactif α dont la période est de plusieurs centaines d'années. Afin d'étudier le caractère aléatoire des émissions, on utilise un détecteur associé à un compteur qui enregistre les nombres successifs *k* de désintégrations par minute ; on comptabilise le nombre *p* de fois où l'on a décompté *k* désintégrations par minute. On obtient les résultats du tableau 2 suivant :

1) a) Calculez le nombre total *P* d'événements enregistrés.

b) Montrez que la probabilité, notée $\mathcal{P}_k(1)$, pour qu'il se produise *k* désintégrations dans la minute qui vient, est : $\mathcal{P}_k(1) = \frac{p}{P}$.

c) Représentez graphiquement l'histogramme indiquant les variations de $\mathcal{P}_k(1)$ en fonction de *k*.

2) a) Le nombre de désintégrations observées par minute oscille autour d'une certaine valeur centrale, appelée *espérance*, qui est définie comme étant la moyenne des diverses valeurs de *k* pondérées par leur probabilité : $k \,.\, \mathcal{P}_k$. Calculez l'espérance *E* (somme de tous les termes tels que $k\mathcal{P}_k$).

b) La dispersion autour de l'espérance peut être caractérisée par la *variance*, définie comme étant la moyenne pondérée des carrés des écarts entre l'espérance et les diverses valeurs de la variable (la moyenne étant pondérée par les probabilités). Calculez cette variance *V*, somme de tous les termes tels que $(k - E)^2 \times \mathcal{P}_k$. La comparer à l'espérance.

c) L'*écart-type* σ est une autre variable indiquant la dispersion autour de la valeur centrale : $\sigma = \sqrt{V}$. Calculez l'écart-type. Sur 1 000 observations réalisées, combien de fois obtient-on *k* désintégrations par minute lorsque *k* est compris entre $E - \frac{\sigma}{2}$ et $E + \frac{\sigma}{2}$? entre $E - \sigma$ et $E + \sigma$? entre $E - 2\sigma$ et $E + 2\sigma$? Représentez les résultats sur l'histogramme.

Tableau 1 pour l'exercice 33.

Date *t* (en h)	0	0,5	1,0	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Nombre d'impulsions par minute $\frac{\Delta N}{\Delta t}$	4 763	4 095	3 520	3 025	2 233	1 648	1 215	900	765	440	360	265

Tableau 2 pour l'exercice 34.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
p	1	9	23	48	80	112	133	139	129	107	81	56	36	22	12	6	3	2	1

25 Aspect ondulatoire des corpuscules

I. Onde associée à un corpuscule.

1. Hypothèse de Louis De Broglie.
2. Confirmations expérimentales.
3. Ondes de De Broglie.

II. Domaine d'intervention de la mécanique quantique.

1. Longueurs d'ondes associées à diverses particules.
2. Quand faire intervenir la Mécanique Quantique ?

III. Justification de l'existence des niveaux d'énergie.

1. Particule dans une « boîte à une dimension ».
2. Détermination des niveaux d'énergie.
3. Interprétation de la radioactivité α.
4. Autres succès de la Mécanique Quantique.

IV. Conclusion.

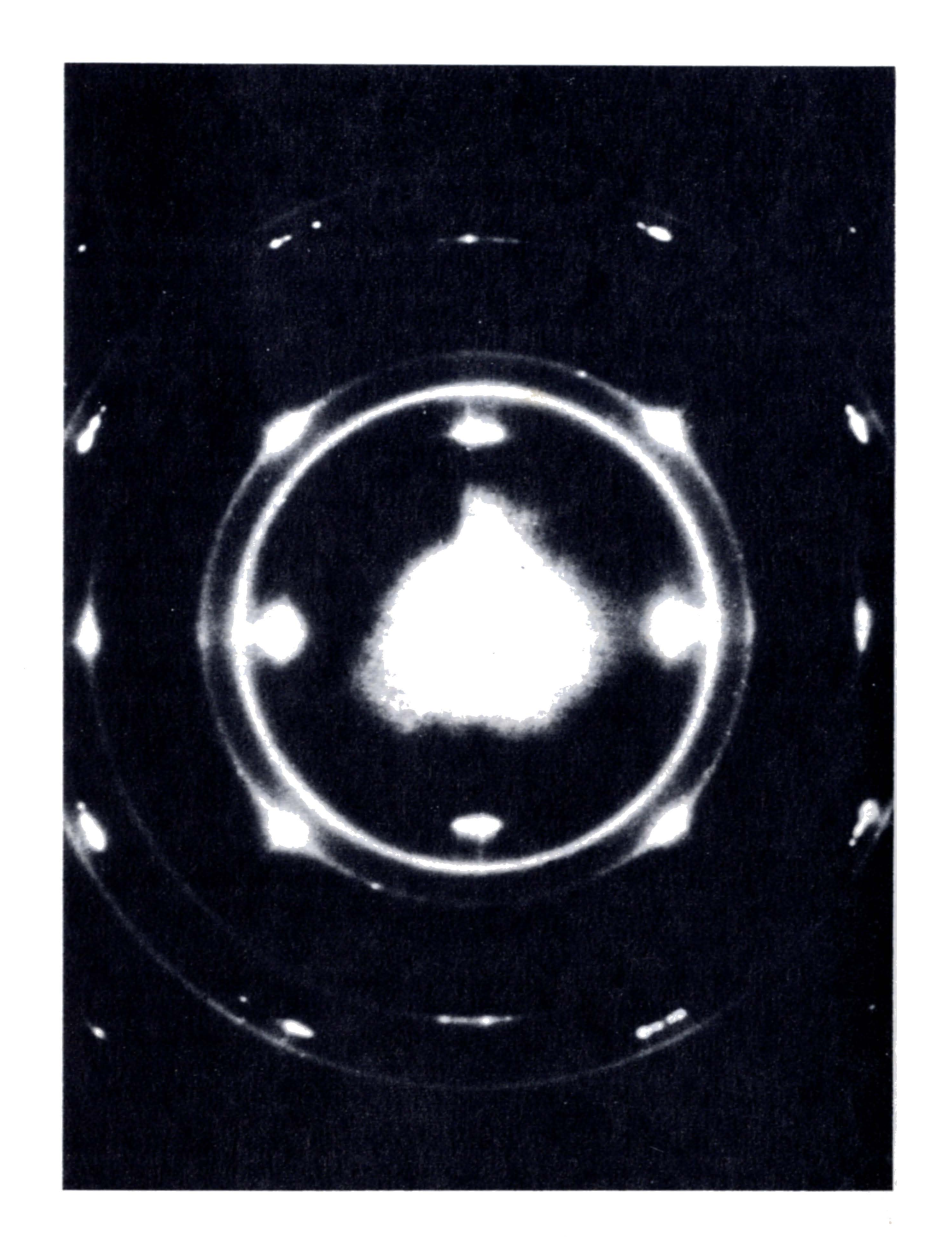


Figure de diffraction d'électrons par des cristaux de bromure d'argent. Le principe du montage est indiqué à la page 513.

Le photon est une particule immatérielle qui a été imaginée pour rendre compte du caractère corpusculaire des phénomènes lumineux, considérés longtemps comme exclusivement ondulatoires. Inversement, Louis Victor De Broglie a proposé d'associer une onde à tout corpuscule matériel en mouvement. Cette idée s'est ensuite avérée très féconde.

I. Onde associée à un corpuscule.

1. Hypothèse de Louis De Broglie.

a) Rappels.

- **Les deux aspects complémentaires** des phénomènes électromagnétiques ont été signalés plus haut. Un rayonnement électromagnétique peut être décrit :

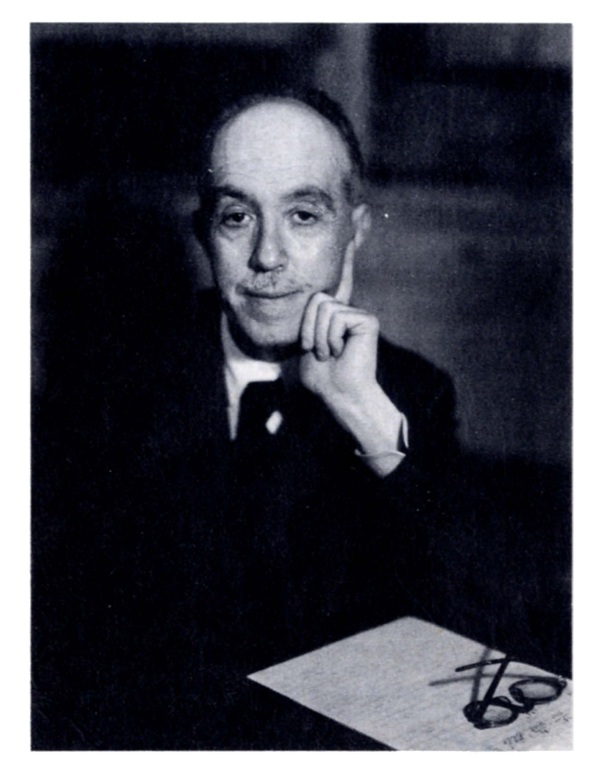
— **par une onde** progressive pratiquement monochromatique, caractérisée par sa **fréquence** temporelle ν (ou sa pulsation $\omega = 2\,\pi\nu$) et son **vecteur d'onde** $\vec{k}$, dont le sens est celui de la propagation. La valeur de $\vec{k}$ se déduit de la longueur d'onde λ par $k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$.

— **par un flux de photons,** chacun d'énergie $E = h\nu$ et de quantité de mouvement $\vec{p} = h\vec{k}$.

On peut à la rigueur se contenter d'utiliser l'aspect ondulatoire pour interpréter les phénomènes d'interférences ou de diffraction. Par contre, le concept de photon s'impose pour décrire certaines actions de la « lumière » sur la matière (effets photo-électrique, Compton...), ou les émissions **quantifiées** de radiations lumineuses, X ou γ par les atomes ou les noyaux.

- La notion de **niveaux d'énergie** est très générale : elle intervient aussi bien pour les atomes que pour les noyaux. Par exemple, les niveaux d'énergie de l'atome H forment une suite **discontinue ;** ils sont donnés, à une constante additive près, par $E_n = -\dfrac{E_0}{n^2}$, où n est un **nombre entier** (chapitre 23, page 460).

- Vous avez étudié plus haut une autre catégorie de phénomènes physiques où s'introduisent aussi des **discontinuités** faisant intervenir des **entiers :** les fréquences naturelles de **vibration** d'une corde tendue



Louis Victor De Broglie.

Pour un photon :
Variables ondulatoires : ω et $\vec{k}$

$$\omega = 2\,\pi\nu \qquad k = \frac{2\,\pi}{\lambda} \qquad \omega = kc$$

Variables corpusculaires : E et $\vec{p}$

$$E = h\nu \qquad p = \frac{h}{\lambda} \qquad E = pc$$

sont des **multiples** de sa fréquence fondamentale, et les réglages d'une expérience de Melde consistent à réaliser la **résonance** entre la fréquence imposée et l'une des fréquences naturelles (page 363).

• **En résumé,** les deux aspects d'une radiation électromagnétique sont liés : l'énergie d'un **corpuscule** photon est proportionnelle à la fréquence de **l'onde.** De plus, la quantification des émissions de photons rappelle certains phénomènes ondulatoires de résonance.

b) Longueur d'onde associée à une particule en mouvement.

Guidé en particulier par les résultats que nous venons de rappeler, Louis De Broglie a supposé, par analogie avec le photon, que **toute particule de quantité de mouvement $\vec{p}$ peut être associée à une onde de vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$.**

La longueur d'onde λ associée à un corpuscule est donc telle que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{h/2\pi}, \quad \text{d'où :} \quad \boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$$

où h désigne la **constante de Planck.**

Cette relation étend aux particules de masse non nulle une relation qui n'était jusqu'ici applicable qu'aux photons. Ainsi, la **dualité onde-corpuscule** apparaît non seulement pour les photons, mais aussi pour toute la matière.

2. Confirmations expérimentales.

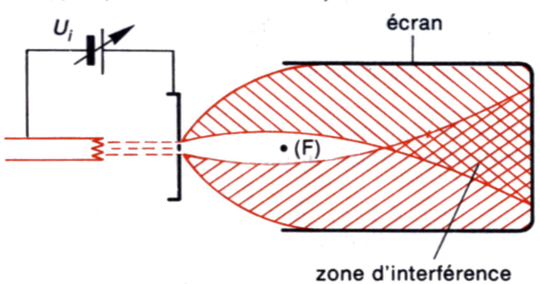
L'hypothèse de Louis De Broglie, proposée en 1923, n'a reçu de confirmations expérimentales qu'à partir de 1926, lorsque des expériences de caractère typiquement ondulatoire ont été réussies, d'abord avec des faisceaux d'électrons, puis avec d'autres corpuscules.

Étudions-les succinctement.

a) Interférences électroniques.

• Un faisceau d'électrons, issu d'une source S, est d'abord fractionné en deux parties que l'on dévie ensuite par un fil fin (F) chargé positivement (figure 1). Les deux faisceaux se recouvrent ensuite partiellement. Sur un écran d'oscillographe, on observe des **franges d'interférences** dans la région commune aux deux faisceaux.





1. Dispositif permettant d'obtenir des interférences entre deux faisceaux d'électrons.

• En mesurant l'interfrange et en tenant compte des caractéristiques géométriques du dispositif, on trouve que **la longueur d'onde associée aux électrons est de l'ordre de l'angström** (1 Å = 10^{-10} m).

• Accélérés sous tension U de quelques centaines de volts, les électrons ne sont pas relativistes. Leur énergie cinétique vaut :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} = eU, \quad \text{d'où} \quad p = \sqrt{2\,emU}.$$

La longueur d'onde associée est : $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2\,emU}}$.

Pour $U = 200$ V, par exemple, on trouve :

$$\lambda \approx \frac{6{,}62\,.\,10^{-34}}{\sqrt{2 \times 1{,}6\,.\,10^{-19} \times 9{,}1\,.\,10^{-31} \times 200}} \approx 8{,}6\,.\,10^{-11}\ \text{m}.$$

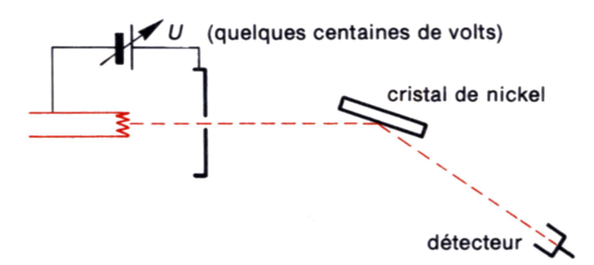
Cette longueur d'onde $\lambda \approx 0{,}86$ Å est bien de l'ordre de grandeur fourni par l'expérience.

b) Diffraction des électrons.

• Les phénomènes de diffraction s'observent pour des ondes qui rencontrent des obstacles dont les dimensions sont de l'ordre de la longueur d'onde. Pour $\lambda \sim 1$ Å, ces obstacles existent : il s'agit des ions dans un réseau cristallin. Par exemple, l'étude aux rayons X d'un cristal de nickel indique la répartition des ions nickel et montre que leur distance est de 2,15 Å.

• En 1927, les physiciens américains Clinton Joseph Davisson et Lester Halbert Germer ont observé la diffraction des électrons par un cristal de nickel. Le dispositif est schématisé à la figure 2. Lorsqu'on augmente la tension accélérant les électrons, on constate que l'intensité du pinceau réfléchi dans une direction donnée passe par une succession de valeurs maximales. Ces maxima s'interprètent comme résultant **d'interférences** constructives entre les ondes associées aux électrons, et on peut déterminer les longueurs d'ondes λ correspondantes (voir exercice nº 14, page 527). D'autre part, la quantité de mouvement des électrons se déduit de la tension accélératrice U : $p = \sqrt{2\,emU}$. L'expérience montre que les divers produits $p\,.\,\lambda$ sont bien égaux à la constante de Planck (aux incertitudes de mesures près).

• Ces expériences s'interprètent en invoquant le **caractère ondulatoire de l'électron.** Elles confirment l'hypothèse de Louis De Broglie.



2. Représentation schématique du dispositif de Davisson et Germer. Des électrons sont projetés sur un cristal de nickel. Un détecteur (cylindre de Faraday, Compteur Geiger...) permet de mesurer l'intensité du pinceau électronique renvoyé par le cristal.

3. Onde de De Broglie.

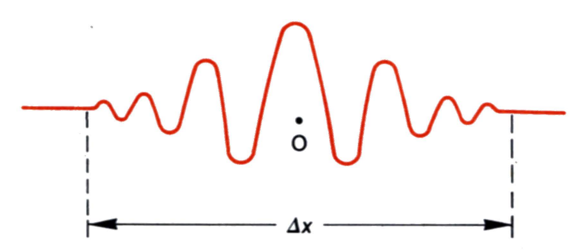
- Par analogie avec le photon, l'onde associée à une particule qui se déplace parallèlement à un axe Ox dans le sens positif avec une quantité de mouvement $\vec{p}$ et une énergie **totale** E peut être décrite par une fonction ψ telle que :

$$\psi = \psi_0 \cos\left(\frac{E}{\hbar} t - \frac{p}{\hbar} x\right),$$

qui fait intervenir les variables corpusculaires E et p.
Dans cette relation, l'amplitude ψ_0 dépend en général des variables de position (x, y, z) de l'endroit où l'on cherche à localiser la particule par une mesure.

- Le carré $\psi_0^2(x, y, z)$ de l'amplitude indique la **probabilité** de rencontrer la particule au point de coordonnées (x, y, z). Il y a donc plus de chances de trouver le corpuscule là où l'amplitude ψ_0 est grande. La forme mathématique de ψ_0 doit donc être telle que, loin de la position présumée de la particule, on ait $\psi_0 = 0$ ($\psi_0 = 0$ signifie : probabilité de présence nulle à l'endroit considéré). Cela confère à ces ondes une faible **extension spatiale** Δx.

- La figure 3 représente schématiquement les variations dans l'espace d'une amplitude ψ_0 possible, à une date donnée.



3. Représentation schématique d'une onde associée à une particule. C'est au point O que le centre de masse de la particule a le plus de chances de se trouver. On dit aussi qu'on a affaire à un « paquet d'ondes ».

Remarque.
Dans la relation

$$\psi = \psi_0 \cos\left(\frac{E}{\hbar} t - \frac{p}{\hbar} x\right),$$

on ne peut plus écrire $E = \hbar\omega$ et $p = \hbar k$ lorsque les particules envisagées ne sont pas des photons.

II. Domaine d'intervention de la mécanique quantique.

Les lois de la mécanique newtonienne deviennent inopérantes lorsqu'il faut tenir compte des **quanta,** c'est-à-dire des petites discontinuités de matière, d'énergie... imperceptibles à notre échelle. Nous allons préciser maintenant dans quelles circonstances la **mécanique quantique** doit intervenir pour rendre compte du comportement des particules, à l'échelle atomique ou subatomique.

1. Longueurs d'ondes associées à diverses particules.

Considérant la valeur numérique de la constante de Planck ($h \approx 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J . s), on peut s'attendre à ce que la longueur d'onde $\lambda = \dfrac{h}{p}$ soit très faible, sauf peut-être si la quantité de mouvement p est faible, c'est-à-dire si les particules sont peu massives et lentes.

a) Cas des électrons, des protons et des neutrons.

• Nous avons vu plus haut (page 513) que la longueur d'onde associée à des électrons, accélérés par une tension de quelques centaines de volts, est de l'ordre de l'angström. Dans ces conditions, l'énergie cinétique des électrons, quelques centaines d'électron-volts, est négligeable vis-à-vis de leur énergie de masse (511 keV).

• Dans la matière, l'énergie cinétique moyenne d'agitation thermique d'une particule quelconque est voisine de $E_c = 0{,}05$ eV à température ordinaire. C'est pourquoi les particules dont l'énergie cinétique est de cet ordre sont appelées « particules thermiques ».
L'énergie cinétique d'un **neutron thermique** est très inférieure à son énergie au repos (voisine de 1 000 MeV). Un neutron thermique n'est donc pas relativiste. Sa quantité de mouvement se déduit de son énergie cinétique $E_c = \dfrac{1}{2} mv^2$ par :

$$p = mv = \sqrt{m^2 v^2} = \sqrt{2\, mE_c}.$$

Avec $E_c = 0{,}05 \text{ eV} \approx 8 \cdot 10^{-21} \text{ J}$, il vient :

$$p = \sqrt{2 \times 1{,}67 \cdot 10^{-27} \times 8 \cdot 10^{-21}} \approx 5{,}2 \cdot 10^{-24} \text{ kg m} \cdot \text{s}^{-1}$$

et

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad \text{soit} \quad 1{,}3 \text{ Å}.$$

Comme pour les électrons précédents, moins massifs mais plus rapides, la quantité de mouvement d'un neutron thermique est donc de l'ordre de l'angström.

• Le proton et le neutron ont sensiblement la même masse. La longueur d'onde associée à un proton thermique vaut donc aussi environ 1 Å. Des expériences tout à fait analogues à celle qui est décrite à la figure 2 (page 513) ont été réussies avec des protons et des neutrons lents : il faut utiliser des détecteurs appropriés. Le caractère ondulatoire de ces particules a été ainsi prouvé.

• **Remarque.** La longueur d'onde associée à une particule de vitesse nulle serait infinie. En vous reportant au schéma de la figure 3 (page 514) vous constaterez qu'il serait impossible de localiser une telle particule (où situer le point O, entre $+\infty$ et $-\infty$?). Or, lorsqu'on s'intéresse à une particule, on sait au moins à peu près la localiser. Cela implique des longueurs d'ondes associées assez courtes et, par suite, l'existence d'une quantité de mouvement $p = \dfrac{h}{\lambda}$ non nulle. Ce résultat est général : **les particules envisagées en Mécanique Quantique ne peuvent pas être constamment au repos.**

b) Atomes et molécules.

En envoyant des jets d'hélium ou d'hydrogène sur des cristaux, on a observé aussi des zones d'interférences destructives pour les atomes ou les molécules réfléchis. (Dispositif analogue à celui de la figure 2, page 513).

Cela suggère que la relation de De Broglie est très générale.

c) Parcelles de matière.

• Soit un tout petit grain de poussière, de 1 μm de diamètre. Son volume est voisin de $5 \cdot 10^{-19}$ m³ et, si sa densité est de quelques unités, sa masse est proche de 10^{-15} kg. Ces valeurs sont énormes, comparées à celles des électrons. Même si la particule est lente, sa longueur d'onde associée est très courte.

Par exemple, pour $v = 6{,}6 \,.\, 10^{-4}$ m . s^{-1},

$$\lambda \approx \frac{6{,}6 \,.\, 10^{-34}}{10^{-15} \times 6{,}6 \,.\, 10^{-4}} = 10^{-15} \text{ m } (10^{-9} \text{ µm} \quad \text{ou} \quad 10^{-5} \text{ Å}) .$$

Cette valeur est de l'ordre du diamètre des nucléons.
Aucun cristal ne peut donc posséder d'ions assez proches pour réaliser la diffraction de telles « particules ». L'aspect ondulatoire est donc ici sans intérêt, puisqu'il ne peut être mis en évidence.

• **Il résulte des exemples précédents que la relation de Louis de Broglie n'est intéressante à appliquer qu'à l'échelle nucléaire, atomique, ou moléculaire, lorsque des phénomènes de diffraction peuvent intervenir.** Nous allons préciser ce point de vue dans le paragraphe suivant.

2. Quand faire intervenir la Mécanique Quantique ?

a) Généralités.

• Nous nous sommes déjà posé une question analogue à propos de la mécanique relativiste (page 395). Dans ce cas, le critère utilisé revient à comparer la vitesse du corpuscule à la constante universelle $c \approx 3 \,.\, 10^8$ m . s^{-1}.

• Il existe un critère du même genre permettant de déterminer si le problème étudié a des chances d'être du domaine de la Mécanique Quantique : **on compare la constante de Planck** à certaines associations de grandeurs liées à la particule étudiée. Ces associations doivent, comme la constante de Planck, s'exprimer en J . s (ou kg . m^2 . s^{-1}). Par exemple, une énergie (en J) multipliée par un temps (en s), ou une quantité de mouvement (en kg . m . s^{-1}) multipliée par une distance (en m), conviennent. Le temps ou la distance en question peuvent être **l'extension temporelle ou l'extension spatiale** offerts au corpuscule étudié (revoir la figure 3, page 514). Ces extensions résultent du fait que la présence d'un corpuscule en un point donné, ou sa durée de vie dans un état déterminé, ne peuvent être fixés qu'avec une certaine **probabilité.** Les exemples suivants montreront comment on peut parfois les évaluer.

• Nous pouvons énoncer notre critère d'intervention : **La Mécanique Quantique est susceptible d'intervenir avec succès lorsque, exprimés en kg . m^2 . s^{-1}, les produits de certaines grandeurs caractérisant le corpuscule étudié sont du même ordre de grandeur que la constante de Planck.** Vérifions la validité de ce critère dans des cas vus précédemment.

b) Exemples.

• Revenons au grain de poussière étudié à la page 516. Sa quantité de mouvement vaut

$$p = mv = 10^{-5} \times 6{,}6 \,.\, 10^{-4} = 6{,}6 \,.\, 10^{-19} \text{ kg . m . s}^{-1}.$$

Son extension spatiale, assimilée à son diamètre, est $\Delta x = 10^{-6}$ m. Le produit $mv \,.\, \Delta x$ vaut $6{,}6 \,.\, 10^{-25}$ kg . m^2 . s^{-1}, soit $10^9\, h$. Il est largement supérieur à la constante de Planck et, comme nous le savions, il n'y a pas lieu de faire intervenir la mécanique quantique.

• Soit un électron du pinceau d'un tube de télévision. Sa vitesse est de l'ordre de 20 000 km . s^{-1}, d'où

$$p = mv \simeq 9{,}1 \,.\, 10^{-31} \times 2 \,.\, 10^{7} \simeq 1{,}8 \,.\, 10^{-23} \text{ kg . m . s}^{-1}.$$

Sans nuire aux qualités de l'image, il suffit qu'il vienne frapper l'écran en un point dont la position n'a pas besoin d'être connue à mieux que $\Delta y = 0{,}1$ mm près (ce qui est inférieur au diamètre des pastilles luminescentes qui tapissent l'écran d'un téléviseur couleur).
Dans ces conditions, nous choisirons cette valeur de Δy comme extension spatiale offerte à l'électron. Le produit $mv \,.\, \Delta y$ vaut alors $1{,}8 \,.\, 10^{-27}$ kg . m^2 . s$^{-1} \simeq 3 \,.\, 10^6\, h$. Cet électron n'a donc pas un comportement quantique. Cela justifie a posteriori notre étude de tels électrons par application des lois newtoniennes ou relativistes.

• Si l'électron est maintenant celui d'un atome H, dont le diamètre vaut environ $a = 1$ Å $= 10^{-10}$ m, vous trouverez en réfléchissant un peu que son énergie cinétique doit être du même ordre que l'énergie d'ionisation de l'atome, c'est-à-dire 13,6 eV ou, environ, $2 \,.\, 10^{-8}$ J. Cette énergie est bien inférieure à l'énergie au repos de l'électron (0,5 MeV), qui n'est donc pas relativiste. Sa quantité de mouvement est

$$p = \sqrt{2\, mE_c} \simeq \sqrt{2 \times 9{,}1 \,.\, 10^{-31} \times 2 \,.\, 10^{-18}} \simeq 2 \,.\, 10^{-24} \text{ kg . m . s}^{-1}.$$

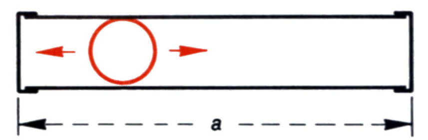
Dans ce cas, en choisissant le diamètre de l'atome comme extension spatiale offerte à l'électron, on a : $p \times a \simeq 2 \,.\, 10^{-34}$ kg . m^2 . s $\simeq \dfrac{h}{3} \sim h$: la Mécanique Quantique s'impose.

• Certains noyaux ne restent dans un état excité que pendant des durées très courtes, parfois moins de $\Delta t \simeq 10^{-20}$ s, que nous prendrons comme extension temporelle. Les photons émis ont une énergie de l'ordre du MeV, soit $1{,}6 \,.\, 10^{-13}$ J. Le saut d'énergie ΔE du noyau est tel que $\Delta E \times \Delta t \simeq 1{,}6 \,.\, 10^{-13} \times 10^{-20} = 1{,}6 \,.\, 10^{-33}$ J . s $\simeq 2{,}4\, h \sim h$.

L'étude des niveaux d'énergie des noyaux est donc bien du domaine de la Mécanique Quantique.

III. Justification de l'existence des niveaux d'énergie.

Il ressort des exemples précédents qu'un électron n'a un comportement quantique que lorsqu'il est confiné dans un espace de très petit volume (celui d'un atome par exemple).
Cette situation peut être comparée à celle d'une mouche qui vole, enfermée dans une boîte. Pour ne pas avoir à traiter un problème dans l'espace de dimension 3, nous allons envisager le cas d'une particule astreinte à rester dans un tube filiforme de même diamètre qu'elle ; un tel tube est souvent appelé « boîte à une dimension ».



4. Rebonds d'une balle de ping-pong dans une « boîte à une dimension ».

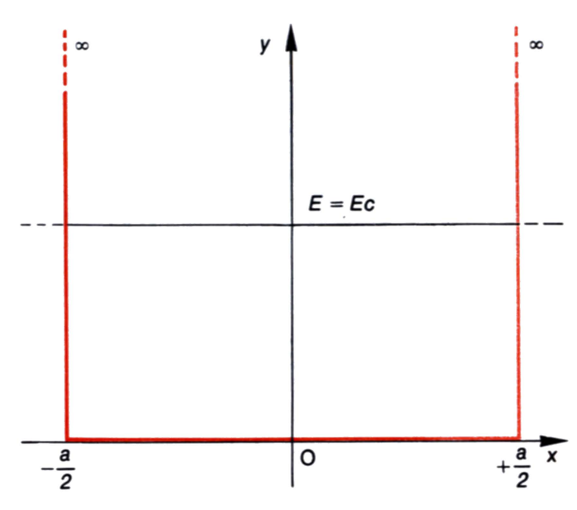
1. Particule dans une boîte à une dimension.

a) Analyse classique du problème.

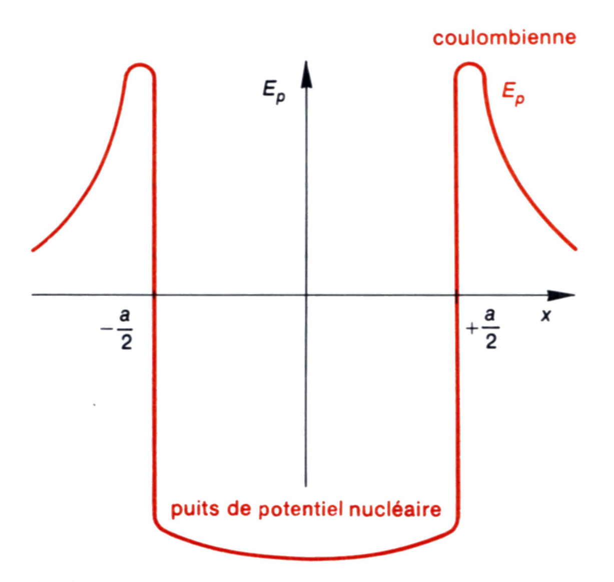
• Soit une balle de ping-pong, enfermée dans une boîte cylindrique de même diamètre qu'elle. Nous imaginons qu'il n'y a pas de frottements (de la part de l'air ou des parois), que le tube est horizontal et fermé à ses deux extrémités par des obstacles très rigides, distants de a (figure 4). Nous supposons que la balle rebondit contre les parois de façon élastique, sans perte d'énergie cinétique.

• Une fois lancée, la balle effectue dans ces conditions des aller-retours incessants. Son énergie potentielle de pesanteur reste constante, et peut être choisie nulle. Les rebonds aux extrémités sont analogues à des actions sur des ressorts infiniment raides : l'énergie potentielle élastique devient brusquement infinie lorsque la balle touche les parois.

• La figure 5 indique comment varie l'énergie potentielle du système en fonction de la position de la balle. Toute l'énergie mécanique est sous forme cinétique ; la balle reste dans un « puits de potentiel » dont elle ne peut franchir les barrières.



5. Représentation graphique des variations de l'énergie potentielle de la balle de la figure 4. L'énergie mécanique $E = E_p + E_c$ apparaît uniquement sous forme cinétique ($E_p = 0$ par convention). La balle est supposée de petite taille, de telle sorte que son centre d'inertie oscille entre les points d'abscisses $\mp \frac{a}{2}$ (a désignant la longueur de la boîte).



6. Représentation graphique approximative des variations de l'énergie potentielle d'un proton en interaction avec un noyau. L'énergie potentielle a été choisie nulle lorsque le proton est infiniment éloigné du noyau. Les interactions nucléaires fortes étant très intenses, le puits de potentiel est très profond. *a* est, approximativement, le diamètre du noyau.
Comment cette courbe doit-elle être modifiée pour un neutron qui ne possède pas d'énergie potentielle coulombienne ?

b) Cas d'une particule quantique.

- Imaginons maintenant une particule quantique évoluant dans un « tube » analogue ; on sait qu'elle ne peut rester au repos dans ce « tube » (voir la remarque de la page 516). Cela donne un **modèle** à une dimension, d'un électron enfermé dans un atome assimilé à une boîte à une dimension (« boîte-atome ») ou d'un nucléon confiné dans une « boîte-noyau ». La longueur *a* de la boîte est l'extension spatiale offerte à la particule.
- L'électron de l'atome évolue dans un puits de potentiel qui résulte de l'attraction coulombienne de la part du noyau. Pour un nucléon enfermé dans le noyau, ce sont les **interactions nucléaires fortes** qui créent le puits de potentiel. La situation est assez analogue à celle de la balle de ping-pong, mais la forme de la courbe indiquant les variations de l'énergie potentielle doit être un peu modifiée (figure 6).
- Nous sommes dans les conditions où il convient d'utiliser la Mécanique Quantique. Les ondes associées à la particule pendant ses aller-retours présentent des analogies avec les ondes qui vont et viennent le long d'une corde de Melde pour donner finalement une onde stationnaire. Cela nous conduit à l'idée que **l'onde associée à une particule confinée dans un volume restreint est une onde stationnaire.**

2. Évaluation des niveaux d'énergie.

- Écrivons la condition de **stationnarité** de l'onde. Comme pour l'expérience de Melde, la longueur *a* de la « boîte » doit être un **nombre entier** de demi-longueurs d'onde : $n\frac{\lambda}{2} = a$.

On en déduit la valeur de la quantité de mouvement de la particule : $p = \frac{h}{\lambda} = n\frac{h}{2a}$. Elle ne peut prendre que certaines valeurs discrètes et se trouve ainsi **quantifiée.** Par suite, l'énergie cinétique de la particule est, elle aussi, quantifiée. Si on la suppose non relativiste :

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} = \frac{1}{2}n^2\frac{h^2}{4a^2m} = n^2 E_0,$$

en posant : $$E_0 = \frac{h^2}{8ma^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad \left(h = \frac{\hbar}{2\pi}\right).$$

• Pour un électron enfermé dans un atome, $a \sim 2$ Å et

$$E_0 \approx \frac{(6{,}62 \,.\, 10^{-34})^2}{8 \times 9{,}1 \,.\, 10^{-31} \times (2 \,.\, 10^{-10})^2} \approx 1{,}5 \,.\, 10^{-18}\ \text{J} \approx 9{,}5\ \text{eV}\,.$$

Pour un nucléon dans un noyau, a $\sim 5 \,.\, 10^{-15}$ m et

$$E_0 \approx \frac{(6{,}62 \,.\, 10^{-34})^2}{8 \times 1{,}67 \,.\, 10^{-27} \times (5 \,.\, 10^{-15})^2} \approx 1{,}3 \,.\, 10^{-12}\ \text{J} \approx 8 \,.\, 10^6\ \text{eV} = 8\ \text{MeV}\,.$$

Ces valeurs sont bien de l'ordre de grandeur des sauts d'énergie pour les électrons d'un atome (chapitre 23, page 460) ou pour les nucléons d'un noyau (chapitre 24, page 484). Cela confirme la validité du modèle.

• Pour le petit grain de poussière envisagé plus haut (page 516) :

$$m = 10^{-15}\ \text{kg}\,, \quad v = 6{,}6 \,.\, 10^{-4}\ \text{m}\,.\,\text{s} \quad \text{et} \quad a = 1\ \mu\text{m}\,.$$

Dans ce cas, $E_0 \approx \dfrac{(6{,}62 \,.\, 10^{-34})^2}{8 \times 10^{-15} \times (10^{-6})^2} \approx 5{,}5 \,.\, 10^{-41}$ J

et $E_c = \dfrac{1}{2} m v^2 = \dfrac{1}{2} \times 10^{-15} \times (6{,}6 \,.\, 10^{-4})^2 \approx 2{,}2 \,.\, 10^{-22}$ J .

L'énergie minimale élémentaire E_0 est tout à fait négligeable vis-à-vis de l'énergie cinétique $\left(\dfrac{E_0}{E_c} \sim 10^{-19}\right)$. Déjà, à cette échelle pourtant encore petite, **la quantification n'est plus perceptible.**

• **Remarque.** Il n'y a pas de contradiction entre la relation $E_c = n^2 E_0$ et celle qui donne les niveaux d'énergie de l'atome H $\left(E_n = -\dfrac{E_0}{n^2}\right)$. La première ne fournit que l'énergie cinétique, à laquelle il faut ajouter l'énergie potentielle coulombienne $\left(-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{a}\right)$ pour obtenir E_n. En procédant ainsi (voir l'exercice n° 15, p. 528), on obtient des résultats en excellent accord avec les données des expériences.

3. Interprétation de la radioactivité α.

• Les particules α sont des édifices tellement stables que l'on peut concevoir leur pré-existence dans les noyaux, en général assez gros, qui les émettent. Le calcul précédent donne :

pour un nucléon

$$E_0 = \frac{h^2}{8\,ma^2} \approx 8 \text{ MeV},$$

pour une particule α : (4 fois plus massive)

$$E_0 = \frac{8}{4} \text{MeV} = 2 \text{ MeV}.$$

• Nous observons que cette valeur est du même ordre que l'énergie cinétique de la particule une fois qu'elle a été expulsée du noyau (chapitre 24, page 489). Nous pouvons donc nous représenter une particule α en train de rebondir rapidement sur les barrières de potentiel du noyau, avant d'être expulsée avec la même énergie cinétique (quantifiée) que lorsqu'elle se trouve dans le noyau.

• La Mécanique Classique ne permet pas de comprendre que la particule puisse sortir du noyau, car son énergie cinétique est insuffisante pour franchir la barrière. On dit alors que le corpuscule a emprunté un tunnel (!).

• La Mécanique Quantique interprète cet « effet tunnel » en montrant que la **probabilité** pour que la particule α sorte du noyau n'est pas nulle. De même que la lumière passe d'un milieu dans un autre avec réflexion et, souvent, réfraction, l'onde associée aux particules est réfléchie ou transmise au niveau des barrières de potentiel nucléaire.
Pour certaines énergies permises, on trouve que l'amplitude réfléchie est nulle. Lorsque la probabilité pour que la particule prenne l'une de ces énergies est faible, la vie moyenne du radionucléide est grande. Cet exemple montre que **la Mécanique Quantique jouit d'une capacité explicative plus grande que la Mécanique Classique.**

• **Remarque :** La radioactivité β ne peut pas s'interpréter par la pré-existence d'électrons dans les noyaux. Environ 2 000 fois moins massif qu'un nucléon, un électron confiné dans un noyau possèderait une énergie au moins égale à $E_0 \approx 2\,000 \times 2 = 4\,000$ MeV (4 GeV). C'est suffisant pour franchir la barrière.

4. Autres succès de la Mécanique Quantique.

• La théorie de la **liaison chimique** ne peut être établie de façon satisfaisante qu'en utilisant la Mécanique Quantique.
Dans la molécule de benzène, par exemple, certains électrons possèdent une onde associée qui ne s'étend qu'entre deux atomes : ces électrons sont dits « localisés ». Ceux qui, par de multiples effets tunnels, affectent la molécule entière, sont qualifiés de « délocalisés ».

• Les phénomènes considérés habituellement comme typiquement corpusculaires, tels les chocs de particules, sont eux aussi susceptibles d'une interprétation quantique satisfaisante.
Par exemple, il peut arriver que l'interaction de deux ondes de matière donne naissance à trois ondes : l'interaction est alors inélastique.

• Pour découvrir les lois de la physique à une échelle toujours plus petite, il faut utiliser des « particules » dont l'extension spatiale soit inférieure au domaine que l'on cherche à explorer. (On n'utilise pas un marteau-pilon pour écraser un protozoaire !)
Si l'on veut explorer le nucléon, il faudra utiliser des électrons (par exemple) dont l'extension spatiale sera inférieure à la taille de ces nucléons (10^{-15} m de « diamètre » environ), disons $a \sim 10^{-16}$ m.
Ces électrons devront avoir une énergie

$$E_0 = \frac{h^2}{8\,ma^2} \approx \frac{(6{,}62 \,.\, 10^{-34})^2}{8 \times 9{,}1 \,.\, 10^{-31} \times (10^{-16})^2} \approx 6\ \mu\text{J} \approx 4 \,.\, 10^{13}\ \text{eV}$$

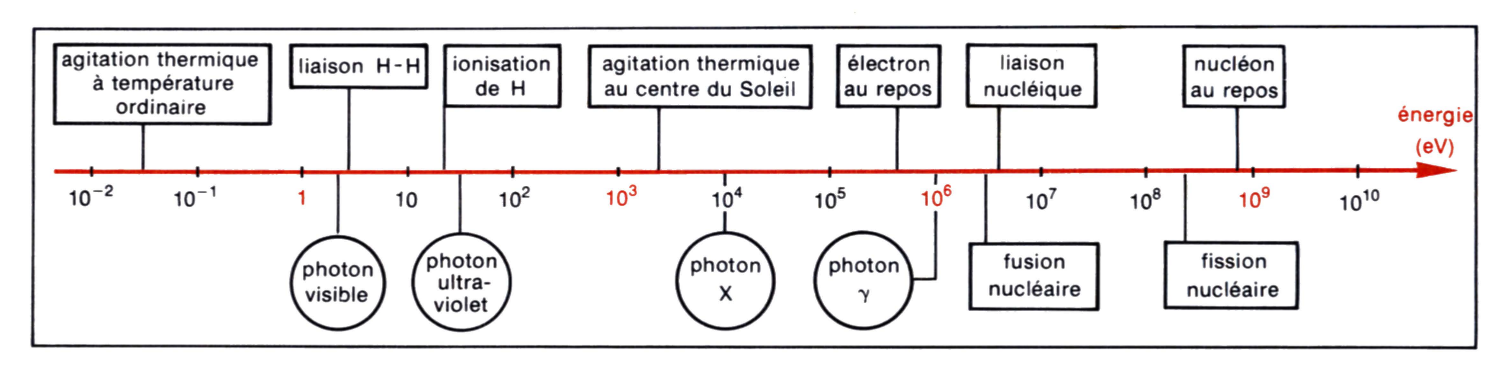
ou 40 millions de MeV.
Un tel accélérateur n'est pas encore construit ! Cela explique la course aux hautes énergies dans la fabrication des accélérateurs de particules.

• En recherche fondamentale, on suppose maintenant que les champs électriques et magnétiques sont eux-mêmes quantifiés. Cette **théorie quantique des champs,** encore imparfaite, est actuellement la théorie physique interprétant les faits expérimentaux de la façon la plus satisfaisante.

IV. Conclusion.

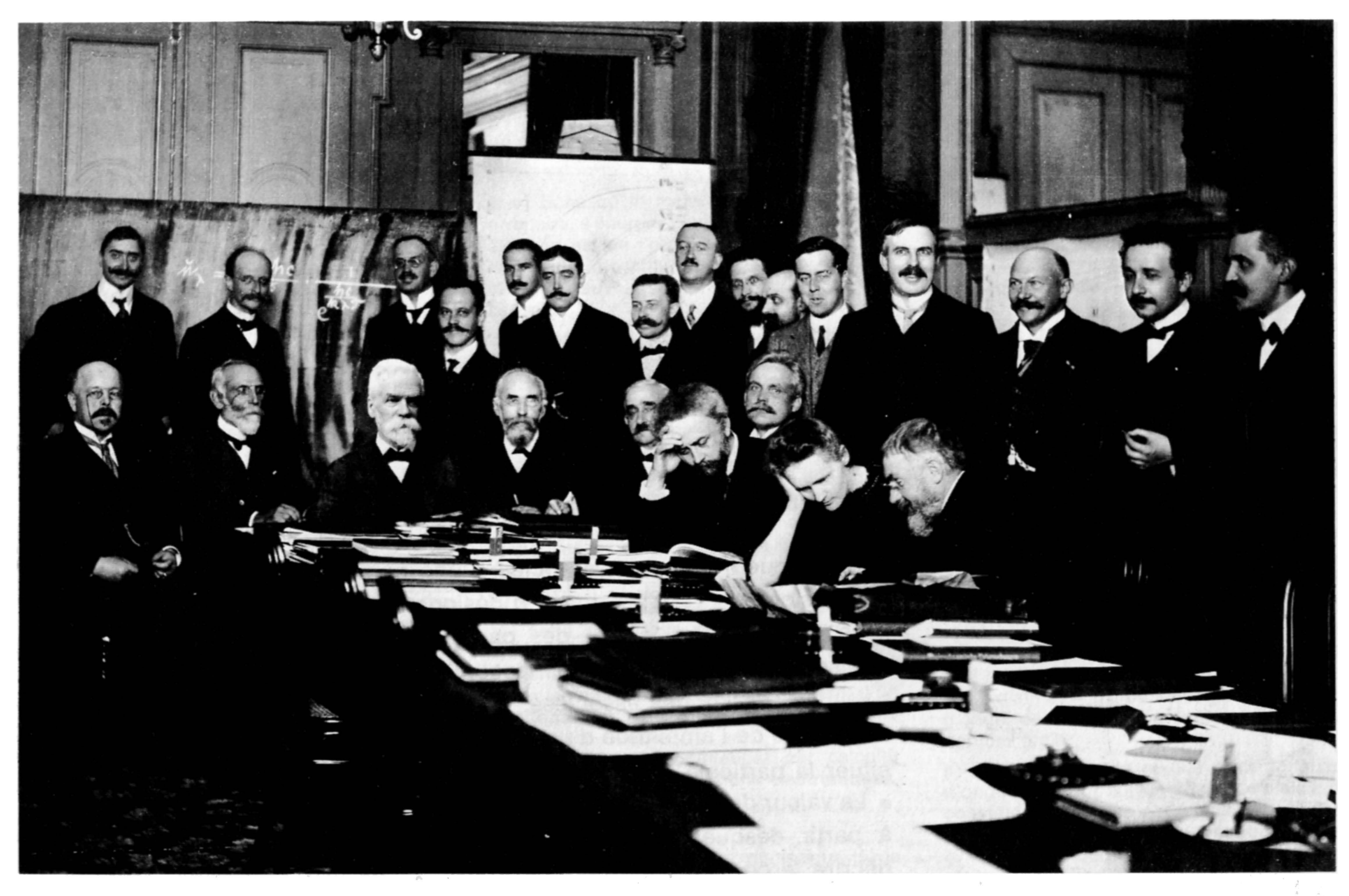
• En faisant l'hypothèse que l'onde associée à une particule confinée dans un faible volume est stationnaire, nous avons, grâce à **une** idée générale, retrouvé **plusieurs** résultats établis précédemment de façon empirique. Nous avons donc progressé. Au niveau de ce cours, nous ne pouvons pas montrer comment, à partir de lois de la Mécanique Quantique plus générales encore, on retrouve la nécessité de cette stationnarité, qui perd ainsi son caractère hypothétique.

• Pour clore ce chapitre et ce livre, nous vous souhaitons d'agréables études ultérieures en Physique et empruntons à Monsieur le Professeur Alfred Kastler, Prix Nobel de Physique, ces lignes tirées de son ouvrage intitulé « Cette étrange matière » :
« Qui n'est pas scientifique s'imagine sans doute que la physique, plus que toute autre science, est une discipline exacte et complète, sûre de ses méthodes et fière de ses résultats.
Il y a là une grande part de vérité. Mais il faut bien comprendre que nos connaissances sur la matière, si étendues qu'elles soient, sont encore comme des îlots qui émergent d'un océan inconnu ; et que les progrès mêmes qui ont été accomplis depuis le début de ce siècle ont pour étrange contrepartie de nous rendre la matière moins familière et moins « naturelle ». Ainsi va la science... : au moment de nous découvrir le secret de l'atome, elle nous invite à renoncer aux modèles intuitifs par lesquels nous eussions le mieux satisfait notre passion pour les synthèses définitives et les raisons ultimes. »



7. Tableau rappelant les **ordres de grandeurs** de certaines énergies caractéristiques. Les valeurs sont données en eV et rapportées à un corpuscule.

Une réunion assez exceptionnelle... Certains de ces physiciens sont représentés aussi en page de garde, plus âgés de 16 ans.



GOLDSCHMIDT PLANCK RUBENS LINDEMANN HASENOHRL
NERNST BRILLOUIN SOMMERFELD DE BROGLIE HOSTELET
SOLVAY KNUDSEN HERZEN JEANS RUTHERFORD
LORENTZ WARBURG WIEN EINSTEIN LANGEVIN
PERRIN Mme CURIE POINCARÉ KAMERLINGH ONNES

Contrôle des acquisitions.

Complétez les phrases suivantes :

• La longueur d'onde λ associée à une particule de ______ p a pour expression $\lambda =$ ______ , où h désigne la ______ .
• Le caractère ______ des particules a été confirmé lorsqu'on a su réaliser des expériences dans lesquelles interviennent la ______ ou les ______ des ondes associées.
• Le carré de l'amplitude d'une onde de De Broglie indique la ______ de situer la particule à l'endroit où elle est présumée se trouver.
• La valeur de la ______ h permet de fixer approximativement les limites à partir desquelles il convient d'utiliser la mécanique ______ pour décrire le comportement d'un corpuscule.
• Lorsqu'une particule est confinée dans un espace de volume restreint, l'onde qui lui est associée est ______ . Il en résulte que cette particule ne peut posséder que certains ______ .

Petites questions.

1. Une particule chargée est soumise à une tension accélératrice *U*. La longueur d'onde qui lui est associée augmente-t-elle lorsque *U* croît ?

2. Certains physiciens préfèrent dire onde « représentant » le corpuscule plutôt qu'onde « associée ». Qu'en pensez-vous ?

3. Les photons sont parfois appelés « onduscules ». Ce qualificatif vous semble-t-il convenir pour une particule matérielle ?

4. Une particule quantique n'est pratiquement jamais immobile. Peut-on, cependant, parler de son énergie au repos ?

5. Un photon de lumière rouge a-t-il une quantité de mouvement plus grande ou plus petite qu'un photon de lumière violette ? De deux électrons de longueurs d'ondes associées 0,4 μm et 0,8 μm, lequel va le plus vite ?

6. Quelle devrait être votre vitesse pour que votre longueur d'onde associée soit du même ordre que votre épaisseur moyenne ? Combien de temps mettriez-vous pour parcourir, à cette vitesse, 100 m dans la cour du lycée ? Cette vitesse a-t-elle une grande signification ?

Réponses : $5{,}5 \cdot 10^{-35}$ m . s^{-1} ($m \approx 60$ kg). Près de 60 milliards de milliards de millions de millénaires. Non.

Applications immédiates.

7. Calculez les longueurs d'ondes associées aux corpuscules suivants :

a) électron de vitesse 10^{-2} *c*.

b) proton de vitesse 1 640 m . s^{-1}.

Réponse : environ 24 Å.

8. Calculez le rapport des longueurs d'ondes associées à un proton ($m \approx 1$ u) et à une particule α ($M \approx 4$ u), supposés non relativistes, lorsqu'ils ont :

a) même vitesse ;

b) même quantité de mouvement ;

c) même énergie cinétique.

Réponses : **a)** $\frac{\lambda_p}{\lambda_\alpha} = 4$; **b)** $\frac{\lambda_p}{\lambda_\alpha} = 1$; **c)** $\frac{\lambda_p}{\lambda_\alpha} = 2$.

Approfondissement.

9. **a)** Dans un fil métallique, à température ordinaire, l'énergie cinétique moyenne d'un électron est de l'ordre de 0,05 eV. Calculez les valeurs moyennes de sa vitesse, sa quantité de mouvement et sa longueur d'onde associée.

b) Dans un cristal métallique, la distance entre deux ions est de l'ordre de $a = 2{,}5$ Å. Quelle serait l'énergie cinétique minimale de l'électron, s'il restait confiné entre deux ions ?

c) Quelle est l'extension spatiale offerte à l'électron de la question **a** ? Cela justifie-t-il, à vos yeux, l'existence d'électrons « libres » à l'intérieur d'un métal ?

Réponses : **a)** 130 km . s^{-1} ; $1{,}2 \cdot 10^{-25}$ kg . m . s^{-1} ; 55 Å. **b)** $E_0 \approx 6$ eV ; **c)** 27 Å.

10. Est-il nécessaire de faire intervenir la Mécanique Quantique pour étudier le mouvement d'un électron, initialement immobile, entre les armatures, distantes de 1 cm, d'un condensateur plan auquel on applique une tension donnée, en volt, par $u = 2 \cos 10^8 t$? Commencez par calculer l'amplitude x_M des vibrations électroniques.

Réponse : $x_M \approx 3{,}5$ mm ; $mv_M x_M \sim 10^6 h$: non quantique.

11. Montrez que la valeur numérique de la longueur d'onde associée à un électron non relativiste, soumis, à partir du repos, à une tension accélératrice *U* (volt) est donnée, en angström, par $\lambda \approx \frac{12{,}27}{\sqrt{U}}$.

12. Calculez les trois premières énergies cinétiques minimales permises à un neutron encagé dans un noyau assimilé à une boîte à une dimension de longueur $5 \cdot 10^{-15}$ m.

Réponses : 8,2 MeV ; 32,7 MeV ; 73,6 MeV.

13. Doit-on faire intervenir la Mécanique Quantique pour étudier ces phénomènes :

a) Photon de longueur d'onde $\lambda = 0{,}5$ μm oscillant entre deux miroirs plans parallèles distants de 10 cm ?

b) Particule de fumée, de masse 10^{-8} kg, de vitesse moyenne 1 μm . s^{-1}, animée d'un mouvement brownien (qu'est-ce ?) d'amplitude moyenne 1 μm ?

c) Ion de masse 50 u, d'énergie cinétique moyenne 0,05 eV, effectuant dans un cristal des oscillations d'amplitude moyenne 0,1 Å ?

Réponses : Non ; non ; oui.

14. Lorsqu'on envoie une onde sur un cristal, elle subit des réflexions sur les divers « plans réticulaires » constitués par les ions régulièrement répartis dans des plans équidistants (figure a). Les radiations réfléchies sur deux plans distants de *d* peuvent interférer de façon constructive ou destructive selon la valeur de l'écart angulaire θ indiqué sur les figures a et b.

a) Montrez que les directions pour lesquelles on obtient des interférences constructives, repérées par les angles θ_n, sont données par $2\,d \sin \theta_n = n\lambda$, où λ désigne la longueur d'onde de la radiation incidente et *n* un nombre entier.

b) En envoyant des rayons X de longueur d'onde $\lambda = 1{,}0$ Å sur un cristal de nickel, on constate que la plus petite valeur de θ donnant lieu à interférence constructive vaut $\theta_1 = 13{,}5°$. En déduire la distance *d* entre les plans réticulaires impliqués.

c) On envoie maintenant, sous la même incidence que précédemment, des électrons sur le cristal. On observe que les pinceaux électroniques réfléchis sont plus intenses

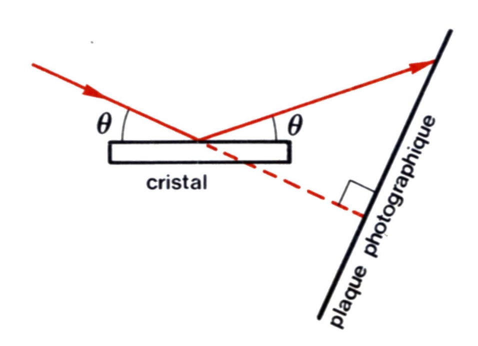
pour des tensions accélératrices $U_1 = 151$ V ; $U_2 = 602$ V ; $U_3 = 1\,355$ V (U_1 étant la tension la plus faible qui donne lieu à un maximum de réflexion).

— Interprétez cette expérience.

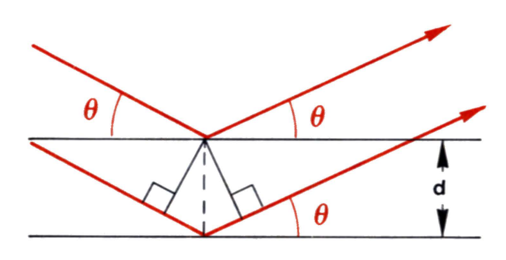
— Calculez à partir de la relation établie à la question **a)** les longueurs d'onde λ_1, λ_2 et λ_3 associées aux électrons.

— Calculez en partant des tensions U les quantités de mouvement p_1, p_2 et p_3 des électrons dans les trois cas.

— Calculez les valeurs des divers produits $p_n \times \lambda_n$. Conclusion.



a. Réflexion d'un rayonnement électromagnétique ou d'un pinceau d'électrons sur un cristal (exercice 14). Le calcul des écarts angulaires θ peut être repéré à partir de la position de la plaque photographique.



b. Réflexion sur deux plans réticulaires voisins.

15 On rappelle que, pour un électron d'extension spatiale a enfermé dans un atome, les niveaux d'énergie sont donnés par la relation $E_n = n^2 \dfrac{h^2}{8\,ma^2}$ (les notations sont celles du cours).

a) On assimile l'atome d'hydrogène à une sphère de rayon r, r désignant la distance la plus probable de l'électron au centre du noyau. En admettant que l'extension spatiale offerte à l'électron soit égale à la demi-circonférence de l'atome, exprimez E_n en fonction de n, h, m et r.

b) On obtient l'énergie E de l'électron lié au noyau en ajoutant à E_n l'énergie potentielle coulombienne $E_p = -\dfrac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r}$ (supposée nulle quand l'atome est ionisé). Exprimez E en fonction de $x = \dfrac{1}{r}$ et de diverses constantes.

c) Un système est stable lorsqu'il ne peut plus perdre d'énergie, c'est-à-dire lorsque celle-ci est minimale. Pour quelles valeurs de x l'atome H est-il stable $\left(\text{on annulera la dérivée } \dfrac{dE}{dx}\right)$?

Application numérique : Calculez, en fonction de l'entier n, les distances r les plus probables de l'électron au centre du noyau lorsque l'atome est stable, avec les données suivantes (unités SI) :

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\,\pi \,.\, 10^9}$;
$m = 9{,}11 \,.\, 10^{-31}$;
$e = 1{,}60 \,.\, 10^{-19}$;
$\hbar = 1{,}05 \,.\, 10^{-34}$.

Comparez à la valeur habituellement admise $r_1 \approx 0{,}53$ Å.

d) Montrez que, lorsque r prend l'une des valeurs précédentes, l'énergie E de l'électron lié à l'atome se met sous la forme $E = -\dfrac{E_0}{n^2}$, où l'on déterminera E_0 en fonction de diverses constantes.

Application numérique : Mêmes données qu'à la question précédente. Exprimez E_0 en eV. Conclure.

Réponses : **a)** $E_n = n^2 \dfrac{\hbar^2}{2\,mr^2}$;

b) $E = n^2 \dfrac{\hbar^2}{2\,m} x^2 - \dfrac{e^2}{4\,\pi\varepsilon_0} x$;

c) $r_n = \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{4\,\pi\varepsilon_0\,\hbar^2}{me^2} n^2 \approx 5{,}3 \,.\, 10^{-11}\, n^2$;

d) $E = -\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{e^2}{4\,\pi\varepsilon_0 \,.\, \hbar}\right)^2 . \dfrac{1}{n^2} \approx -\dfrac{13{,}7}{n^2}$ (énergie d'ionisation en eV).

16 La relation $\lambda = \dfrac{h}{p}$ s'applique aux particules relativistes. Calculez :

a) la vitesse d'une particule dont la longueur d'onde associée est égale à la « longueur d'onde Compton » λ_c (pour une particule de masse m, $\lambda_c = \dfrac{h}{mc}$: revoir page 437).

b) la vitesse d'un proton dont la longueur d'onde associée est égale au diamètre (environ 2,5 Å).

c) les longueurs d'ondes associées à un électron et à un anti-électron (tous deux de même masse, mais de charges opposées) qui se précipitent l'un vers l'autre, chacun avec une énergie cinétique égale à son énergie au repos. Les comparer à leurs « longueurs d'onde Compton ».

d) les longueurs d'onde des deux photons émis lorsque les deux particules précédentes se rencontrent et s'annihilent.
Comparez à la longueur d'onde Compton des électrons.

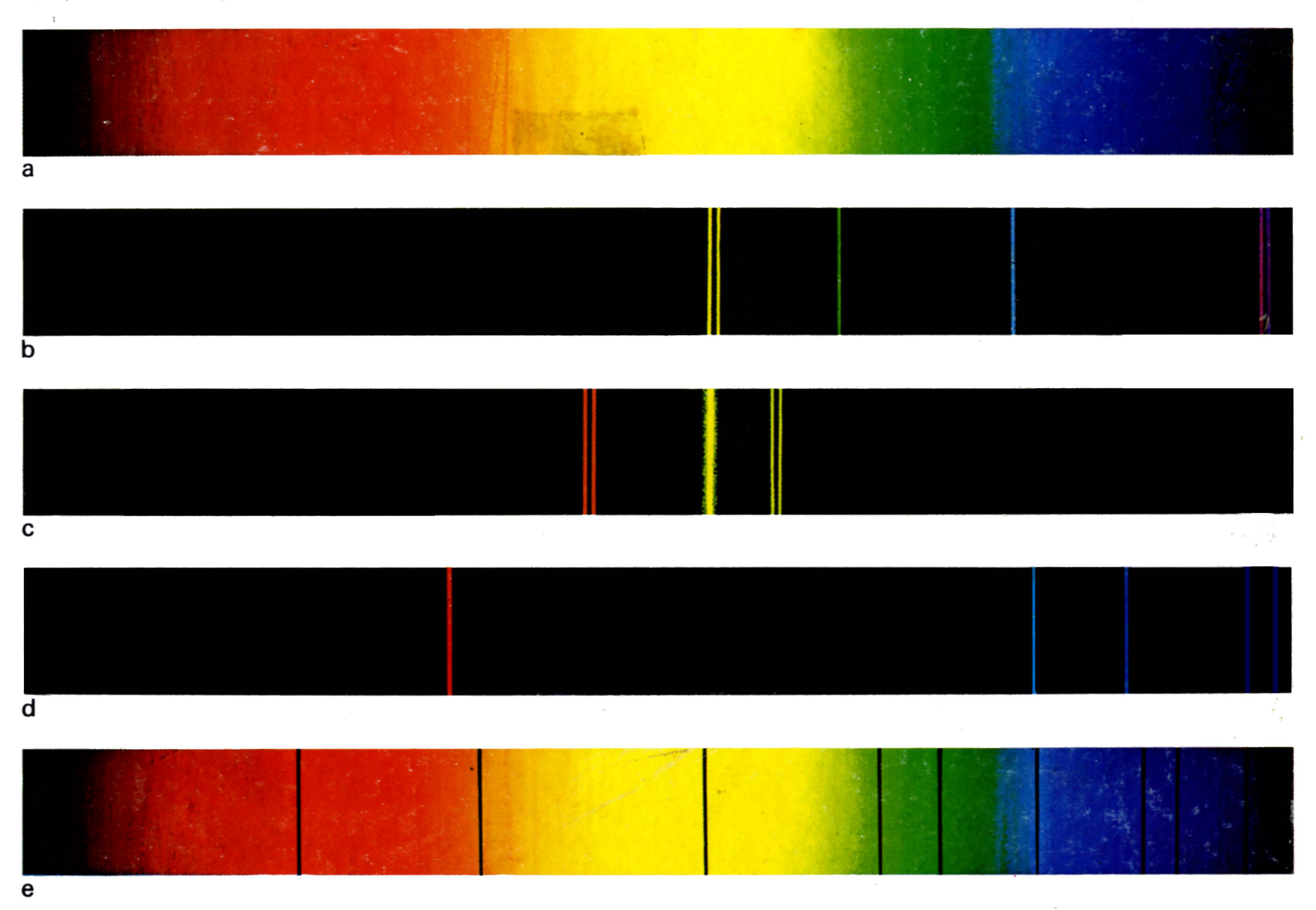
17 **a)** On désire étudier un détail de dimension a sur un objet de masse M, en le bombardant avec des corpuscules relativistes dont l'énergie cinétique est beaucoup plus grande que l'énergie de masse. Calculez l'énergie minimale de ces corpuscules en remarquant que leur longueur d'onde associée doit être inférieure ou égale à a.

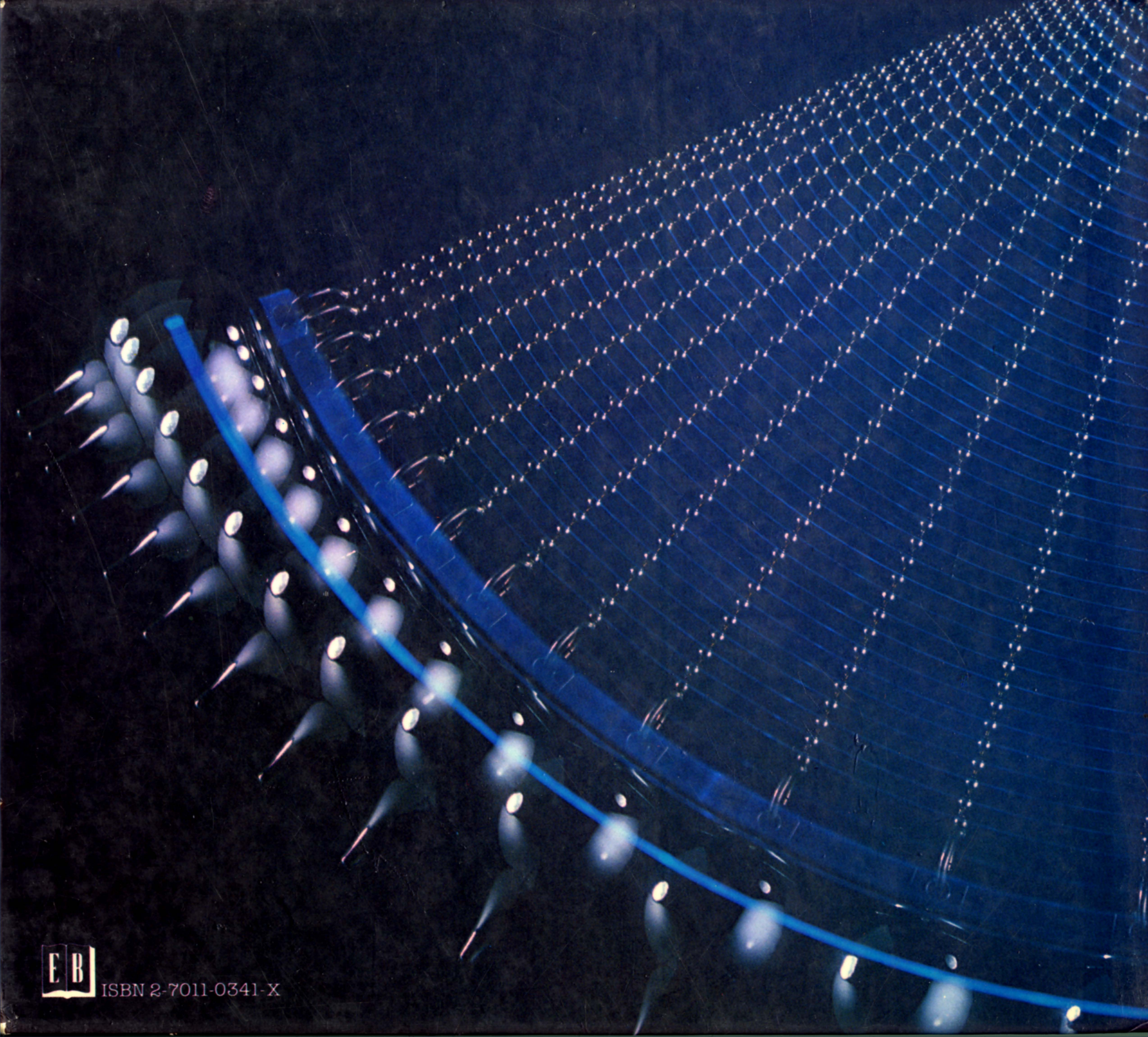
b) On suppose que l'objet bombardé est détruit si l'énergie des corpuscules est supérieure à son énergie de masse. Quelle est, dans ces conditions, la plus petite dimension observable sur l'objet ? La comparer à la « longueur d'onde Compton » de l'objet (voir exercice n° 16).

Index

Quelques spectres lumineux

a) Spectre continu de la lumière blanche.
b) Spectre d'émission de la vapeur de mercure.
c) Spectre d'émission de la vapeur de sodium.
d) Spectre d'émission de l'hydrogène (tube de Plucker).
e) Spectre d'absorption de la lumière solaire au cours de la traversée de la couronne solaire et de l'atmosphère terrestre.





ISBN 2-7011-0341-X